فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

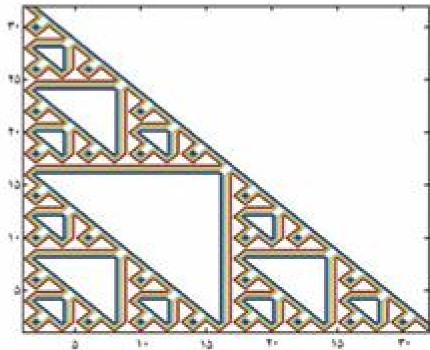
دورهٔ بیست و یکم • شمارهٔ ۴ • تابستان ۱۳۹۱ • ۶۴ صفحه • ۵۵۰۰ ریال

۷۸

رشد برهان

ریاضی متوسطه





هم‌نهشتی

معادله‌های کلاسیک

رمزنگاری و رمزگشایی

بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا

۲۱ روش برای حل معادلهٔ درجه سوم و کاربردهای آن‌ها





وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی



برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست‌ویکم ✦ شمارهٔ ۴ ✦ تابستان ۱۳۹۱

◆ **وبگاه:** www.roshdmag.ir
◆ **پیام‌نگار:** Borhan@roshdmag.ir
◆ **پیام‌گیر نشریات رشد:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
◆ **نشانی دفتر مجله:** تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎ **تلفن دفتر مجله:** ۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
☎ **تلفن امور مشترکین:** ۰۲۱ ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۷۷۳۳۶۶۵۶

◆ **شمارگان:** ۱۳/۰۰۰ نسخه
◆ **چاپ:** شرکت افست (سهامی عام)

در این شماره می‌خوانید:

مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه های زیر به همکاری دعوت می کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

مسئله من، مسئله شما

وارد کلاس که شدم، به دانش آموزانم گفتم: «امروز می‌خواهم در طول مدتی که درس می‌دهم، کسی چیزی یادداشت نکند. فقط زمانی که من تعیین می‌کنم حق دارید بنویسید و یادداشت بردارید. می‌خواهم ببینم چقدر روی موضوعات مطرح شده در کلاس تمرکز دارید و تا چه حد می‌توانید از حافظه خودتان استفاده کنید و این‌که چیزی یا مطلبی را که فهمیده‌اید به زبان خودتان بنویسید و البته طوری که هر دانش آموز دیگری با خواندن آن مطلب، منظور شما را درک کند!

کلاس درس را با این درخواست از بچه‌ها و طرح یک مسئله خاص در یک زمینهٔ معین شروع کردم، نکته یا قضیه‌ای را مطرح کردم و پس از شکافتن همهٔ ابعاد آن قضیه، به عنوان کاربرد، مسئله را طرح و حل کردم و از بچه‌ها خواستم برداشت خودشان از آن قضیه را نوشته و شرایط برقراری قضیه را یادداشت کنند و سپس مسئله‌ای شبیه به آن مسئله را خودشان طرح کنند و به حل آن بپردازند. مسئلهٔ دیگری طرح کردم و از یک زاویهٔ دیگر به قضیه نگاه کردم و پس از حل مسئله (البته با مشارکت بچه‌ها)، مجدداً از بچه‌ها خواستم تا مسئله‌ای شبیه به مسئلهٔ حل شده را طرح و حل کنند. بچه‌ها علاقه‌مند شده بودند و به‌خصوص چون خودشان مسئله را طرح می‌کردند، با علاقه به حل آن مشغول می‌شدند. اتفاقات جالبی در کلاس رخ داد؛ مثلاً این‌که در آن کلاس که ۲۷ نفر دانش آموز داشتم، ۲۷ مسئله که همگی حداقل در اعداد و ارقام با هم فرق داشتند طرح و حل شد. دیگر این‌که بعضی از دانش آموزانِ مستعدتر مسائلی را طرح کردند که شباهتی به مسئلهٔ طرح شده از طرف من، نداشت و واقعاً از یک زاویه جدید به قضیه و کاربرد آن نگاه کرده بودند که وقتی این مسائل را می‌دیدم از آن‌ها می‌خواستم تا پای تابلو آمده و مسئله‌شان را برای دیگران مطرح کنند و خودشان نیز به حل آن بپردازند تا هم به نوعی دیگر فکرکردن را به بچه‌ها آموزش داده باشم و هم بچه‌های دیگر تشویق شده و فقط در قالبی که من مسئله طرح کرده بودم، فکر نکنند و توان طرح مسائلی جدید را در خود ایجاد کنند.

دوستان خوب من، شاید معلمان محترم شما به دلایل بسیار از جمله کمبود وقت و یا حجم بالای درس و موقعیت کلاس به لحاظ تعداد دانش آموزان و توان علمی آن‌ها نتوانند از این شیوه استفاده کنند، ولی شما خودتان خارج از کلاس درس و در منزل می‌توانید با این شیوه درس بخوانید و با نگاهی عمیق‌تر به مسائل و قضیه‌ها و موضوعات تدریس شده، مسائلی متنوع و جالب برای خودتان و حتی دوستانتان طرح کنید و با استفاده از رهنمودهای معلمان و منابع کمک آموزشی مسائل مهم و حتی کاربردی، طرح و در یک دفتر یادداشت کنید.

اگر در این زمینه فعال شدید و با این شیوه به نتایج مثبتی دست پیدا کردید، با ما ارتباط داشته باشید و نتایج را برای ما ارسال کنید. حتی مسائلی را که خودتان طرح کرده‌اید برای مجله و به نشانه مجله بفرستید تا به اسم خودتان آن‌ها را چاپ کنید و دوستان دیگر شما در سراسر کشور عزیزمان از آن‌ها استفاده کنند. منتظر نامه‌های شما هستیم. ان‌شاءا...

در پناه خداوند تبارک و تعالی، همیشه مؤید و پیروز باشید.

سردبیر

آموزش

خم‌ها

غلامرضا یاسی‌پور

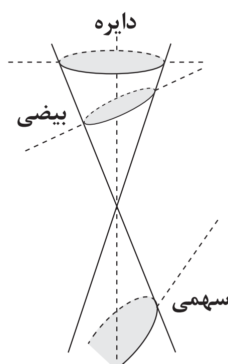
کلیدواژه‌ها:
خم، منحنی، خم کلاسیک، مقاطع مخروطی، مارپیچ، مارپیچ لگاریتمی، خم جبری، خم ژوردان، خم فضا ـ پرکننده

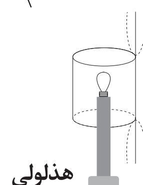
ترسیم یک خم یا منحنی[۱] آسان است. نقاش‌ها همــواره آن را انجام می‌دهند؛ آرشـیتکت‌ها گستره‌ای از ساختمان‌های جدید را در خم‌های هلالی یا منحنــی مدرن قــرار می‌دهند؛ بازیکن بیسبال، توپی را خمیده می‌اندازد؛ ورزشکاران در زمین بازی از مســیر خم‌دار می‌گذرند و هنگامی‌که توپی را شــوت می‌کنند، توپ در یک مســیر خم‌دار حرکت می‌کند. اما، اگر از ما بپرســند «خم چیســت؟» پاسخ آن‌قدرها هم ساده نیست.

ریاضی‌دان‌ها قرن‌هاست که خم‌ها را از دیدگاه‌های بسیار مورد مطالعه قرار داده‌اند. این بررســی با یونانیان آغاز شــد و خم‌های مــورد مطالعهٔ آنان، امروزه به خم‌های «کلاســیک» موسوم‌اند.

خم‌های کلاسیک

اولیــن خانــواده در قلمرو خم‌های کلاســیک، خم‌هایی هســتند که آن‌ها را مقاطع مخروطی[۲] می‌نامیم. اعضای این خانواده عبارت‌اند از دایره[۳]، بیضی[۴]، سهمی[۵] و هذلولی[۶]. مخروط ساخته شده از مخروط دوبل، یعنی دو بستنی قیفی را که به هم وصل شده باشــند و یکی از آن‌ها سروته قرار گرفته باشد، در نظر بگیرید. با بریدن این شکل، بسته به وضعیــت صفحه با محــور قائم مخــروط، صفحــه‌ای مســطح همچــون دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی پدید خواهد آمد.





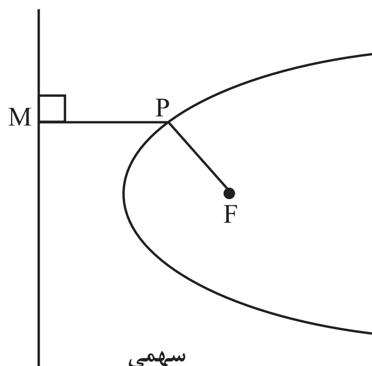
می‌توانیــم مخروطی را به صورت تصویر یک دایره بر یک پــرده تصور کنیم. پرتوهای نورانی از لامپ واقع در یک آباژور استوانه‌ای، مخروط دوگانه‌ای تشکیل می‌دهند که در آن چراغ تصاویری از بالا و پایین لبه‌های دایره‌ای آباژور می‌اندازد. تصویر واقع بر سقف یک دایره است، اما چون چراغ را یک بر کنیم، این دایره تبدیل به بیضی می‌شــود. از طرف دیگر، تصویر بر دیوار خمی دو بخشی، یعنی هذلولی را به‌دست می‌دهد.

مخروطی‌ها را می‌تــوان از طریق حرکت نقطه بر صفحه نیز توصیف کرد. این روش موسوم به روش «مکان هندسی»[۷] محبوب یونانیان است و برخلاف تعریف تصویری مخروطی، با طول سروکار دارد. اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت همواره یکسان بماند، دایره به‌دست می‌آوریم. اگــر نقطه چنان حرکت کند که مجموع فواصلش از دو نقطهٔ ثابت (کانون‌ها) مقداری ثابت باشــد، بیضی حاصل می‌شــود (آن‌جا که دو کانون یکی شوند، بیضی تبدیل به دایره می‌شود). بیضی سرنخ حرکت سیّارات است. در ۱۶۰۹، یوهانس کِپلر[۸]، ستاره‌شناس آلمانی، با ردکردن ایدهٔ قدیمی مدارهای دایره‌ای، اعلام کرد که سیارات پیرامون خورشید در مسیر بیضی شکل حرکت می‌کنند.

امــا اگر نقطه‌ای چنان حرکت کند کــه فاصله‌اش از یک نقطه (کانون[۹] F) برابر فاصلهٔ قائمش از خطی معلوم (هادی)[۱۰] باشد، آن‌قدرها آشکار نیست. در این حالت سهمی را به‌دست

ژاکوب بِرنولی از ریاضی‌دانان مشهور سوئیس، به قدری شیفتهٔ مارپیچ لگاریتمی بود که دوست داشت آن را بر آرامگاهش در باسل کنده‌کاری کنند

می‌آوریم. سـهمی ویژگی‌هایـی دارد. اگر یک منبع نورانی در کانون F قرار گیرد، تمام پرتوهای نورانی انتشـار یافته موازی PMاند. از طرف دیگر، اگر سیگنال‌های تلویزیون از ماهواره‌ای فرسـتاده شـوند با دیش دریافت‌کنندهٔ سهمی‌شکل برخورد کنند، در کانون جمع می‌شوند و به تلویزیون می‌رسند.

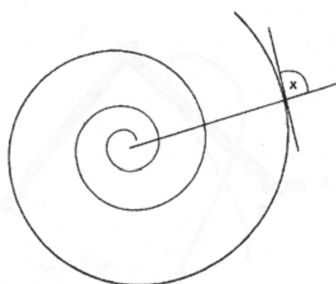


سهمی

اگر تکه چوبی را حول نقطه‌ای دوران دهیم، هر نقطهٔ ثابت واقـع بر آن، یک دایره را می‌پیمایـد، اما اگر بگذاریم علاوه بر دوران چـوب، نقطه‌ای در امتـداد آن حرکت کند، نقطهٔ مورد بحث یک مارپیچ[۱۱] تولید می‌کنـد. فیثاغورس به این مارپیچ علاقهٔ بسیار داشـت. قرن‌ها بعد، لئوناردو داوینچی ده سال از عمر خود را صرف بررسـی انواع متفاوتشان کرد، در حالی‌که رِنه‌دِکارت[۱۲] رسـاله‌ای دربارهٔ آن‌ها نوشت. مارپیچ لگاریتمی[۱۳] به مارپیچ متساوی‌الزّوایا[۱۴] نیز موسوم است، زیرا با یک شعاع و مماس در نقطهٔ برخورد آن شعاع و مارپیچ، زوایای برابر تشکیل می‌دهد.

ژاکوب بِرنولی[۱۵] از ریاضی‌دانان مشهور سوئیس، به قدری شـیفتهٔ مارپیـچ لگاریتمی بود که دوسـت داشـت آن را بر آرامگاهش در باسل[۱۶] کنده‌کاری کنند. ایمانوئل سوئدنبورگ[۱۷]، «مرد رُنِسـانس»، مارپیچ مـورد بحث را کامل‌ترین اشـکال می‌دانسـت. یـک مارپیچ سـه‌بُعدی که به دور یک اسـتوانه می‌پیچد، به مارپیچ حلزونی[۱۸] موسـوم اسـت. دو مورد از این مارپیچ‌ها، یعنی حلزونی‌های دوگانه، سـاختار اصلی DNA را تشکیل می‌دهند.

بسیاری از خم‌های کلاسیک، همچون حلزونی[۱۹]، پروانه[۲۰] و بیضی شـکل[۲۱]های گوناگـون، موجودند. دلـوار[۲۲] نام خود را از شـبیه قلب بودن گرفته اسـت. خم زنجیره‌ای[۲۳] موضوع تحقیق در قرن هجدهم بود و به عنوان خم سـاخته شـده از زنجیری آویزان بین دو نقطه شناخته می‌شد. خم زنجیره‌ای، خـم موجـود در پل‌هـای معلقِ آویـزان بیـن دو دکل قائم است.



مارپیچ‌لگاریتمی

یکی از موارد تحقیق خم‌ها در قرن نوزدهم، خم‌هایی بود که میله‌های مکانیکی ایجاد می‌کردند. مسـائلی از این دست، طرح مسئله‌ای بود که جیمز وات[۲۴] مهندس اسکاتلندی، به‌طور تقریبی آن‌ها را حل کرده بود؛ میله‌های متصل به یکدیگر برای تبدیل حرکت دایره‌ای[۲۵] به حرکت خطی[۲۶]. گام مزبور در عصر بخار گامی مهم به سمت جلو بود.

ساده‌ترین این ابزارهای مکانیکی، حرکت سه میله است که در آن میله‌ها در مکان‌های ثابتی واقع در انتهای هر یک به‌هم وصل شده‌اند. اگر «میلهٔ اتصال»، PQ در هر طرف حرکت کند، مشخص می‌شود که مکان هندسی نقطه‌ای واقع بر آن، خمی از درجهٔ شش، یعنی خم مسدّسی یا درجه شش[۲۷] است.

خم‌های جبری

اینک، پیـرو کارهای دِکارت، که بـا معرفی مختصات x، y، z و محورهـای دکارتـی[۲۸] (به نام خـود او) که انقلابی در هندسـه به وجود آورد، مقاطع مخروطی می‌توانسـتند مانند معادلات جبری مورد بررسـی قرار گیرند. برای مثال، دایره‌ای به شعاع ۱ دارای معادلهٔ

$x^2+y^2=1$

اسـت که مانند جمیـع مخروطی‌ها، معادلـه‌ای از درجهٔ دوم است. به این ترتیب، شاخهٔ جدیدی از هندسه، موسوم به هندسهٔ جبری[۲۹] بالیدن گرفت.

ایزاک نیوتون در یک بررسی عمده، خم‌هایی را که با معادلات درجهٔ سوم یا خم‌های مکعبی تعریف می‌شدند، دسته‌بندی کرد. به این ترتیب، با مقایسـه با چهار مخروط اساسی، ۷۸ نوع خم یافت شد که در پنج دسته یا رده گروه‌بندی شدند. انواع مختلف خم‌های درجه چهار[۳۰] آن‌قدر زیاد و ادامه‌دار است که دسته‌بندی کامل هیچ‌گاه انجام نگرفته است.

اما بررسـی خم‌ها به عنوان معادلات جبری، تمام داستان نیست، زیرا خم‌های بسیاری از قبیل زنجیره‌ای‌ها، سیکلوئیدها یا چرخ‌زادها[۳۱] (خم‌هایی که نقطه‌ای واقع بر چرخی دوران کننده

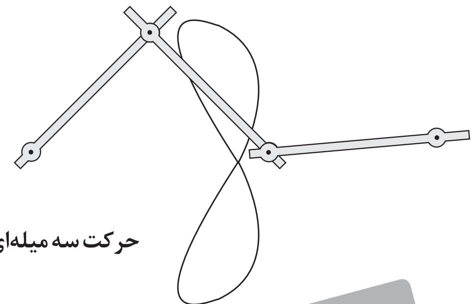
می‌پیماید) و مارپیچ‌ها را به سادگی نمی‌توان در قالب معادلات جبری بیان کرد.

یک تعریف

آنچه ریاضی‌دان‌ها به دنبالش بودند، تعریف خود خم بود، نه فقط مثال‌های خاصی از آن. کَمیل ژوردان[۳۲] نظریهٔ خم‌هایی را مطرح کرد که بر تعریف یک خم، برحسب نقطه‌های متغیر بنا شده بود.

در این مورد مثالی می‌آوریم. اگر فرض کنیم $x=t^2$ و $y=2t$، در آن صورت به ازای مقادیر مختلف t، نقاط بسیاری به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم به صورت مختصات (x, y) بنویسیم. برای نمونه، اگر t=۰، نقطهٔ (۰، ۰) به‌دست می‌آید؛ t=۱، نقطهٔ (۲، ۱) را می‌دهد؛ و همین‌طور تا آخر. اگر این نقاط را بر محورهای y-x رسم کنیم (نقطه‌ها را به هم وصل کنیم) یک سهمی به‌دست می‌آید. ژوردان ایدهٔ نقاط ردیابی شدهٔ مورد بحث را اصلاح کرد. از نظر وی، این روش، روش تعریف یک خم به‌شمار می‌رفت.

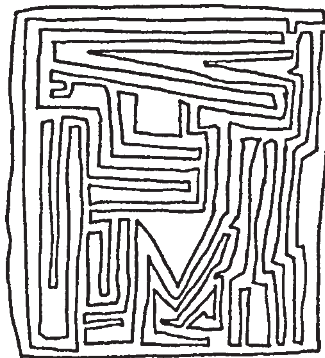
خم‌های ژوردان می‌توانند، حتی زمانی که شبیه دایره‌اند، از این جهت پیچیده و تودرتو باشند که «ساده»اند (یعنی خودشان را قطع نمی‌کنند) و«بسته»اند (یعنی آغاز و انجام ندارند). قضیهٔ معروف ژوردان معنادار است، چون بر این پایه



حرکت سه میله‌ای

است که یک خم ساده و بسته، درون و برون دارد و وضوح ظاهری‌اش گول‌زننده است.

در ایتالیا، جوزپه پئانو[۳۳]، در سال ۱۸۹۰ نشان داد که طبق تعریف ژوردان، یک مربع پُر ـ درون یک خم است. او با ارائهٔ این نظریه، شور و هیجانی به‌وجود آورد. وی توانست نقاطی را بر یک مربع چنان قرار دهد که همهٔ آن‌ها بتوانند «ردیابی شوند» و در همان حال از تعریف ژوردان پیروی کنند. این خم که به خم فضا ـ پرکننده موسوم شد رخنه‌ای در تعریف ژوردان به‌وجود آورد، زیرا روشن است که مربع در مفهوم قراردادی، خم نیست.



یک خم ساده و بستهٔ ژوردان

مثال‌های خم‌های فضا ـ پرکننده و دیگر مثال‌های نامعقول، به این انجامید که بار دیگر ریاضی‌دان‌ها به تختهٔ رسم برگردند و در مورد پایه‌های نظریهٔ خم‌ها بیندیشند. به این ترتیب، پرسشی اساسی دربارهٔ تعریف بهتری از یک خم مطرح شد. این کار در آغاز قرن بیستم، ریاضیات را به حوزهٔ جدید توپولوژی[۳۴] کشاند.

چند تاریخچه

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: اقلیدس به تعریف مقاطع مخروطی پرداخت.

حدود ۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس دربارهٔ مارپیچ‌ها تحقیق کرد.

حدود ۲۲۵ قبل از میلاد: آپولونیوس پرگایی[۳۵] مخروطیات[۳۶] را انتشار داد.

۱۷۰۴ میلادی: نیوتن خم‌های مکعبی را دسته‌بندی کرد.

۱۸۹۰ میلادی: پئانو[۳۷] ثابت کرد یک مربع صلب[۳۸] یک خم است (خم فضا ـ پرکننده).

دههٔ ۱۹۲۰ میلادی: مِنگر[۴۰] و یوریسُن[۴۰] خم‌ها را به عنوان بخشی از توپولوژی تعریف کردند.

پی‌نوشت ....

1. curve
2. conic sections
3. circle
4. ellipse
5. parabola
6. hyperbola
7. locus
8. Johannes Kepler
9. focus
10. directrix
11. spiral
12. René Descartes
13. logarithmic spiral
14. equiangular
15. Jacob Bernoulli
16. Basle
17. Emanuel Swedenborg
18. helix
19. limaçon
20. lemniscate
21. oval
22. cardioid
23. catenary curve
24. James Watt
25. circular motion
26. linear motion
27. sextic curve
28. Cartesian axes
29. algebraic geometry
30. quartic curves
31. cycloids
32. Camile Jordan
33. Giuseppe Peano
34. topology
35. Apollonius of Perga
36. Conics
37. Peano
38. solid square
39. Menger
40. Urysohn

آموزش

همنهشتی ۱

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها: پیمانه، رابطهٔ هم‌ارزی، کلاس هم‌ارزی، انعکاسی، تقارنی، تعدّی، معادلهٔ سیّاله، معادلهٔ هم‌نهشتی.

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح و m عددی طبیعی باشد، در این صورت می‌گوییم a و b به پیمانهٔ m با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ هرگاه، (a-b) بر m بخش‌پذیر باشد یا $m|(a-b)$، یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b \text{ یا } a-b = mk \quad (k \in Z)$$

مثال: دو عدد ۶۵ و ۳۷ به پیمانهٔ ۷ با یکدیگر هم‌نهشت‌اند، زیرا $۷|(۶۵-۳۷) = ۲۸$.

مثال: اگر $۱۲ \overset{p}{\equiv} ۷۲$ و p عددی اول باشد، در این صورت داریم:

$$۱۲ \overset{p}{\equiv} ۷۲ \to p|۱۲-۷۲ \to p|-۶۰ \to p=۲ \text{ یا } p=۳ \text{ یا } p=۵$$

قضیه: رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

این قضیه گویای این مطلب است که رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی (ترایایی) دارد:

اثبات:

$$I)\forall a \in Z, m|a-a \to a \overset{m}{\equiv} a$$

$$II)\forall a,b \in Z, a \overset{m}{\equiv} b \to m|a-b \to m|b-a \to b \overset{m}{\equiv} a$$

$$III)\forall a,b,c \in Z, a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{m}{\equiv} c \to m|b-a, m|b-c \to m|(a-b)+(b-c) \to m|a-c \to a \overset{m}{\equiv} c$$

تذکر مهم: چون رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است، لذا این رابطه Z را به m کلاس هم‌ارزی به‌صورت زیر افراز می‌کند.

$$[۰]_m = \{x \in Z | x \overset{m}{\equiv} ۰\} = \{x \in Z | x = mk\}$$

$$[۱]_m = \{x \in Z | x \overset{m}{\equiv} ۱\} = \{x \in Z | x = mk+۱\}$$

$$\vdots$$

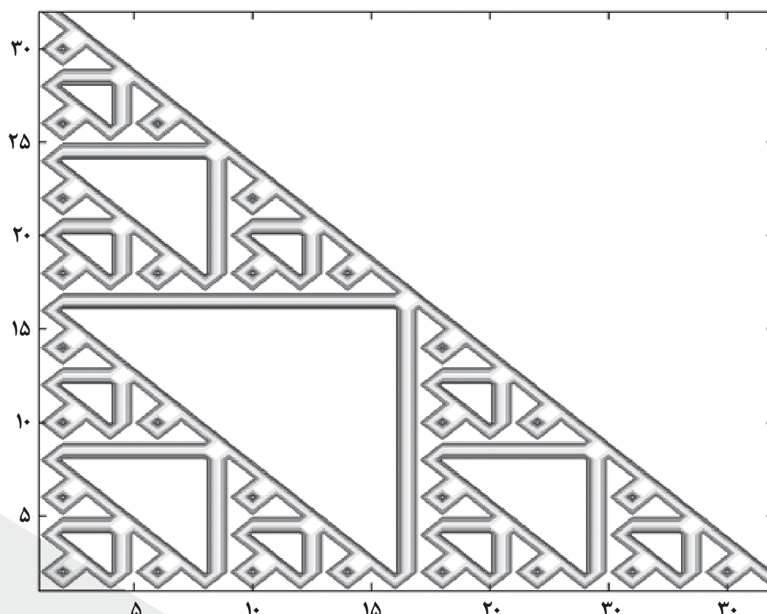
$$[m-۱]_m = \{x \in Z | x \overset{m}{\equiv} m-۱\} = \{x \in Z | x = mk+(m-۱)\}$$

توجه داریم که از تعریف کلاس‌های هم‌ارزی و خواص آن‌ها و نیز تعریف افراز نتیجه می‌شود که:

I) هیچ دو کلاس هم‌ارزی عضو مشترک ندارند.

II) هر دو عضو یک کلاس هم‌ارزی به پیمانهٔ m با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و به عکس، اگر دو عدد صحیح به پیمانهٔ m با یکدیگر هم‌نهشت باشند این دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند و باقی‌مانده‌های تقسیم آن‌ها بر m مساوی‌اند.

III) $[a]_m = [a+mk]_m \quad (k \in Z)$



۱. عدد ۱۳۹۱ به کدام دسته یا کلاس هم‌ارزی به پیمانهٔ ۷ تعلق دارد؟

۱) ۴۴

۲) ۱۲۲

۳) ۲۹۶-

۴) ۱۰۱

حل: گزینهٔ (۳)

$$\left.\begin{array}{r} -۲۹۶ = ۷(-۴۳) + ۵ \\ ۱۳۹۱ = ۷(۱۹۸) + ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۳۹۱ \overset{m}{\equiv} -۲۹۶$$

۲. در صورتی که داشته باشیم $[۷x+۲]_۴ = [۶x-۳]_۴$، کدام گزینه درست است؟

۱) $x = ۵k+۱$ ۲) $x = ۴k+۱$ ۳) $x = ۴k+۲$ ۴) $x = ۴k+۳$

حل: گزینهٔ (۴)

$$[۷x+۲]_۴ = [۶x-۳]_۴ \to ۷x+۲ \overset{۴}{\equiv} ۶x-۳ \to ۷x-۶x \overset{۴}{\equiv} -۳-۲ \to x \overset{۴}{\equiv} -۵ \overset{۴}{\equiv} ۳ \to x = ۴k+۳$$

ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow ka \overset{|k|m}{\equiv} kb$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \to ac \overset{m}{\equiv} bc$

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n \ (n \in N)$

۵) $a \overset{m}{\equiv} b, n|m \to a \overset{n}{\equiv} b$

۶) $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \to a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d, a \pm d \overset{m}{\equiv} b \pm c$

۷) $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \to ac \overset{m}{\equiv} bd, ad \overset{m}{\equiv} bc$

۸) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b \to a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

(نتیجهٔ ۸) $a \overset{m}{\equiv} b, a \overset{n}{\equiv} b, (m,n) = ۱ \to a \overset{mn}{\equiv} b$

۹) $a \overset{m}{\equiv} b, b \overset{n}{\equiv} c \to a \overset{(m,n)}{\equiv} c$

اگر a را بر m تقسیم کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم r باشد، در این صورت (a، یعنی مقسوم، با باقی‌مانده، به پیمانهٔ مقسوم‌علیه، یعنی m هم‌نهشت است).

۱۱) $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

(به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از دو طرف کم کرد).

(حالت خاص ۱۱) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{t=۰} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$

(می‌توانیم فقط به یک طرف رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کنیم).

۱۲) $a \overset{m}{\equiv} b \to (a,m) \overset{m}{\equiv} (b,m)$

۱۳) $ab \overset{m}{\equiv} ac, (a,m) = d \to b \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} c$

(نتیجهٔ ۱۳) $ab \overset{m}{\equiv} ac, (a,m) = ۱ \to b \overset{m}{\equiv} c$

قضیهٔ اصلی هم‌نهشتی‌ها: شرط لازم و کافی برای این‌که $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد آن است که باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m، مساوی باشند، یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow \begin{cases} a = mq_۱ + r \\ b = mq_۲ + r \end{cases}$$

مثال‌ها و مسائل مهم

مثال ۱: عدد ۱۳۹۲ به پیمانهٔ ۱۴ با کدام عدد هم‌نهشت است؟

حل: کافی است عدد ۱۳۹۲ را بر ۱۴ تقسیم کنیم. طبق ویژگی ۱۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم جواب مسئلهٔ ماست.

$$1392 = 14\times 99 + 6 \to 1392 \equiv 6$$

مثال ۲: اگر $a \overset{7}{\equiv} -11$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ را بیابید.

حل: طبق ویژگی ۱۱ و حالت خاص آن کافی است دو برابر پیمانه را به ۱۱- اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$a \overset{7}{\equiv} -11 \to a \overset{7}{\equiv} -11+14 \to a \overset{7}{\equiv} 3 \to 7|a-3 \to a-3 = 7k \to a = 7k+3 \to r = 3$$

مسئلهٔ ۱: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 49^{1391}\times 102$ را بر ۲۴ بیابید.

$$49 \overset{24}{\equiv} 1 \to 49^{1391} \overset{24}{\equiv} 1 \to 49^{1391}\times 102 \overset{24}{\equiv} 102 \overset{24}{\equiv} 6 \to r = 6$$

مسئلهٔ ۲: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 59^{1391}\times 7 - 290$ را بر ۲۸ بیابید.

$$59 \overset{28}{\equiv} 3 \to 59^{1391} \overset{28}{\equiv} 3^{1391}, 3^3 \overset{28}{\equiv} -1, 1391 = 3\times 463 + 2 \to (3^3)^{463}\times 3^2 \overset{28}{\equiv} (-1)^{463}\times 3^2 \to 3^{1391} \overset{28}{\equiv} -9$$

$$\to 3^{1391}\times 7 \overset{28}{\equiv} -9\times 7 = -63 \overset{28}{\equiv} 21 \to 3^{1391}\times 7 \equiv 21, 290 \overset{28}{\equiv} 10 \to 3^{1391}\times 7 - 290 \overset{28}{\equiv} 21 - 10 = 11 \to r = 11$$

مسئلهٔ ۳: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 53^{2013}\times 48 - 52^{2011}\times 9$ را بر ۱۷ بیابید.

$$53 \overset{17}{\equiv} 2, 2^4 \overset{17}{\equiv} -1, 2013 = 503\times 4 + 1 \to (2^4)^{503}\times 2^1 \overset{17}{\equiv} (-1)^{503}\times 2 = -2, 48 \overset{17}{\equiv} 14 \overset{17}{\equiv} -3 \to 2^{2013}\times 48 \overset{17}{\equiv} (-2)\times(-3) = 6$$

$$52 \overset{17}{\equiv} 1 \to 52^{2011} \overset{17}{\equiv} 1^{2011} \to 52^{2011}\times 9 \overset{17}{\equiv} 1\times 9 = 9 \to A \overset{17}{\equiv} 6 - 9 = -3 \overset{17}{\equiv} 14 \to r = 14$$

قضیه‌های مهم و کاربردی

قضیهٔ اویلر: اگر a عددی صحیح و $(a,m) = 1, m \in N$ در این صورت $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$

یادآوری: $\varphi(m)$ همان تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی m است که نسبت به m اول‌اند و اگر $m = p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times\dots\times p_n^{k_n}$ تجزیه‌ای استاندارد برای m باشد، در این صورت $\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_n})$.

مسئلهٔ ۴: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 17^{1202}\times 9$ را بر ۳۶ بیابید.

قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $(a,p) = 1, a \in Z$ در این صورت، $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.

(اگر در قضیهٔ اویلر به جای m عدد p قرار دهیم با توجه به این‌که اگر p اول باشد $\varphi(p) = p-1$، حکم به‌دست می‌آید)

نتیجهٔ قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد و $a \in Z$، در این صورت $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

مسئلهٔ ۵: باقی ماندهٔ تقسیم عدد $A = 17^{2001} - 19^{2002}$ را بر ۱۰۱ بیابید.

۱۰۱ اول است, $(101,17) = 1$, $(101,19) = 1$ → فرما $17^{100} \overset{101}{\equiv} 1, 19^{100} \overset{101}{\equiv} 1 \to (17^{100})^{20}\times 17 \overset{101}{\equiv} 1^{20}\times 17 = 17$

$$(19^{100})^{20}\times 19^2 \overset{101}{\equiv} 1^{20}\times 19^2, 19^2 = 361 \overset{101}{\equiv} 58 \to A \overset{101}{\equiv} 17 - 58 = -41 \overset{101}{\equiv} 60 \to r = 60$$

مسئلهٔ ۶: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{66} k^{16} + \sum_{k=1}^{39} k^{17}$ را بر ۱۷ بیابید.

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} = 1^{16} + 2^{16} + \dots + 17^{16} + \dots + 34^{16} + \dots + 51^{16} + \dots + 66^{16}$$

(چون ۱۷ اول است، هر عددی که مضرب ۱۷ نباشد نسبت به ۱۷ اول است).

$$\sum_{k=1}^{66} k^{16} \overset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+\dots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\dots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\dots+1}_{16} + 0 + \underbrace{1+\dots+1}_{15}, 16 \overset{17}{\equiv} -1, 15 \overset{17}{\equiv} -2 \to \sum_{k=1}^{66} k^{16} \overset{17}{\equiv} -1-1-1-2 = -5$$

$$\sum_{k=1}^{66} k^{17} = 1^{17} + 2^{17} + \dots + 39^{17} \overset{17}{\equiv} 1 + 2 + \dots + 39 = \frac{39\times 40}{2} = 39\times 20 \overset{17}{\equiv} 5\times 3 = 15 (39 \overset{17}{\equiv} 5, 20 \overset{17}{\equiv} 3)$$

$$\to A \overset{17}{\equiv} -5 + 15 = 10 \to r = 10$$

مسئلهٔ ۷: اگر a، b و c مضرب ۷ نباشند باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = a^{۱۳۹۲} + ۲b^{۱۳۹۲} - ۴c^{۱۳۹۲}$ را بر ۷ بیابید.

$(۷, a) = ۱ \rightarrow$ فرما $a^{۶} \overset{۷}{\equiv} ۱ \rightarrow (a^{۶})^{۲۳۲} \overset{۷}{\equiv} ۱ \rightarrow a^{۱۳۹۲} \overset{۷}{\equiv} ۱$

و به همین ترتیب $b^{۱۳۹۲} \overset{۷}{\equiv} ۱$ و $c^{۱۳۹۲} \overset{۷}{\equiv} ۱$؛ بنابراین:

$A \overset{۷}{\equiv} ۱ + ۲\times ۱ - ۴\times ۱ = -۱ \overset{۷}{\equiv} ۶ \rightarrow r = ۶$

قضیهٔ ویلسون: اگر p عددی اول باشد، در این صورت، $(p-۱)! \overset{p}{\equiv} (-۱)$.

مسئلهٔ ۸: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۱۸! \times ۹۰$ را بر ۱۹ بیابید.

۱۹ اول است $\rightarrow$ ویلسون $(۱۹-۱)! \overset{۱۹}{\equiv} (-۱) \rightarrow ۱۸! \overset{۱۹}{\equiv} -۱, ۹۰ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۴ \rightarrow ۱۸! \times ۹۰ \overset{۱۹}{\equiv} (-۱)\times ۱۴ = -۱۴, -۱۴ \overset{۱۹}{\equiv} ۵ \rightarrow r = ۵$

قوانین یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی بر ۲، ۳، ۴، ۵ و...

اگر $A = \overline{a_{n-۱}a_{n-۲}...a_۲a_۱a_۰}$ عددی n رقمی و بسط عدد A در مبنای ۱۰ به شکل زیر مفروض باشد، داریم:

$A = ۱۰^{n-۱}a_{n-۱} + ۱۰^{n-۲}a_{n-۲} + ... + ۱۰^{۲}a_۲ + ۱۰a_۱ + a_۰$

I) بخش‌پذیری و باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۳ و ۹

$۱۰ \overset{۹,۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{k \in Z} ۱۰^{k} \overset{۹,۳}{\equiv} ۱ \rightarrow A \overset{۹,۳}{\equiv} ۱\times a_{n-۱} + ۱\times a_{n-۲} + ... + ۱\times a_۲ + ۱\times a_۱ + a_۰ \rightarrow A \overset{۹,۳}{\equiv} (a_{n-۱} + a_{n-۲} + ... + a_۲ + a_۱ + a_۰)$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی مانند A بر ۳ و ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقامش بر ۳ و ۹ برابر است.

II) بخش‌پذیری بر ۴، ۸، ۱۶، ... و ۲^k

$۱۰ \overset{۴}{\equiv} ۲, ۱۰^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۰ \xrightarrow{k \geq ۲} ۱۰^{k} \overset{۴}{\equiv} ۰ \rightarrow A \overset{۴}{\equiv} \overline{a_۱a_۰}\ (۴ = ۲^۲), ۱۰^{۳} \overset{۸}{\equiv} ۰ \xrightarrow{k \geq ۳} ۱۰^{k} \overset{۸}{\equiv} ۰ \rightarrow A \overset{۸}{\equiv} \overline{a_۲a_۱a_۰}\ \ (۸ = ۲^۳)$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۲^k با باقی‌ماندهٔ تقسیم k رقم سمت راست A بر ۲^k برابر است،یعنی:

$A \overset{۲^k}{\equiv} (\overline{a_{k-۱}a_{k-۲}...a_۲a_۱a_۰})$

III) بخش‌پذیری بر ۱۱

$$۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \rightarrow \begin{cases} ۱۰^{k} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ & (k = ۲n) \\ ۱۰^{k} \overset{۱۱}{\equiv} -۱ & (k = ۲n+۱) \end{cases}$$

$A = a_۰ + ۱۰a_۱ + ۱۰^{۲}a_۲ + ... + ۱۰^{n-۱}a_{n-۱} \rightarrow A \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - a_۳ + ... + (-۱)^{n-۱}a_{n-۱}$

تمرین: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۹۴۹۸۳۲۴۲۵۶$ را بر ۱۱ بیابید.

$۱۰ \overset{۵,۲}{\equiv} ۰ \xrightarrow{k \in N} ۱۰^{k} \overset{۵,۲}{\equiv} ۰ \rightarrow A \overset{۵,۲}{\equiv} a_۰ + ۰\times a_۱ + ... + ۰\times a^{n-۱} \rightarrow A \overset{۵,۲}{\equiv} a_۰$

(یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲ و ۵، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ و ۵). $۴۹۵۴۳۸۷ \overset{۲}{\equiv} ۱$ و $۴۹۵۴۳۸۷ \overset{۵}{\equiv} ۱$

IV) بخش‌پذیری بر ۱۰ و یافتن رقم یکان اعداد توان‌دار

$۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \xrightarrow{k \in N} ۱۰^{k} \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} a_۰ \quad (a_۰ < ۱۰)$

(یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۱۰، برابر است با رقم یکانش).

قضیه: شرط لازم و کافی برای $A \overset{۱۰}{\equiv} B$ آن است که رقم یکان A و B برابر باشد.

۳. اگر دو عدد $(۴a + ۲)$ و $(۵a + ۳)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۷a + ۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۱)؛ زیرا طبق قضیهٔ قبل، این دو عدد به پیمانهٔ ۱۰ با یکدیگر هم‌نهشت‌اند و داریم:

$۵a + ۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a + ۲ \rightarrow ۵a - ۴a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ - ۵ \rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} -۳, -۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۷$ رقم یکان a، ۷ است

$a \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \rightarrow ۷a + ۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۷\times ۷ + ۲ = ۵۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱$

(پس رقم یکان عدد $۷a + ۲$ همان ۱ است).

رقم یکان اعداد توان‌دار به صورت A^n

I) اگر عدد A به ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم شود، در این صورت A^n نیز متناظراً به صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم می‌شود.

II) اگر عدد A به ۴ ختم شود، در این صورت برای هر n زوج عدد A^n به ۶ و برای هر n فرد به ۴ ختم می‌شود.

III) اگر عدد A به ۹ ختم شود، آن‌گاه برای هر n زوج عدد A^n به ۱ و برای هر n فرد به ۹ ختم می‌شود.

IV) برای یافتن رقم یکان اعدادی به صورت A^n که در آن‌ها عدد A به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم می‌شود از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه: رقم یکان توان‌های متوالی اعداد طبیعی هر ۴ بار یک مرتبه تکرار می‌شود، یعنی: $(n \in N)\ A^n \overset{۱۰}{\equiv} A^{n+۴}$

با توجه به قضیهٔ قبل برای یافتن رقم یکان عدد A^n کافی است n را بر ۴ تقسیم کنیم. اگر $n = ۴k + r$ و $r \neq ۰$ در این صورت $A^n = A^{۴k+r} \overset{۱۰}{\equiv} A^r \overset{۱۰}{\equiv} a_۰^r$ ($a_۰$ رقم یکان A است) و اگر $n = ۴k\ (r = ۰)$ در این صورت $A^n = A^{۴k} \overset{۱۰}{\equiv} A^۴ \overset{۱۰}{\equiv} a_۰^۴$ ($a_۰$ رقم یکان A است).

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد $۱۳۹۲^{۱۳۹۳} \times ۷$.

$۱۳۹۳ = ۴ \times (۳۴۸) + ۱ \to ۱۳۹۲^{۱۳۹۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۱ \to ۱۳۹۲^{۱۳۹۳} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \times ۷ = ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \to$ رقم یکان $= ۴$

مثال: مطلوب است رقم یکان عدد $A = ۴۹۹^{۱۳۴۲} \times ۶ + ۸۵۳^{۱۳۹۲} \times ۸$.

$۱۳۴۲ = ۲k \to ۴۹۹^{۱۳۴۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \to ۴۹۹^{۱۳۴۲} \times ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۶$

$۱۳۹۲ = ۴ \times ۳۴۸ \to ۸۵۳^{۱۳۹۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۴ = ۸۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \to ۸۵۳^{۱۳۹۲} \times ۸ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \times ۸ = ۸ \to A \overset{۱۰}{\equiv} ۶ + ۸ = ۱۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$

مثال: رقم یکان اعداد زیر را بیابید:

$I)\ A = ۲۱۶^{۶۱۲} - ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ + ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \times ۴ - ۵۹۴^{۷^۹} \times ۳$

$II)\ B = \sum_{k=۱}^{۱۳۹۲} k!$

$III)\ C = [۱ + ۳^{۱۳۹۲} + ۹^{۱۳۹۲} + ۲^{۱۳۹۲}]^{۱۳۹۲}$

$IV)\ D = ۴۵۳^{۲۰۱۳!+۳} + ۵۹۹^{۱۰۱!} \times ۴ - ۸۰۷^{۸۰۷!+۲۰۱!}$

حل:

$I)\ ۲۱۶^{۶۱۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۶$ و ۹۱۵ فرد است $\Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \times ۷ = ۶۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

$\Rightarrow ۵۱۹^{۹۱۵} \times ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳,\ ۳۹۳۱ = ۴k + ۳$

$\Rightarrow ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۳۹۳^{۳۹۳۱} \times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۸$

$۷^۹ = ۲k + ۱$ (فرد است) $\Rightarrow ۵۹۴^{۷^۹} \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵۹۴^{۷^۹} \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$

$\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۶ - ۳ + ۸ - ۲ = ۹ \Rightarrow$ رقم یکان A، ۹ است

$II)\ B = \sum_{k=۱}^{۱۳۹۲} k! = ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \ldots + ۱۳۹۲!$

$\Rightarrow B \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ + ۰ + ۰ + \ldots + ۰ = ۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \to$ رقم یکان B

(توجه دارید که $۴! = ۲۴$ و $۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$ برای هر $n \geq ۵$ همواره $n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ است).

$III)\ \underset{۱۴}{۲^{۱۳۹۲}} = ۲^{۴k} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow C \overset{۱۰}{\equiv} [۱ + ۱ + ۱ + ۶]^{۱۳۹۲} \equiv ۹^{۱۳۹۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$

$IV)\ n! \equiv ۰$ (برای هر $n \geq ۴$) و $k! = ۲n$ (برای هر $n \geq ۲$)

$\Rightarrow ۴۵۳^{۲۰۱۳!+۳} = ۴۵۳^{۴k+۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۷,\ ۵۹۹^{۱۰۱!} = ۵۹۹^{۲n} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$ (۱۰۱! زوج است)

$\Rightarrow ۵۹۹^{۱۰۱!} \times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴,\ ۸۰۷! = ۴k,\ ۲۰۱! = ۴k'$

$\Rightarrow ۸۰۷^{۸۰۷!+۲۰۱!} = ۸۰۷^{۴m} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۱$

$\Rightarrow D \overset{۱۰}{\equiv} ۷ + ۴ - ۱ = ۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \to$ رقم یکان

آموزش

رمزنگاری و رمزگشایی

سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi_moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل با مقدمه‌ای از رمزنگاری‌های متعارف در قرون گذشته به‌صورت توصیفی آشنا شدید. در این قسمت و قسمت‌های بعدی با اصول رمزنگاری و رمزگشایی‌های «تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم»، «رمزهای تک‌الفبایی مبتنی بر تبدیل‌های خطی» و «سیستم‌های چندحرفی» و... آشنا خواهید شد. در این قسمت به رمزهای تک‌الفبایی حاصل از الفبای متعارف مستقیم (رمز جای‌گذاری) می‌پردازیم. در آخر نیز برای آزمودن یافته‌ها، چند تمرین خواهیم آورد.

کلیدواژه‌ها:
پیام رمز، رمز جای‌گذاری، دنبالهٔ صریح، دنبالهٔ رمزی، رمزهای تک‌الفبایی، الفبای جای‌گذاری، عدد کلیدی، کلید رمز، فراوانی حروف.

گشودن الفباهای متعارفِ مستقیم از راه تکمیل دنبالهٔ صریح

اکنون که می‌دانیم چگونه می‌توان پیامی را با استفاده از یک الفبای متعارف مستقیم به رمز درآورد، گشایش رمز پیامی را که از این راه به رمز درآمده است، بررسی می‌کنیم. برای مثال، پیام زیر را در نظر می‌گیریم:

BPM VMOWBQIBQWVA NWZ I AMBBTMUMVB WN BPM ABZQSM IZM IB IV QUXIAAM ZMKWUUMVL EM QVKZMIAM WCZ WNNMZ

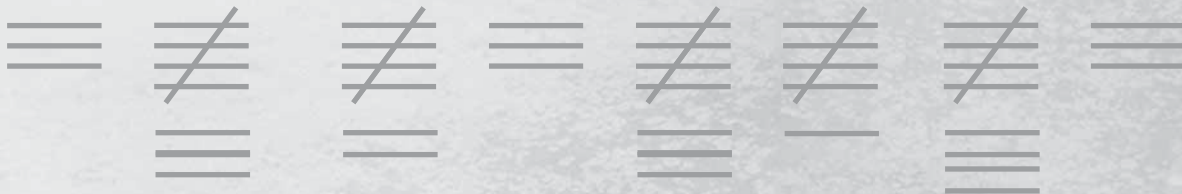
حال خود را در موقعیت یک رمزگشا قرار می‌دهیم که نسخه‌ای از این پیام را به‌دست آورده است و می‌خواهد آن را بگشاید. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که رمزگشا به طریقی (شاید با حدسی اتفاقی یا به‌علت آشنایی با روش‌های رمزنگاری فرستندهٔ پیام) سیستم کلی را می‌داند، اما از کلید ویژه بی‌اطلاع است. در چنین موقعیتی، تنها کاری که او باید انجام دهد، یافتن عددی است که وی را به خواندن پیام قادر سازد؛ عددی که نشان‌دهندهٔ میزان انتقال دنبالهٔ رمزی نسبت‌به دنبالهٔ صریح باشد. از این نظر، مسئله زیاد مشکل به نظر نمی‌رسد. در کل تنها ۲۵ عدد ممکن وجود دارند و هر کدام را می‌توان به‌نوبت امتحان کرد تا عددی به دست آید که پیام را فاش سازد. درواقع، ممکن است کار کردن با یک کلمه برای یافتن کلید ویژه کافی باشد.

بنابراین اگر برای مثال کلمهٔ اول پیام «BPM» را در نظر بگیریم، معادل‌های عددی حرف‌های این کلمه ۲، ۱۶ و ۱۳ هستند. اکنون اگر عدد ۱ را از هریک از این عددها کم کنیم:

۱	۱۵	۱۲
↕	↕	↕
A	O	L

و اگر عدد ۲ را از هریک از عددهای نخست کم کنیم:

۲۶	۱۴	۱۱
↕	↕	↕
Z	N	K



این فرایند را ادامه می‌دهیم و نتیجه را به‌صورت یک جدول منظم می‌کنیم. از ۲، ۱۶ و ۱۳ شروع می‌کنیم و اطلاعاتی را که به‌دست می‌آوریم به‌ترتیب زیر جدول‌بندی می‌کنیم:

متناظر حرفی		
A	O	L
⋮	⋮	⋮
T	H	E

اعداد حاصل		
۱	۱۵	۱۲
⋮	⋮	⋮
۲۰	۸	۵

مقدار کم‌شده
۱
⋮
۸

وقتی به عدد ۸ می‌رسیم، کلمهٔ THE را که مناسب به نظر می‌رسد مشاهده می‌کنیم و درواقع، اگر کلید ۸ را برای تمام پیام به‌کار ببریم، می‌توانیم تمام پیام را بخوانیم.

تذکر: خواننده باید روی جزئیات از رمز درآوردن بسیار تمرین کند تا بر فرایند رمزگشایی مسلط شود.

توجه کنید که اگر عمل کم کردن را با ظهور کلمهٔ THE متوقف نکرده بودیم و کار را تا آخرین عدد، یعنی ۲۵ ادامه می‌دادیم، هریک از سه ستون سمت راست جدول، یک الفبای کامل اما به‌ترتیب معکوس می‌بود. در صورت تمایل، می‌توان این عددهای کلیدی را به‌ترتیب معکوس، امتحان کرد. یعنی اول ۲۵، بعد ۲۴، تا به آخر و درنهایت در هر ستون، الفباها به‌ترتیب مستقیم قرار گیرند. چنین وضعی، روشی را که اندکی با روش فوق تفاوت دارد برای جست‌وجوی کلید به‌دست می‌دهد.

تمرین: پیام‌های زیر را بگشایید.

1. VXMDUJA JARCQVNCRL LXDUM KN LXWBRMNANM ANVJRWMNA JARCQVNCRL.

2. MZVYDIB DN DJ OCZ HDIY RCVO ZSZMXDNZ DN OJ OCZ WJYT.

(راهنمایی: برای حل تمرین‌ها: **۱.** عدد کلیدی K برابر ۹ است: K=۹
۲. عدد کلیدی K برابر ۲۱ است: K=۲۱.)

گشودن الفباهای متعارف مستقیم با استفاده از فراوانی حرف‌ها

در این‌جا به توضیح روش مبتنی بر انتقال الفبای معمولی می‌پردازیم. این روش بر یک ویژگی اساسی زبان استوار است: «فراوانی نسبی به کار رفتن حرف‌های مختلف الفبا»

یک نمونه از متنی به زبان صریح را انتخاب می‌کنیم. برای مثال، صفحه‌ای از یک کتاب یا چند سطر از یک روزنامه (به زبان لاتین) را انتخاب می‌کنیم و فراوانی هر حرف را می‌شماریم؛ یعنی معلوم می‌کنیم که هر حرف چند بار به کار رفته است. برای مثال از نمونه‌ای که به طول ۱۰۰۰ حرف انتخاب کرده‌ایم، پس از شمارش، نتیجهٔ زیر به‌دست آمده است:

A	۷۳	J	۲	S	۶۳
B	۹	K	۳	T	۹۳
C	۳۰	L	۳۵	U	۲۷
D	۴۴	M	۲۵	V	۱۳
E	۱۳۰	N	۷۸	W	۱۶
F	۲۸	O	۷۴	X	۵
G	۱۶	P	۲۷	Y	۱۹
H	۳۵	Q	۳	Z	۱
I	۷۴	R	۷۷		

فراوانی نسبی هر حرف، که مورد نظر ماست، درصد تعداد دفعات ظاهر شدن آن حرف، یعنی درصد تعداد دفعات به کار رفتن آن حرف است. از آن‌جا که تعداد کل حروف در این نمونه ۱۰۰۰ است، فراوانی نسبی هر حرف از تقسیم فراوانی واقعی آن بر ۱۰ به‌دست می‌آید.

همان‌طور که انتظار می‌رود، فراوانی نسبی حروف مختلف فرق دارد. تعداد **Eها** ۱۳٪ کل حرف‌ها، تعداد Tها تقریباً ۹٪ کل حرف‌ها و تعداد هریک از حروف صدادار A، I و O حدود **۷**٪ کل حرف‌هاست. بعضی حروف مانند G، V، W و Y به‌ندرت به‌کار رفته‌اند (تعداد آن‌ها بین ۱ تا ۲ درصد بوده است) و حرف‌های J، K، Q و Z تقریباً اصلاً به‌کار نرفته‌اند.

بیان این‌که «فراوانی نسبی E **۱۳**٪ است» به این معناست که در یک انتخاب تصادفی از کل هزار حرف، احتمال به‌دست آمدن یک E به نسبت ۱۳ به ۱۰۰ است. از این‌رو، اصطلاح احتمال را که تعریف دقیق ریاضی آن مبتنی بر مفهوم فراوانی نسبی است، به‌کار می‌بریم و از نماد $P_E=۰/۱۳$ استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که احتمال به‌دست آوردن یک E برابر **۱۳**٪ است. با این نمادگذاری:

$$P_A=۰/۰۷ \quad و \quad P_T=۰/۰۹ \quad و \quad ... \quad و \quad P_Z\approx ۰$$

از آن‌جا که مجموع همهٔ فراوانی‌ها برابر تعداد همهٔ حرف‌ها در نمونه است، نتیجه می‌شود که مجموع فراوانی‌های نسبی ۱۰۰ درصد، یعنی ۱ است و بنابراین مجموع احتمال برای همهٔ ۲۶ حرف برابر ۱ است:

$$P_A+P_B+P_C+\ldots+P_Z=۱$$

این عبارت را به‌صورت اختصاری زیر نشان می‌دهند:

$$\sum_{i=A}^{i=Z} P_i = ۱$$

عبارت سمت چپ آن چنین خوانده می‌شود:

«مجموع مقادیر P_i وقتی که i به‌نوبت مقادیر از A تا Z را اختیار می‌کند.»

A، حد پایین و Z، حد بالای مجموع نامیده می‌شود.

هر متنی از زبان متداول را که به اندازهٔ کافی طولانی باشد، بررسی کنیم، نتیجه‌ای مشابه با آنچه از نمونهٔ هزار حرفی به‌دست آوردیم، به‌دست خواهیم آورد.

درصد تعداد دفعات به‌کار رفتن هر حرفی در نمونه‌های طولانی را «**فراوانی**» مشخصهٔ آن حرف می‌نامند. اگر پیامی بسیار کوتاه باشد، ممکن است فراوانی نسبی بعضی از حروف در آن پیام با فراوانی مشخصهٔ آن‌ها تفاوت زیادی داشته باشد. اما هرچه پیام طولانی‌تر باشد، احتمال کمتری وجود دارد که تفاوت‌های زیادی با فراوانی‌های مشخصه وجود داشته باشد.

در این‌جا اطلاعات مربوط به شمارش فراوانی‌ها را که یادداشت کردیم به شکل یک نمودار میله‌ای نمایش می‌دهیم. برای سادگی، مقدار هریک از فراوانی‌های نسبی را به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد می‌کنیم، به گونه‌ای که بتوان فراوانی مشخصهٔ هر حرف را مانند زیر با نشان خطهایی نمایش داد:

(الگوی فراوانی مشخصهٔ هر حرف در دنبالهٔ صریح)

A , B , C , D , E , I , ... , X , Y , Z

در این نوع نمایش، نموداری می‌بینیم که واضح‌تر از جدول ارقام، زیاد و کم بودن فراوانی مشخصهٔ حرف‌ها را آشکار می‌سازد.

در این نمودار یک الگوی با اهمیت وجود دارد. در بین حروفی که فراوانی‌های زیاد دارند، A، E و I را می‌بینیم که به فاصله‌های برابر (سه حرف درمیان) قرار دارند و E بیشترین فراوانی را دارد. هم‌چنین زوج متوالی N و O و نیز سه‌تایی R، S و T را می‌بینیم. در بین حروفی که فراوانی‌های کم دارند، زوج متوالی J و K و دنبالهٔ U، V، W، X، Y و Z قرار دارند.

این الگوی فراوانی‌های زیاد و کم با فاصله‌های مذکور، مشخصهٔ الفبای معمولی در زبان صریح و یک ابزار اساسی رمزگشایی است.

حال ببینیم هنگامی که پیامی از راه انتقال الفبای معمولی نسبت به خود الفبا به رمز درآید، چه اتفاقی می‌افتد. برای مثال، فرض کنید میزان انتقال، هشت حرف باشد. پس هربار که هر حرف A در پیام صریح ظاهر می‌شود به جای آن I گذاشته می‌شود. برای

نمایش نمادی این جای‌گذاری، قرار می‌گذاریم که حروف زبان صریح را با اندیس P و حروف رمزی را با اندیس C مشخص کنیم. با این قرارداد، I از زبان رمزی به جای A از زبان صریح را به‌صورت $A_P=I_C$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین هربار که B در پیام ظاهر شود، به جای آن J گذاشته خواهد شد، یعنی $B_P=J_C$. به جای هر حرف از پیام اصلی، هرجا که ظاهر شود، همیشه یک حرف که معادل آن است می‌آید. نتیجه آن است که نمودار توزیع فراوانی پیام رمزی همان نمودار توزیع فراوانی پیام صریح اولیه خواهد بود، با این تفاوت که به اندازهٔ ۸ مکان انتقال یافته است. اگر کلید ویژه عدد دیگری مانند n باشد، (نمودارِ) توزیع نیز به اندازهٔ n مکان انتقال می‌یابد.

اکنون پیام رمزی را در نظر می‌گیریم که توزیع زیر برای آن به دست آمده است:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M

N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

این نمودار به دلیل نشان دادن فراوانی تک‌تک حروف «توزیع فراوانی تک‌حرفی» نامیده می‌شود. حال سعی می‌کنیم الگوی الفبای معمولی را در این توزیع بیابیم. مشاهده می‌کنیم که M ،I و Q (همه با فراوانی زیاد) سه حرف در میان هستند و M بیشترین فراوانی را دارد؛ V و W زوجی از حروف متوالی با فراوانی‌های زیاد است؛ A ،Z و B یک سه‌تایی از حروف متوالی با فراوانی‌های زیاد است؛ G ،F ،E ،D ،C و H، دنباله‌ای طولانی از حروف متوالی با فراوانی‌های کم را تشکیل می‌دهند.

اگر قرار دهیم $I_C=A_P$، آن‌گاه تمام این مطالب با وضعیت یک الفبای متعارف مستقیم جور درمی‌آیند. بنابراین، حرف I در این توزیع باید متناظر حرف A در الفبای معمولی باشد.

روش دیگر مشاهدهٔ این مطلب، لغزاندن توزیع مربوط به رمز در مقابل توزیع مربوط به زبان صریح به گونه‌ای است که آن‌ها با یکدیگر متناظر شوند.

ابتدا توزیع زبان صریح را می‌نویسیم و برای آن‌که عمل متناظر کردن ممکن باشد، آن را دو بار به‌دنبال هم می‌نویسیم. آن‌گاه توزیع رمز را مقابل آن قرار می‌دهیم و هر بار به اندازهٔ یک حرف آن را می‌لغزانیم تا یک تناظر خوب از فراوانی‌ها، یعنی زیادها در مقابل زیادها و کم‌ها در مقابل کم‌ها به‌دست آید.

اگر این دو توزیع را در دو صفحهٔ متفاوت قرار دهیم، آن‌گاه لغزاندن یکی در مقابل دیگری ساده‌تر خواهد شد. کار را با قرار دادن A_C در مقابل B_P شروع می‌کنیم (شکل ۳). در این وضعیت در تعداد کمی از مکان‌ها می‌بینیم که فراوانی‌های زیاد متناظر با فراوانی‌های زیاد قرار گرفته‌اند، برای مثال، N_P و M_C، O_P و N_C، R_P و Q_C، A_P و Z_C؛ و نیز در تعداد کمی از مکان‌ها فراوانی‌های کم‌متناظر یکدیگر قرار گرفته‌اند، برای مثال، K_P و J_C، Y_P و X_C، Z_P و Y_C. اما موارد مهمی از ناسازگاری نیز وجود دارد. یعنی E_P، که بیشترین فراوانی را دارد، مقابل حرفی است که به‌هیچ‌وجه ظاهر نمی‌شود و سازگاری فراوانی‌ها در زوج‌های B_P و A_C، I_P و H_C، S_P و R_C، T_P و S_C، X_P و W_C، بسیار ضعیف است. نتیجه می‌گیریم که این تناظر مناسب نیست.

دنبالهٔ صریح:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

دنبالهٔ رمزی:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

حال توزیع رمز را چنان انتقال می‌دهیم که $A_C=C_P$ و دو توزیع را مقایسه می‌کنیم (شکل ۴). دوباره نتیجه می‌گیریم که تناظر خوبی نداریم.

دنبالهٔ صریح:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

دنبالهٔ رمزی:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

این فرایند را ادامه می‌دهیم و هر بار با تناظرهایی که رضایت‌بخش نیستند مواجه می‌شویم تا این‌که به حالت $A_C=S_P$ می‌رسیم (شکل ۵).

دنبالهٔ صریح:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

دنبالهٔ رمزی:

A , B , C , D , E , F , G , H , I , J , K , L , M , N , O , P , Q , R , S , T , U , V , W , X , Y , Z

در این وضعیت مشاهده می‌کنیم که تناظر خوبی به‌دست آورده‌ایم، بنابراین: «$A_P=I_C$».

تمرین:

پیام‌های زیر را با متناظر قرار دادن توزیع آن‌ها با توزیع فراوانی زبان صریح بگشایید.

۱.

CQSOB KOHSF WG PZIS PSQOIGS RWFH DOFHWQZSG WB HVS KOHSF FSTZSQH GIBZWUVH PIH HVS KOHSF OPGCFPG FSR OBR MSZZCK HVS UFSSBG OBR PZISG HVOH OFS ZSTH AOYS HVS RSSD PZIS CQSOB.

(پاسخ ۱. عدد کلیدی، یعنی تعداد حروف انتقال‌یافته، برابر ۱۴ است: K=۱۴)

۲.

SNHPJQ NX F MJFAD XNQAJW BMNYJ RJYFQQNH JQJRJSY NY NX RFLSJYNH YFPJX F MNLM UTQNXM FSI ITJX STY YFWSNXM TW WZXY JFXNQD.

(پاسخ ۲. عدد کلیدی، یعنی تعداد حروف انتقال‌یافته، برابر ۵ است: K=۵)

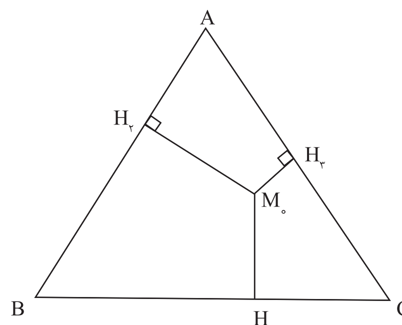
رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه

مسئله‌هایی از کتاب درسی هندسه

محمدهاشم رستمی

کلیدواژه‌ها: رویکرد هندسی، رویکرد جبری، مختصاتی، افراز، مثلث متساوی‌الاضلاع، دستگاه محورهای مختصات قائم.

مسئله: با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به‌دست آورید.

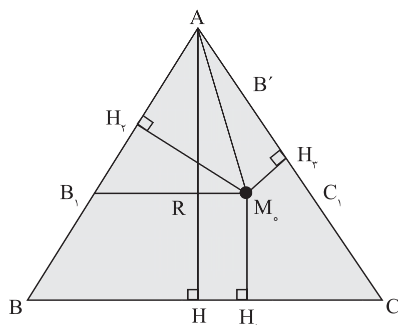


مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a‏(AB=AC=BC=a) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم M_0 نقطه‌ای واقع در درون این مثلث و M_0H_1، M_0H_2، M_0H_3 به ترتیب فاصله‌های نقطهٔ M_0 از ضلع‌های BC، AB و AC باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $M_0H_1+M_0H_2+M_0H_3$ مقداری ثابت است و اندازهٔ این مقدار ثابت را به‌دست آوریم.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری ـ مختصاتی حل می‌کنیم.

الف) حل به روش هندسی

راه اول: از نقطهٔ M_0 به رأس‌های A، B و C وصل و ارتفاع AH از مثلث ABC را نیز رسم می‌کنیم. چون مثلث ABC به سه مثلث M_0BC، M_0AB و M_0AC افراز شده است، پس می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{\Delta M_0BC}+S_{\Delta M_0AB}+S_{\Delta M_0AC}=S_{\Delta ABC} \qquad (1)$$

اما داریم:

$$BC=AB=AC=a$$

$$S_{\Delta M_0BC}=\frac{1}{2}BC.M_0H_1$$

$$S_{\Delta M_0AB}=\frac{1}{2}AB.M_0H_2$$

$$S_{\Delta M_0AC}=\frac{1}{2}AC.M_0H_3$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.AH$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{\Delta M_0BC}=\frac{1}{2}a.M_0H_1 \qquad (2)$$

$$S_{\Delta M_0AB}=\frac{1}{2}a.M_0H_2 \qquad (3)$$

$$S_{\Delta M_\circ AC} = \frac{1}{2}a.M_\circ H_3 \quad (4)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.AH = \frac{1}{2}a.h_a \quad (5)$$

با قراردادن مقدارهای به‌دست آمده از رابطه‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}a.M_\circ H_1 + \frac{1}{2}a.M_\circ H_2 + \frac{1}{2}a.M_\circ H_3 = \frac{1}{2}a.AH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a(M_\circ H_1 + M_\circ H_2 + M_\circ H_3) = \frac{1}{2}a.AH$$

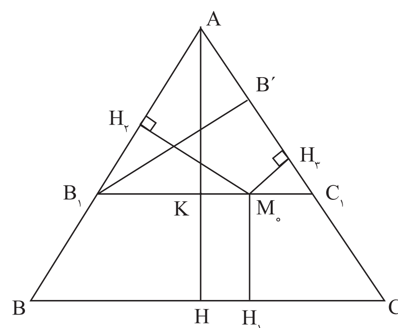
$$\Rightarrow M_\circ H_1 + M_\circ H_2 + M_\circ H_3 = AH = h_a$$

چون $AH=h_a$ مقدار ثابتی است، پس حکم مسئله درست است.

یعنی:

«مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری ثابت است و این مقدار ثابت، اندازهٔ ارتفاع آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم: ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ $M_\circ$ خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC را به ترتیب در B_1 و C_1 و ارتفاع AH را در نقطهٔ K قطع کند.



مثلث AB_1C_1 مثلثی متساوی‌الاضلاع است که AK ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC از آن است و بنابراین، ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین را نیز دارد که: «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن مقداری ثابت و مساوی طول ارتفاع وارد بر یکی از دو ساق است» که در این‌جا به دلیل متساوی‌الاضلاع بودن مثلث AB_1C_1، این مجموع، مساوی ارتفاع AK است. یعنی داریم:

$$M_\circ H_2 + M_\circ H_3 = B_1B' = AK \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی $HKM_\circ H_1$ به دلیل قائمه‌بودن زاویه‌هایش مستطیل است، بنابراین:

$$M_\circ H_1 = KH \quad (2)$$



از جمع کردن طرف‌های نظیر دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

مقدار ثابت $= M_\circ H_1 + M_\circ H_2 + M_\circ H_3 = AK + KH = AH = h_a$

پس حکم مسئله درست است.

نکتهٔ ۱: ثابت بودن $M_\circ H_1 + M_\circ H_2 + M_\circ H_3$ را می‌توان با میل دادن نقطهٔ $M_\circ$ به سوی یکی از رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC حدس زد، بدین ترتیب که اگر نقطهٔ $M_\circ$ را بسیار نزدیک به رأس A در نظر بگیریم، $M_\circ H_1$ به سمت $AH=h_a$ و $M_\circ H_2$ و $M_\circ H_3$ به سمت صفر میل خواهند کرد، پس:

$$M_\circ H_1 + M_\circ H_2 + M_\circ H_3 \to h_a + 0 + 0 = h_a$$

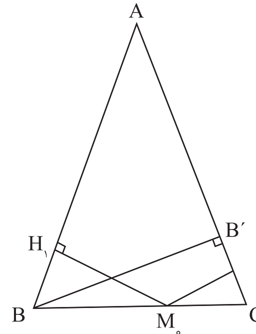
این حدس زدن به حل مسئله کمک می‌کند.

نکتهٔ ۲: باید توجه کنیم، هر حکمی (هر ویژگی) که در مثلث متساوی‌الساقین برقرار است، در مثلث متساوی‌الاضلاع نیز برقرار است، اما عکس این مطلب درست نیست.

برای مثال:

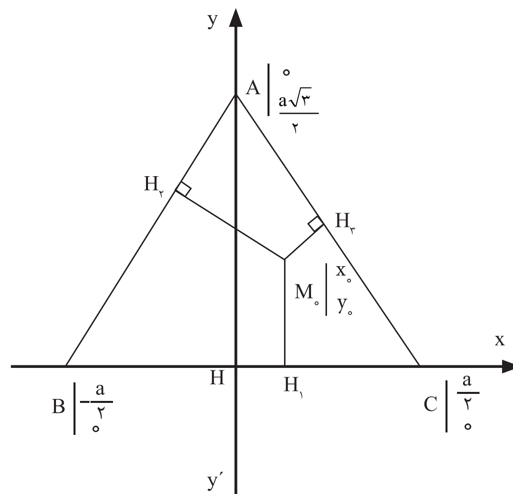
مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ هر مثلث

متساوی‌الســـاقین از دو ساق آن مقدار ثابتی است و این مقدار ثابت مساوی اندازهٔ ارتفاع نظیر یکی از دو ساق مثلث است.



بدیهی اســـت که این ویژگی در مثلث متســـاوی‌الاضلاع نیز برقرار اســـت و ما در راه دوم حل مســـئلهٔ موردنظرمان از آن استفاده کردیم. اما این ویژگی که «مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است»، در مثلث متساوی‌الساقین برقرار نیست. به عبارت دیگر، مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون هر مثلث متساوی‌الساقین از سه ضلع آن، مقدار ثابتی نیست، بلکه به جای این نقطه در درون مثلث بستگی دارد.

ب) حل به روش جبری ـ مختصاتی



دســـتگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محـــور xها روی خط BC و محور yهـــا روی خط AH ارتفاع وارد از رأس A بـــر قاعدهٔ BC قـــرار گیرد و نقطهٔ H همان O مبدأ مختصات باشـــد. در این دســـتگاه مختصات با توجه به این‌که $BC = AB = AC = a$ اختیار شـــده و $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است (طول هر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ اســـت)، مختصات رأس‌های مثلث متســـاوی‌الاضلاع ABC در این دستگاه مختصات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}),\ B = (-\frac{a}{2}, 0)\ ,\ C = (\frac{a}{2}, 0)$$

اکنون فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M_0 = (x_0, y_0)$ واقع در درون مثلث ABC از ســـه ضلع AB، BC و AC را به کمک دستور فاصلـــهٔ نقطه از خط، یعنـــی $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ که فاصلهٔ نقطهٔ $M_0 = (x_0, y_0)$ از خط $L: ax + by + c = 0$ را نشـــان می‌دهد، به‌دســـت می‌آوریم. برای این کار نخســـت لازم است معادلهٔ خط‌های AB، BC و AC را با توجه به داشتن مختصات رأس‌های A، B و C بنویسیم و سپس فاصلهٔ $M_0 = (x_0, y_0)$ از این خط‌ها، یعنی طول پاره‌خط‌های M_0H_1، M_0H_2 و M_0H_3 را به‌دست آوریم. در نتیجه داریم:

$$B = (-\frac{a}{2}, 0), C = (\frac{a}{2}, 0) \Rightarrow BC: y = 0$$

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), B = (-\frac{a}{2}, 0) \Rightarrow AB: \frac{x}{-\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AB: -x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

$$A = (0, \frac{a\sqrt{3}}{2}), C(\frac{a}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow AC: \frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow AC: x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - \frac{a}{2} = 0$$

اکنون خواهیم داشت:

$$M_0H_1 = \frac{|y_0|}{1} = |y_0|$$

$$M_0H_2 = \frac{\left|-x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 - \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 + \frac{a}{2})$$

$$M_0H_3 = \frac{\left|x_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 - \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-x_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 + \frac{a}{2})$$

و از آن‌جا با توجه به این‌که در این دستگاه، مختصات قائم اختیار شده و $y_0 \geq 0$ است، خواهیم داشت:

$$M_0H_1 + M_0H_2 + M_0H_3 = y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

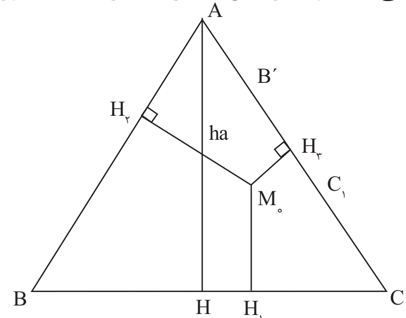
$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}x_۰ - \frac{۱}{۲}y_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}a = y_۰ - y_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = h$$

پس حکم مسئله برقرار است.

نکتهٔ ۱: دســتگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان به دو صورت مشــابه نیز در نظر گرفت، چنان‌که محور xها روی یکی از دو ضلع دیگر مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC و محور yها روی ارتفاع نظیر آن ضلع باشد. محاسبه‌ها مشابه محاسبهٔ انجام شده در بالاست.

نکتهٔ ۲: دســتگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان در صفحــهٔ مثلث ABC به صورت‌هــای دیگر نیز در نظر گرفت، چنان‌که محور xها یا yها روی هیچ‌یک از ضلع‌های مثلث قرار نگیرد و هیچ ارتفاعی از مثلث نیز محور دستگاه مختصات قائم انتخاب شده نباشد. اما محاسبه‌ها در این نوع انتخاب مشکل‌تر خواهد شد.

مثال ۱: مثلث متســاوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر داده شده است. با رویکرد جبری ـ مختصاتی ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون این مثلث از ســه ضلع آن مقدار ثابتی است و اندازهٔ این مقدار ثابت را به‌دست آورید.

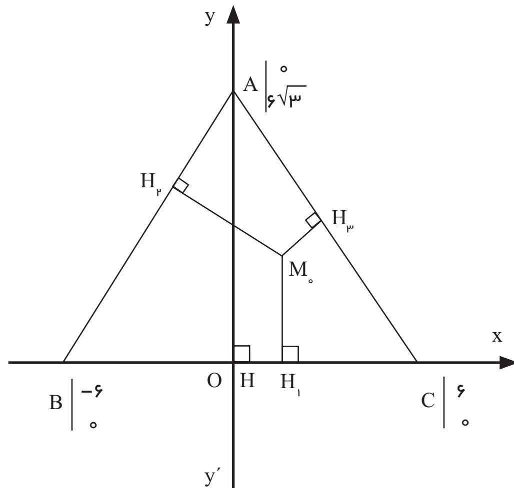


حل: در حالت کلی ثابت کردیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در درون مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC از ســه ضلع آن مقدار ثابتی اســت و اندازه‌های این مقدار ثابت مســاوی طول ارتفاع این مثلث متســاوی‌الاضلاع است. پس اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر a باشد، اندازهٔ مقدار ثابت موردنظر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. با توجه به این مطلب، مقدار ثابت موردنظر در این مسئله برابر است با:

$$h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

اما اگر بخواهیم مســئله را بدون استفاده از حل در حالت کلی حل کنیــم، مثلث متســاوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۲ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. محور xها را روی خط BC و محور yها را روی ارتفاع AH و نقطهٔ H پای برخورد خط AH با خط BC را مبدأ مختصات می‌گیریم. در این دســتگاه مختصات، مختصات رأس‌های B، A و C به صورت زیر است:

$$A = (۰, ۶\sqrt{۳}),\ B = (-۶, ۰),\ C = (۶, ۰)$$



معادلهٔ ضلع‌های AB، BC و AC نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$BC: y = ۰$$

$$AB: \frac{x}{-۶} + \frac{y}{۶\sqrt{۳}} = ۱ \Rightarrow -x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y - ۶ = ۰$$

$$AC: \frac{x}{۶} + \frac{y}{۶\sqrt{۳}} = ۱ \Rightarrow x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y - ۶ = ۰$$

اکنون اگر $M_۰ = (x_۰, y_۰)$ نقطه‌ای دلخواه واقع در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشــد، $M_۰H_۱$، $M_۰H_۲$ و $M_۰H_۳$ که به‌ترتیب فاصله‌های نقطهٔ $M_۰$ از ضلع‌های AB، BC و AC هستند، برابرند با:

$$M_۰H_۱ = |y_۰|$$

$$M_۰H_۲ = \frac{\left|-x_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ - ۶\right|}{\sqrt{۱ + \frac{۱}{۳}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\left|-x_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ - ۶\right|$$

$$M_۰H_۳ = \frac{\left|x_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ - ۶\right|}{\sqrt{۱ + \frac{۱}{۳}}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\left|x_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ - ۶\right|$$

با توجه به نامنفی بودن $y_۰$ و این‌که $x_۰ \in [-۶, ۶]$ خواهیم داشت:

$$M_۰H_۱ + M_۰H_۲ + M_۰H_۳$$

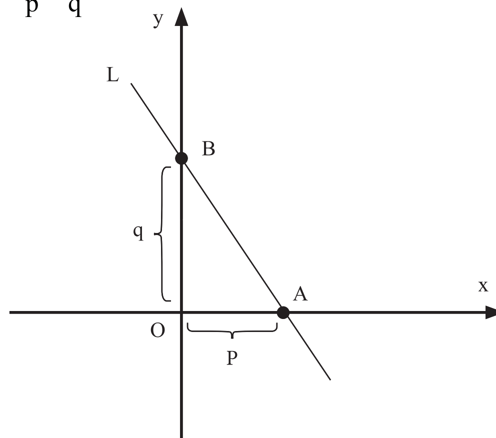
$$= y_۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}(x_۰ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ + ۶ - x_۰ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}y_۰ + ۶)$$

$$= y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}y_0 + 12\right) = y_0 - y_0 + 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = h_a$$

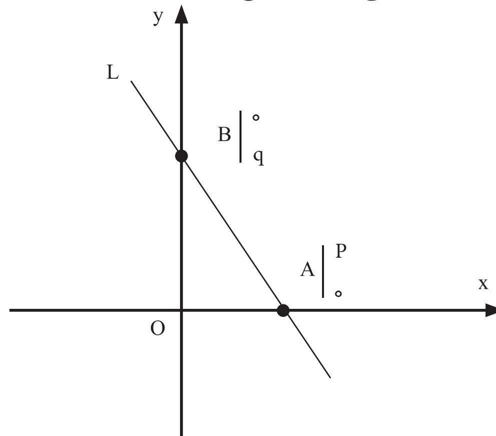
به‌طوری که دیده می‌شــود محاسبه از حالت کلی خیلی ســاده‌تر نیست. پس اگر در مســئله اثبات مستقیم مطلب را نخواهیم، هم‌چنان که دیدید می‌توانیم از حل مسئله در حالت کلی استفاده کنیم.

نکتــهٔ مهم: اگر خط راســتی مانند L محور xهــا را در نقطهٔ $A = (p, 0)$ و محور yها را در نقطهٔ $B = (0, q)$ قطع کند، p را طــول از مبدأ خط L و q را عرض از مبدأ خط L می‌نامند. در این حالت معادلهٔ خط L به صورت زیر است:

$$L: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



که ما از این دســتور برای نوشتن معادلهٔ ضلع‌های AB و AC در روش جبری ـ مختصاتی استفاده کردیم. اما این دستور چگونه به‌دست می‌آید. به توضیح زیر توجه کنید.



می‌دانیــم معادلــهٔ خطــی کــه از دو نقطــهٔ $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ می‌گــذرد و بــه صــورت $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ است. پس معادلهٔ خطی که از دو نقطه $A = (p, 0)$ و $B = (0, q)$ می‌گذرد، چنین خواهد بود:

$$A\left|\begin{matrix} x_1 = p \\ y_1 = 0 \end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix} x_2 = 0 \\ y_2 = q \end{matrix}\right. \Rightarrow y - 0 = \frac{q - 0}{0 - p}(x - p)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-q}{p}(x - p) \Rightarrow py = -qx + pq$$

$$\Rightarrow px + py = pq \Rightarrow \frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

بنابرایــن معادلهٔ خطی که طول از مبدأ آن مســاوی p و عرض از مبدأ آن مساوی q است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

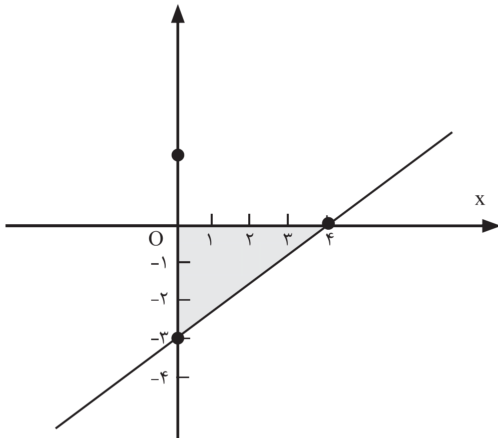
مثال ۱: معادلهٔ خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن $\frac{1}{2}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{1}{3}$ باشد.

حل: داریم:

$$p = +\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}, \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1$$

$\Rightarrow 2x - 3y = 1$ معادلهٔ خط خواسته شده

مثال ۲: مساحت مثلث حاصل از برخورد محورهای مختصات و خط L به معادلهٔ $3x - 4y - 12 = 0$ را تعیین کنید.



حل: مختصات نقطه‌های برخورد خط L با محورهای مختصات را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$y = 0 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } L} 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

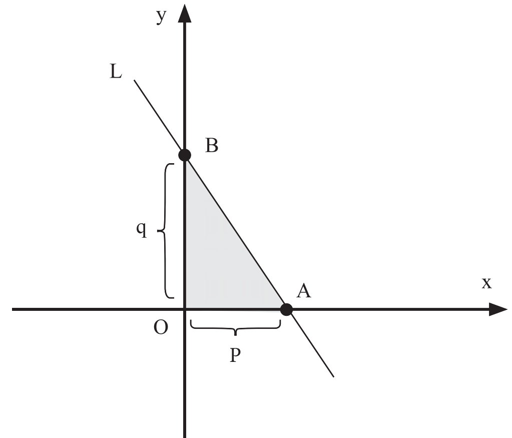
$\Rightarrow A = (4, 0)$ نقطهٔ برخورد با محور طول‌ها (xها)

$$x = 0 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ } L} 0 - 4y - 12 = 0 - 4y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{-4} = -3$$

نقطهٔ برخورد با محور عرض‌ها (yها) $(\cdot,-3)$ $\Rightarrow B = (\cdot,-3)$

مثلث موردنظر، مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB $(\hat{O} = 90^\circ)$ است. اما مساحت این مثلث برابر است.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2}|4||-3| = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$ واحد سطح



نکته: مساحت مثلث ایجاد شده بین محورهای مختصات و خط L در صورتی‌که طول از مبدأ این خط، یعنی نقطهٔ برخوردش با محور طول‌ها p و عرض از مبدأ آن، یعنی عرض نقطهٔ برخوردش با محور عرض‌ها q باشد، مساوی $S = \frac{1}{2}|pq|$ است (شکل)؛ زیرا داریم:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{1}{2}|p||q| = \frac{1}{2}|pq|$$

مثال ۳: خط $L: x + (m-1)y = 6$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که مساحت مثلث حاصل از برخورد این خط و محورهای مختصات مساوی ۹ واحد سطح باشد.

حل: می‌دانیم مساحت مثلث ایجاد شده بین محورهای مختصات و خط L که طول از مبدأ آن p و عرض از مبدأ آن q است مساوی $S = \frac{1}{2}|pq|$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$L: x + (m-1)y = 6,\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{6}{m-1} = q$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 6 = p,\ S = \frac{1}{2}|pq|$$

$$\Rightarrow 9 = \frac{1}{2}\left|6 \times \frac{6}{m-1}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{36}{m-1}\right| = \frac{18}{|m-1|}$$

$$\Rightarrow 9|m-1| = 18 \Rightarrow |m-1| = 2 \Rightarrow m-1 = +2 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

$$m-1 = -2 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

مثال ۴: یک دسته خط به معادلهٔ زیر داده شده است:

$$mx + (2m-1)y = m + 3$$

الف) ثابت کنید که این دسته خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و مختصات نقطهٔ ثابتی را که این دسته خط از آن می‌گذرد، تعیین کنید.

ب) مساحت مثلث حاصل از برخورد این دسته خط و محورهای مختصات را برحسب پارامتر m به‌دست آورید.

پ) آیا می‌توانید مقدار m را چنان بیابید که مساحت مثلث حاصل از این دسته خط و محورهای مختصات کمترین مقدار ممکن یا بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: الف) معادلهٔ خط L را نسبت به پارامتر مرتب می‌کنیم.

آن‌گاه یک بار ضریب پارامتر و بار دیگر بقیهٔ معادله را (که مستقل از پارامتر است) مساوی صفر قرار می‌دهیم و با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حاصل مختصات نقطهٔ ثابتی را که خط L از آن نقطه می‌گذرد (در صورت وجود) تعیین می‌کنیم. داریم:

$$mx + (2m-1)y = m + 3$$
$$\Rightarrow mx + 2my - y - m - 3 = 0$$
$$\Rightarrow m(x + 2y - 1) - y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -y - 3 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow x - 6 - 1 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow N = (7,-3)$$

نقطهٔ ثابت خواسته شده.

نکته: مختصات نقطهٔ ثابتی را که دسته خط از آن می‌گذرد به روش دیگری نیز می‌توان به‌دست آورد، به این ترتیب که به جای پارامتر m دو مقدار دلخواه قرار می‌دهیم تا معادلهٔ دو خط از دسته خط داده شده به‌دست آید. آن‌گاه مختصات نقطهٔ برخورد این دو خط را به‌دست می‌آوریم. این نقطه در صورت وجود همان نقطهٔ ثابت دسته خط است. بنابراین داریم:

$$m = 0 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته خط}} -y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$m = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دسته خط}} x + y = 4 \Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow N = (7,-3)$$

ب) برای محاسبهٔ مساحت مثلث حاصل از برخورد این دسته خط و محورهای مختصات برحسب پارامتر m، p طول از مبدأ و q عرض از مبدأ این خط را به‌دست می‌آوریم و از دستور $S = \frac{1}{2}|pq|$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x = 0 \Rightarrow (2m-1)y = m + 3 \Rightarrow y = \frac{m+3}{2m-1} = q$$ عرض از مبدأ

طول از مبدأ $y=0 \Rightarrow mx = m+3 \Rightarrow x = \frac{m+3}{m} = p$

مساحت مثلث موردنظر $S=\frac{1}{2}|pq| = \frac{1}{2}\left|\frac{m+3}{m}\times\frac{m+3}{2m-1}\right|$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\frac{(m+3)^2}{m(2m-1)}\right| = \frac{(m+3)^2}{|4m^2-2m|}$$

$$4m^2-2m=0 \Rightarrow 2m(2m-1)=0 \Rightarrow m=0,\ m=\frac{1}{2}$$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4m^2-2m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow m<0,\ m>\frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2-2m| = 4m^2-2m$$

$$0<m<\frac{1}{2} \Rightarrow |4m^2-2m| = -4m^2+2m$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$m<0, m>\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{4m^2-2m} \quad (1)$$

$$0<m<\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{(m+3)^2}{-4m^2+2m} = -\frac{(m+3)^2}{4m^2-2m} \quad (2)$$

پ) حالت (۱) را در نظر می‌گیریم و مقداری از m را که به ازای آن S ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود به‌دست می‌آوریم. خواهیم داشت:

$S = \frac{(m+3)^2}{4m^2-2m}$ S (m)(m

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2-2m)-(8m-2)(m+3)^2}{(4m^2-2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(4m^2-2m-4m^2-11m+3)}{(4m^2-2m)^2}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{2(m+3)(-13m+3)}{(4m^2-2m)^2}, S'=0$$

$$\Rightarrow 2(m+3)(-13m+3)=0 \Rightarrow m+3=0, m=-3,$$

$$-13m+3=0 \Rightarrow m=\frac{3}{13}$$

جدول تغییرات S نسبت به m در این حالت، به صورت زیر است:

(I)

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s′		$-$	•	$+$	‖	$+$	•	$-$	‖	$-$	
s	$\frac{1}{4}$	↘	0 min	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-42 max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$

(که البته بازهٔ $(0,\frac{1}{2})$ را باید از آن کنار بگذاریم، ولی برای درک بهتر، در جدول آمده است.)

در حالت (۲) نیز با توجه به این‌که ضابطهٔ S نسبت به m قرینه شده است، بدون مشتق‌گیری، جدول تغییرات S نسبت به m را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

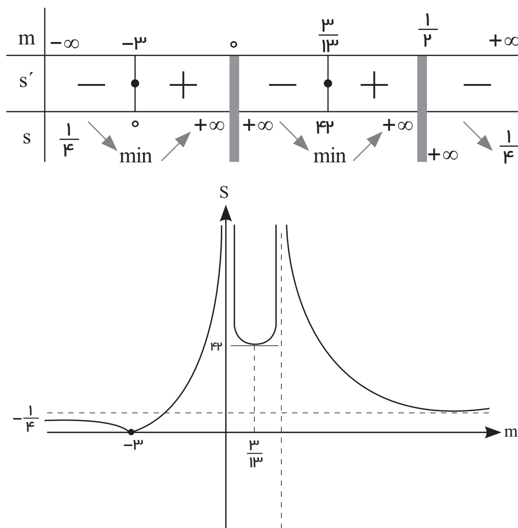
(II)

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s′		$+$	•	$-$	‖	$-$	•	$+$	‖		
s	$-\frac{1}{4}$	↗	0 max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	42 min	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$

(که البته فقط بازهٔ $(0,\frac{1}{2})$ آن مورد قبول است، ولی برای درک بهتر، همهٔ جدول را رسم کرده‌ایم.)

از ترکیب دو جدول I و II، جدول تغییرات S را به ازای $m\in R$ به صورت زیر رسم شده و نمودار S نسبت به m را نیز رسم می‌کنیم و از آن‌جا به سادگی می‌توانیم ماکزیمم و می‌نیمم‌های S را تشخیص دهیم:

m	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{13}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
s′		$-$	•	$+$	‖	$-$	•	$+$	‖	$-$	
s	$\frac{1}{4}$	↘	0 min	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	42 min	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$



و با توجه به این نمودار روشن است که در حالت کلی می‌نیمم S مساوی صفر است (که به ازای $m=-3$ حاصل می‌شود ـ در این حالت معادله خط به صورت $-3x-7y=0$ درمی‌آید و خط از مبداء مختصات می‌گذرد و در نتیجه S مساوی صفر می‌شود.) ولی به ازای $0<m<\frac{1}{2}$، S یک می‌نیمم نسبی به ازای $m=\frac{3}{13}$ دارد که مساوی ۴۲ است. S دارای ماکزیمم نمی‌باشد (یعنی به‌طور بی‌کران قابل افزایش است و با نزدیک شدن m به $\frac{1}{2}$ و یا صفر، به $+\infty$ میل می‌کند) و به ازای $m=0$ یا $m=\frac{1}{2}$، خط با محورها موازی شده و مثلثی تشکیل نمی‌شود. همچنین اگر m بی‌نهایت بزرگ و مثبت یا بی‌نهایت کوچک و منفی اختیار شود، S به $\frac{1}{4}$ نزدیک می‌شود.

مسائل مثلثات

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها:
مثلثات، ریشه‌های معادلهٔ مثلثاتی، معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشهٔ حقیقی

مسئلهٔ ۱: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $\tan^{۲} x-(۲m+۱)\tan x+۲m=۰$ باشند و داشته باشیم $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۳}$، آن‌گاه m را بیابید.

حل:

$$\tan^{۲} x-(۲m+۱)\tan x+۲m=۰$$

$$a=۱ \qquad b=-(۲m+۱) \qquad c=۲m$$

چون α و β ریشه‌های این معادلهٔ مثلثاتی‌اند، پس $\tan\alpha$، $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب tanx خواهند بود. پس می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{a}=۲m+۱$$

$$\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=۲m$$

داریم : $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=-\frac{۵}{۳}$

$$\Rightarrow\frac{۲m+۱}{۱-۲m}=-\frac{۵}{۳}\Rightarrow ۶m+۳=-۵+۱۰m$$

$$\Rightarrow ۴m=۸\Rightarrow \boxed{m=۲}$$

مسئلهٔ ۲: معادلهٔ $\tan x+\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=k$ مفروض است.

الف): به ازای چه مقادیر k، این معادله ریشه‌های حقیقی دارد؟

ب): اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، k را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=۱+\tan\alpha.\tan\beta$$

حل الف:

$$\tan x+\frac{۲\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}=k$$

$$\Rightarrow \tan x+\frac{\cos x(۲\tan x+۱)}{\cos x(\tan x+۱)}=k$$

دو طرف تساوی معادله را در $(\tan x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \tan x(\tan x+۱)+۲\tan x+۱=k(\tan x+۱)$$

$$\Rightarrow \tan^{۲} x+\tan x+۲\tan x+۱=k\tan x+k$$

$$\Rightarrow \tan^{۲} x+(۳-k)\tan x+(۱-k)=۰\begin{cases}a=۱\\b=۳-k\\c=۱-k\end{cases}$$

شرط وجود جواب: $\Delta\geq۰\Rightarrow b^{۲}-۴ac\geq۰$

$$\Rightarrow (۳-k)^{۲}-۴(۱-k)\geq۰\Rightarrow ۹+k^{۲}-۶k-۴+۴k\geq۰$$

$\Rightarrow k^{۲}-۲k+۵\geq۰$ یا $(k^{۲}-۲k+۱)+۴\geq۰$

$\Rightarrow \Delta=(k-۱)^{۲}+۴>۰$ این رابطه همواره برقرار است

یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب tanx، دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حل ب:

$$\tan^{۲} x+(۳-k)\tan x+(۱-k)=۰$$

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{k^{۲}-۲k+۵}}{۱}=\sqrt{k^{۲}-۲k+۵}$$

$$\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=۱-k$$

$$|\tan\alpha-\tan\beta|=۱+\tan\alpha.\tan\beta$$

$$\sqrt{k^{۲}-۲k+۵}=۱+۱-k\Rightarrow\sqrt{k^{۲}-۲k+۵}=۲-k$$

$$\Rightarrow k^{۲}-۲k+۵=۴+k^{۲}-۴k$$

$$\Rightarrow ۲k+۱=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

مسئلهٔ ۳: معادلهٔ $۵\sin x+۱۲\cos x=۱۳$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: داریم:

$$(\frac{۵}{۱۳})^۲+(\frac{۱۲}{۱۳})^۲=\frac{۲۵}{۱۶۹}+\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۱۶۹}{۱۶۹}=۱$$

بنابراین اگر $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ فرض شود با فرض $۰<\alpha<۹۰^\circ$، می‌توان نوشت $\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$ حال به کمک این مطلب مسئله را حل می‌کنیم.

$$۵\sin x+۱۲\cos x=۱۳$$

دو طرف تساوی معادله را بر ۱۳ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۵}{۱۳}\sin x+\frac{۱۲}{۱۳}\cos x=۱$$

داشتیم: $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و $\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $۰<\alpha<۹۰^\circ$

پس: $\sin\alpha.\sin x+\cos\alpha.\cos x=۱$

$$\Rightarrow \cos(x-\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow x-\alpha=۲k\pi \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha\ ,\ k\in Z$$

مسئلهٔ ۴: اگر $\log_۲\cos\frac{x}{۲}=a$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\log_۲\frac{\cos ۲x+۴\cos x+۳}{۲}=۲+۴a$$

حل:

$$\log_۲\frac{\cos ۲x+۴\cos x+۳}{۲}=\log_۲\frac{۲\cos^۲ x-۱+۴\cos x+۳}{۲}$$

$$=\log_۲\frac{۲\cos^۲ x+۴\cos x+۲}{۲}=\log_۲(\cos^۲ x+۲\cos x+۱)$$

$$=\log_۲(۱+\cos x)^۲=\log_۲(۲\cos^۲\frac{x}{۲})^۲=\log_۲ ۲^۲.\cos^۴\frac{x}{۲}$$

$$=\log_۲ ۲^۲+\log_۲\cos^۴\frac{x}{۲}=۲\log_۲ ۲+۴\log_۲\cos\frac{x}{۲}=۲+۴a$$

مسئلهٔ ۵: اگر $\sin(۲x+y)=۲\sin y$ و $۰<x,y<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\tan(x+y)=۳\tan x$$

حل: فرض می‌شود $x+y=a \Rightarrow y=a-x$

داریم: $\sin(۲x+y)=۲\sin y$

$$\sin(x+\underbrace{x+y}_{a})=۲\sin(y)$$

$$\sin(x+a)=۲\sin(a-x)$$

$$\sin x.\cos a+\cos x\sin a=۲(\sin a\cos x-\cos a\sin x)$$

$$\sin x.\cos a+\cos x\sin a=۲\sin a\cos x-۲\cos a\sin x$$

$$\Rightarrow ۳\sin x.\cos a=\sin a.\cos x$$

دو طرف این تساوی را بر $\cos a\cos x\neq ۰$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۳\sin x\cos a}{\cos a.\cos x}=\frac{\sin a\cos x}{\cos a.\cos x}\Rightarrow ۳\tan x=\tan a$$

$$\Rightarrow ۳\tan x=\tan(x+y)\quad ▲$$

مسئله ۶: اگر $\sin^۲ x-\sin ۳x.\sin x=-\frac{۱}{۴}$، آن‌گاه ثابت کنید: $\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$

حل:

$$\sin^۲ x-\sin ۳x.\sin x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \underbrace{۲\sin^۲ x}-\underbrace{۲\sin ۳x.\sin x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos ۲x-[\cos(۳x-x)-\cos(۳x+x)]=\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos ۲x-(\cos ۲x-\cos ۴x)=-\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\cos ۲x-\cos ۲x+\underbrace{\cos ۴x}=-\frac{۱}{۲}$$

$$۲\cos^۲ ۲x-۲\cos ۲x+\frac{۱}{۲}=۰$$

$$\cos^۲ ۲x-\cos ۲x+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow(\cos ۲x-\frac{۱}{۲})^۲=۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x-\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow \cos ۲x=\frac{۱}{۲}\quad ▲$$

مسئلهٔ ۷: اگر $\frac{\sin^۴ x}{a}+\frac{\cos^۴ x}{b}=\frac{۱}{a+b}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\frac{\sin^۸ x}{a^۳}+\frac{\cos^۸ x}{b^۳}=\frac{۱}{(a+b)^۳}$$

حل:

فرض می‌شود $\sin^۲ x=y$، $\frac{\sin^۴ x}{a}+\frac{\cos^۴ x}{b}=\frac{۱}{a+b}$

$$\frac{y^۲}{a}+\frac{(۱-\sin^۲ x)^۲}{b}=\frac{۱}{a+b}\Rightarrow \frac{y^۲}{a}+\frac{(۱-y^۲)^۲}{b}=\frac{۱}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در a.b ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{y^۲}{a}+\frac{y^۲-۲y+۱}{b}=\frac{۱}{a+b}$$

$$by^۲+ay^۲-۲ay+a=\frac{a.b}{a+b}$$

$$\Rightarrow (a+b)y^۲-۲ay+a=\frac{ab}{a+b}$$

دو طرف تساوی را در (a+b) ضرب می‌کنیم

$$(a+b)^۲y^۲-۲a(a+b)y+a^۲+ab=ab$$

$$(a+b)^2y^2-2a(a+b)y+a^2=0$$

$$\Rightarrow [(a+b)y-a]^2=0 \Rightarrow (a+b)y-a=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{a+b} \Rightarrow \sin^2 x=\frac{a}{a+b}$$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{a}{a+b} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{(\sin^2 x)^4}{a^3}+\frac{(\cos^2 x)^4}{b^3}$$

$$=\frac{(\frac{a}{a+b})^4}{a^3}+\frac{(\frac{b}{a+b})^4}{b^3}=\frac{\frac{a^4}{(a+b)^4}}{a^3}+\frac{\frac{b^4}{(a+b)^4}}{b^3}$$

$$=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$$ ▲

مسئلهٔ ۸: اگر $\sin 2x \neq 0$ و $\frac{\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x-1}\equiv a\sin x+b\cos x+c$، آن‌گاه ثابت کنید: $a=b=c=\frac{1}{2}$

حل:

$$\frac{\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x-1}=\frac{\sin x.\cos x}{(\sin x+\cos x)-1}\times\frac{(\sin x+\cos x)+1}{(\sin x+\cos x)+1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x+\cos x)^2-1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x\cos x-1}$$

$$=\frac{\sin x.\cos x(\sin x+\cos x+1)}{2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x+1}{2}=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\equiv a\sin x+b\cos x+c$$

$$\Rightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$$ ▲

مسئلهٔ ۹: اگر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+bx-1=0$ باشند، ثابت کنید: $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=2$

حل:

$$x^2+bx-1=0 \qquad x'=\sin\alpha \;,\; x''=\cos\alpha$$

$$\tan^3\alpha+\cot^3\alpha=\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{\sin^6 x+\cos^6\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})\left[\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha\right]}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{(\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1})^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{1-3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha.\cos^3\alpha}=\frac{1-3(\sin\alpha.\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha.\cos\alpha)^3}=\frac{1-3(\frac{c}{a})^2}{(\frac{c}{a})^3}$$

$$=\frac{1-3(-1)^2}{(-1)^3}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$ ▲

مسئلهٔ ۱۰: ثابت کنید $\frac{1-4\sin 10^\circ}{\tan 20^\circ}=\tan 40^\circ$

حل:

$$\frac{1-4\sin 10^\circ}{\tan 20^\circ}=\frac{1-4\sin 10^\circ}{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}=\frac{\cos 20^\circ(1-4\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ-4\cos 20^\circ\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-2(2\cos 20^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\cos 20^\circ-2(\sin 30^\circ-\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-2(\frac{1}{2}-\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ.\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1-2\sin^2 10^\circ-1+2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ(1-\sin 10^\circ)}{2\sin 10^\circ.\cos 10^\circ}$$

رابطهٔ (I) $$=\frac{1-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{\cos 10^\circ}-\tan 10^\circ$$

از طرفی می‌توان نوشت:

$$\tan 40^\circ+\tan 10^\circ=\frac{\sin(40^\circ+10^\circ)}{\cos 40^\circ.\cos 10^\circ}=\frac{\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1}{\cos 10^\circ}$$

در رابطهٔ (I) به جای $\frac{1}{\cos 10^\circ}$ مساوی‌اش $(\tan 40^\circ+\tan 10^\circ)$ را قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{\cos 10^\circ}-\tan 10^\circ=\tan 40^\circ+\tan 10^\circ-\tan 10^\circ=\tan 40^\circ$$ ▲

ریاضیات در سینمای جهان

اسم فیلم: بایست و سخن بگو[1]

احسان یارمحمدی

کلیدواژه‌ها:
یایمه اسکالانته، آموزش ریاضی، دانش‌آموزان متوسطه، حسابان مقدماتی، مثلثات، آنالیز ریاضی، حساب دیفرانسیل و انتگرال

کارگردان[2]: رامون مِنِندِز[3]
تهیه‌کننده: تام موسکا[4]
نویسندگان: رامون مِنِندِز و تام موسکا
بازیگران: اِدوارد جِیمز اُلموس[5]، لُو دایموند فیلیپس[6]، روزانا دِسوتو[7] و اَندی گارسیا[8]
موسیقی[9]: کِریگ سافان[10]
فیلم‌برداری[11]: تام ریچموند[12]
ویرایش: نانسی ریچاردسون[13]
پخش: وارنر بروس[14]
تاریخ اکران: ۱۱ مارس[15] ۱۹۸۸
مدت فیلم: ۱۰۲ دقیقه
محصول: ایالات متحد آمریکا
زبان: انگلیسی[16]

فیلم «بایست و سخن بگو» یک فیلم از نوع درام آمریکایی است. این فیلم براساس یک داستان واقعی از زندگی یک معلم ریاضی دبیرستان به نام **یایمه اِسکالانته**[18] ساخته شده است. **اِدوارد جِیمز اُلموس** برای ایفای نقش یایمه اِسکالانته در این فیلم نامزدی دریافت جایزهٔ اسکار بهترین بازیگر مرد را به خود اختصاص داده است.

در قسمت شرقی شهر لس‌آنجلس[19] در ایالت کالیفرنیا[20] در سال ۱۹۸۲ میلادی در محیط آموزشی که ارزش‌ها در آن براساس آموزش و یادگیری سریع و سطحی است، یک معلم ریاضی جدید و تازه‌وارد به نام یایمه اِسکالانته به دبیرستان گارفیلد[21] وارد می‌شود و تصمیم می‌گیرد این سیستم آموزشی را تغییر دهد و دانش‌آموزان را برای دریافت و موفقیت بهتر و بیشتر وارد چالش و رقابت علمی و آموزشی کند. او شغل ثابت خود را برای احراز موقعیتی در قالب یک معلم ریاضی در یک دبیرستان که دانش‌آموزان آن در زمرهٔ افراد یاغی و سرکش هستند، رها می‌کند. در این مدرسه تمرکز اصلی معلمان و دست‌اندرکاران آن به علت تمرد و عصیان دانش‌آموزان بر نظم و انضباط و تأدیب دانش‌آموزان خاطی است و نه مسائل علمی و آموزشی. یایمه اِسکالانته در ابتدا برای دانش‌آموزان این مدرسه دوست‌داشتنی نیست و از جانب دانش‌آموزان طعنه‌ها، سرزنش‌ها و تهدیدهای بسیاری را تحمل می‌کند. بعد از گذشت مدت زمانی، او با ارائه و اجرا کردن روش‌های آموزشی، ابتکاری و تازه، موفق به جلب توجه دانش‌آموزان به موارد علمی و آموزشی می‌شود. او این توانایی را دارد که حتی مسائل و موضوعات بسیار سخت و دردسرساز را به مواردی قابل درک و فهم برای دانش‌آموزان تبدیل کند. هنگامی که یایمه اِسکالانته دروس جبر[22] و مبانی حساب[23] را با روشی خلاقانه برای ایشان تدریس می‌کند، به این درک و بینش می‌رسد که دانش‌آموزان وی از استعداد نهانی و بالقوهٔ بسیار در این زمینه‌ها برخوردارند. او تصمیم می‌گیرد برای دانش‌آموزان خود حساب دیفرانسیل و انتگرال[24] تدریس کند. او در یک دورهٔ آموزشی تابستانی برای موضوع حسابان مقدماتی[25] که دربرگیرندهٔ مثلثات[26]، جبر پیشرفته[27] و آنالیز ریاضی[28]



است، این کار را انجام می‌دهد. هنگام اجرایی‌کردن تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال نگرانی‌هایی برای یایمه اِسکالانته به‌وجود می‌آید ریشه بیشتر این نگرانی‌ها تردیدهایی است که معلمان دیگر دبیرستان بانی و باعث انتقال آن‌ها به وی هستند، زیرا آنان اعتقاد دارند که به این دانش‌آموزان بی‌سواد و درس نخوانده نمی‌توان مواردی مانند لگاریتم[29] و... را تدریس و تفهیم کرد. با وجود این، او تصمیم می‌گیرد با طراحی و تدوین یک برنامهٔ مناسب درسی از ساعت ۷ صبح تا ظهر در طول تابستان و در تمام روزهای هفته و نیز با تقویت این دیدگاه در دانش‌آموزان که شرکت در این کلاس‌ها برای دریافت گواهینامهٔ پایان تحصیلات دبیرستانی درخصوص دانش‌آموزان سال آخر دنبال مفید و کارآمد است، در توسعه و پیشبرد هدف خود گامی مؤثر را بردارد.

هنگامی که دانش‌آموزان دیگر در طول تابستان مشغول انجام کارهای پاره‌وقت یا سرگرم مسائل دوران نوجوانی و ورود آن به دنیای جوانی هستند، دانش‌آموزان یایمه اِسکالانته به فراگیری و یادگیری قضیه‌های پیچیده و نیز فرمول‌های ریاضی می‌پردازند. البته در این میان، دانش‌آموزان با چالش دیگری مواجه‌اند و آن برقرار کردن تعادل بین انتظارات افراد بزرگسال و به‌ویژه والدین از آن‌ها و بلندپروازی‌ها و آرزوهای جاه‌طلبانهٔ خود آن‌هاست. با کمک‌هایی که یایمه اِسکالانته برای آن‌ها انجام می‌دهد، دانش‌آموزان سریع جرأت و جسارت لازم برای جدا کردن و تمایز بین انتظارات جامعه از آن‌ها و افزایش استانداردهای لازم برای زندگی مناسب را به‌دست می‌آورند. پس از گذراندن امتحان درس حساب دیفرانسیل و انتگرال در فصل بهار در سال آخر تحصیل، دانش‌آموزان از این‌که سال گذشته را با فعالیت و شیوه جالبی گذرانده‌اند، احساس راحتی و لذت بیش از حد دارند. دانش‌آموزان بعد از این‌که نمرات خود را دریافت می‌کنند، هیجان‌زده می‌شوند و پیش خود می‌اندیشند که توانسته‌اند همهٔ دروس را با موفقیت پشت‌سر بگذارند.

اما بعد از تابستان یک اتهام ناجوانمردانه به کار معلم و نمرات دانش‌آموزان وارد می‌شود به گونه‌ای که مرکز برگزاری امتحانات اعلام می‌کند، که آن‌ها با بررسی نمرات دانش‌آموزان و تشابه بین پاسخ‌های درست و نادرست آنان به سؤالات امتحان پی به این موضوع برده‌اند که احتمال تقلب در این امتحان زیاد است.

بعد از مطرح شدن این موضوع، یایمه اِسکالانته پی می‌برد که شرایط اقتصادی و نیز نژادی باعث شده است تا مرکز برگزاری امتحانات به هوش و استعداد دانش‌آموزان وی شک و تردید کنند. بنابراین برای اثبات شایستگی دانش‌آموزانش تصمیم بر این می‌شود که امتحان مجددی از ایشان به عمل آید و این در حالی است که آن‌ها تنها یک روز برای آماده شدن در این آزمون فرصت دارند و نیز معلم آن‌ها به دانش‌آموزان گوشزد کرده است که امتحان مجدد به مراتب سخت‌تر و دشوارتر از نخستین امتحان است. بعد از اعلام نتایج امتحان مجدد که در آن تمام دانش‌آموزان موفق به گذراندن این درس شده‌اند، یایمه اِسکالانته به رئیس دبیرستان می‌گوید که نمرات دانش‌آموزان در اولین آزمون را نیز برای ایشان به ثبت برساند.

یایمه اِسکالانته معلم ریاضی پر تلاش با ایده‌هایی نو، که این فیلم با الهام از زندگی او ساخته شده است، سرانجام به علت بیماری سرطان مثانه[30] در منزل پسرش در تاریخ سی‌ام مارس[31] سال ۲۰۱۰ بدرود حیات گفت.

پی‌نوشت

1. Stand and Deliver
2. Director
3. Ramon Menendez
4. Tom Musca
5. Edward James Olmos
6. Lou Diamond Phillips
7. Rosanna Desoto
8. Andy Garsia
9. Music
10. Craig Safan
11. Cinematography
12. Tom Richmond
13. Nancy Richardson
14. Warner Bros
15. March
16. English
17. Jaime Escalante
18. Los Angeles
19. California
20. Garfield
21. Algebra
22. Basic Arithmetic
23. Calculus
24. Pre-Calculus
25. Trigonometry
26. Advanced Algebra
27. Math Analysis
28. Logarithm
29. Bladder Cancer
30. March

المپیادهای ریاضی

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها:
المپیاد ریاضی، ماتریس، دترمینان، رومانی

ماتریس‌ها

مسائل این بخش را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های ماتریس‌هایی حل کرد که شامل ساختار سطر ـ ستونی نیستند. مثال زیر نمونه‌ای از این ماتریس‌هاست:

مثال: ثابت کنید اگر A و B ماتریس‌های n×n باشند، آن‌گاه:
$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$

حل: برای حل این مسئله، ابتدا B را وارون‌پذیر در نظر می‌گیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:
$$(I_n - AB) = B^{-1}(I_n - BA)B$$
و در نتیجه:
$$\det(I_n - AB) = \det(B^{-1})\det(I_n - BA)\det B$$
$$= \det(I_n - BA)$$

اگر B وارون‌پذیر نباشد، به‌جای آن، ماتریس $B_x = xI_n + B$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $\det(xI_n - B)$ یک چندجمله‌ای برحسب x است، ماتریس‌های B_x به ازای جمیع مقادیر x جز تعدادی متناهی از آن‌ها وارون‌پذیرند. بنابراین می‌توانیم از اولین بخش اثبات استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که به ازای جمیع مقادیر x، به استثنای تعدادی متناهی از آن،
$$\det(I_n - AB_x) = \det(I_n - B_x A)$$
اما این دو دترمینان چند جمله‌ای‌هایی برحسب x اند که به ازای بی‌نهایت مقدار x برابرند. بنابراین باید جملات برابر باشند، به‌خصوص به ازای $x = 0$،
$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$$
در نتیجه، ملاحظه می‌کنیم اگر $I_n - AB$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $I_n - BA$ نیز وارون‌پذیر است. در این‌جا اثباتی مستقیم از این استلزام به‌دست می‌دهیم. اگر V وارون $I_n - AB$ باشد، آن‌گاه $V(I_n - AB) = I_n$ و در نتیجه $VAB = V - I_n$. بنابراین داریم:
$$(I_n + BVA)(I_n - BA) = I_n - BA + BVA - BVABA$$
$$= I_n - BA + BVA - B(V - I_n)A = I_n$$
در نتیجه: $I_n + BVA$ وارون $I_n - BA$ است.

مسائل

۱. فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس مربع و چنان باشند که A+B=AB . ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی ۴×۵ و B ماتریسی ۵×۴ باشند، آن‌گاه
$$\det(AB - I_5) + \det(BA - I_4) = 0$$

۳. فرض می‌کنیم x ،y و z ماتریس‌هایی n×n و چنان باشند که:
$$x + y + z = xy + yz + z.x$$
ثابت کنید برابری‌های زیر هم ارزند:
$$xyz = xz - zx$$
$$yzx = yx - xy$$
$$zxy = zy - yz$$

۴. نشان دهید به ازای هر دو ماتریس n×n از B و A، اتحاد زیر برقرار است:
$$\det(I_n - BA) = \det\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

۵. فرض می‌کنیم N یک ماتریس n×n و چنان باشد که $A^n = \alpha A$ (α عددی حقیقی و متفاوت از ۱ و ۱- است). ثابت کنید ماتریس $A+I_n$ وارون‌پذیر است.

۶. اگر A و B ماتریس‌هایی متفاوت و برقرار کنندهٔ $A^3 = B^3$ و $A^2B = B^2A$ باشند، $AB = o_n$ را بیابید.



حل مسائل

۱. از آن‌جا که $AB - A - B = o_n$، با افزون I_n به دو طرف رابطه و تجزیه به‌دست می‌آوریم:

$$(I_n - A)(I_n - B) = I_n$$

نتیجه می‌گیریم که $I_n - A$ وارون‌پذیر و وارون آن $I_n - B$ است. در نتیجه:

$$(I_n - B)(I_n - A) = I_n$$

که مستلزم $AB - A - B = o_n$ است. در نتیجه خواهیم داشت: $BA = A + B = AB$

۲. برای به‌دست آوردن ماتریس‌های ۵×۵ از A' و B'، ماتریس‌ها را با صفرها تکمیل می‌کنیم. ماتریس $A'B'$ برابر AB است، در حالی‌که BA، $B'A'$ را در گوشهٔ بالا و چپ دارد و هر جای دیگر صفر است. اتحاد مربوط به دترمینان‌ها که در ابتدای بخش مورد بحث قرار گرفت، مستلزم این است که:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - B'A')$$

بنابراین داریم:

$$\det(I_5 - A'B') = \det(I_5 - AB) = (-1)^5 \det(AB - I_5)$$

نیز از آن‌جا که تنها عنصر ناصفر واقع در سطر آخر $I_5 - B'A'$ در گوشهٔ راست و پایین، ۱ است، و کهاد متناظر $\det(I_4 - BA)$ است، درمی‌یابیم که:

$$\det(I_5 - B'A') = \det(I_4 - BA) = (-1)^4 \det(AB - I_4)$$

و نتیجه به‌دست می‌آید.

۳. با فرض $x + y + z = xy + yz + zx$
ملاحظه می‌کنیم که $xyz = xz - zx$
هم ارز با $xyz + x + y + z = xz - zx + xy + yz + zx$
است. در این صورت داریم:

$$(x - I_n)(y - I_n)(z - I_n)$$
$$= xyz - xy - yz - xz + x + y + z - I_n$$
$$= -I_n$$

و ماتریس‌های $(x - I_n)$ و $(y - I_n)$ و $(z - I_n)$ وارون‌پذیرند. با جایگشت دوری گرفتن از عامل‌ها (یعنی با ضرب در سمت راست عامل و وارون آن در چپش) برای مثال،

$$(z - I_n)(x - I_n)(y - I_n) = -I_n$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین:

$$zxy - xy - zy - zx + x + y + z = o_n$$

که هم ارز است با: $zxy = zy - yz$

۷. ثابت کنید اگر A ماتریسی $n×n$ با درایه‌های حقیقی باشد، در این صورت:

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0$$

۸. نشان دهید اگر A و B ماتریس‌هایی $n×n$ با درایه‌های حقیقی باشند و $AB = o_n$، آن‌گاه به ازای اعداد صحیح و مثبت p و q داریم:

$$\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) \geq 0$$

۹. فرض می‌کنیم A، B و C ماتریس‌هایی $n×n$ باشند که دوبه‌دو تعویض‌پذیرند و $ABC = o_n$، ثابت کنید

$$\det(A^3 + B^3 + C^3)\det(A + B + C) \geq 0$$

۱۰. فرض می‌کنیم p و q اعداد حقیقی و چنان باشند که به ازای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$x^2 + px + q \neq 0$$

ثابت کنید اگر n عددی صحیح و مثبت و فرد باشد، آن‌گاه به ازای جمیع ماتریس‌های حقیقی x از مرتبهٔ $n×n$ داریم:

$$x^2 + px + qI_n \neq o_n$$

۱۱. فرض می‌کنیم A و B دو ماتریس $n×n$ باشند و $C = AB - BA$. نشان دهید اگر C هم با A و هم با B تعویض‌پذیر باشد، آن‌گاه عدد صحیحی مانند m چنان موجود است که:

$$C^m = o_n$$

این موضوع ثابت می‌کند که اولین برابری از گروه سه‌تایی مستلزم آخری است. با جایگشت حروف، درمی‌یابیم که سه برابری هم‌ارزند.

(مسابقهٔ ریاضی رومانی، ۱۹۸۵: طرح از T.Andreescu و I.V maftei)

۴. برابری

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_n & -A \\ o_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & o_n \\ B & I_n - AB \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که ماتریس ۲n×۲n صورت مسئله را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب ماتریسی با دترمینان برابر یک و ماتریسی با دترمینان برابر $\det(I_n - AB)$ نوشت. بنابراین خواهیم داشت:

$$\det \begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I_n & o_n \\ B & I_n - AB \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_n & -A \\ o_n & I_n \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \det(I_n - AB)$$

۵. فرض می‌کنیم $B = A + I_n$. از آن‌جا که $A = B - I_n$، شرط $A^n = \alpha A$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(B - I_n)^n = \alpha(B - I_n)$$

این موضوع مستلزم

$$B^n - \binom{n}{1} B^{n-1} + \binom{n}{2} B^{n-2} + \dots + (-1)^n I_n = \alpha B - \alpha I_n$$

یا

$$B^n - \binom{n}{1} B^{n-1} + \binom{n}{2} B^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} B - \alpha B$$
$$= \alpha I_n - (-1)^n I_n$$

است. به این ترتیب داریم:

$$B(B^{n-1} - \binom{n}{1} B^{n-2} + \binom{n}{2} B^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} I_n - \alpha I_n)$$
$$= ((-1)^{n+1} - \alpha) I_n$$

که به روشنی نشان می‌دهد B وارون‌پذیر است، زیرا $(-1)^{n+1} - \alpha \neq 0$

(المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۸۰؛ طرح از c.cocea)

۶. داریم:

$$(A^2 + B^2)(A - B) = A^3 - A^2 B + AB^2 - B^3 = o_n$$

چون $A \neq B$، این رابطه نشان می‌دهد که $A^2 + B^2$ دارای یک مقسوم‌علیه صفر است. در نتیجه وارون‌پذیر نیست و بنابراین دترمینانش ۰ است.

(پنجاه و یکمین مسابقهٔ ریاضی پاتنام، ۱۹۹۱)

۷. می‌نویسیم

$$A^2 + I_n = (A + iI_n)(A - iI_n)$$

که i آن واحد موهومی است. اگر λ_1، λ_2، ...، λ_n ویژه‌مقدارهای A باشند، آن‌گاه ویژه‌مقدارهای $A+iI_n$ عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 + i.\lambda_2 + i, \dots, \lambda_n + i$$

در نتیجه داریم:

$$\det(A + iI_n) = (\lambda_1 + i)(\lambda_2 + i)\dots(\lambda_n + i)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(A - iI_n) = (\lambda_1 - i)(\lambda_2 - i)\dots(\lambda_n - i)$$

از آن‌جا که A دارای درایه‌های حقیقی است، ویژه‌مقدارهای مختلطش در جفت‌های اعداد مزدوج ظاهر می‌شوند. با استفاده از فرمول‌های

$$(a + bi + i)(a - bi + i) = (a^2 + b^2 - 1) + 2ai$$

و

$$(a + bi - i)(a - bi - i) = (a^2 + b^2 - 1) - 2ai$$

ملاحظه می‌کنیم که $\det(A + iI_n)$ و $\det(A - iI_n)$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب‌های جمله‌ای نوشت که مزدوج مختلط یکدیگرند. در نتیجه، خود دترمینال‌ها مزدوج‌های مختلط یکدیگرند و این مستلزم آن است که حاصل‌ضربشان عددی حقیقی و نامنفی باشد.

۸. بنا به مسئلهٔ پیشین داریم:

$$\det(I_n + A^{2p}) \geq 0$$

و

$$\det(I_n + B^{2q}) \geq 0$$

از $AB = o_n$ به دست می‌آوریم:

$$A^{2p} B^{2q} = o_n \quad AB = o$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\det(I_n + A^{2p} + B^{2q}) = \det(I_n + A^{2p} + B^{2q} + A^{2p} B^{2q})$$
$$= \det((I_n + A^{2p})(iI_n + B^{2q}))$$
$$= \det(I_n + A^{2p}) \det(I_n + B^{2q}) \geq o_n$$

(M. and S. Rădulescu)

۹. فرض می‌کنیم $w \neq 1$ ریشهٔ سوم واحد باشد. از آن‌جا که A، B و C تعویض‌پذیرند و

$$ABC = o_n$$

می‌توان نوشت:

$$A^3 + B^3 + C^3 = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

$$= (A+B+C)(A^{2}+B^{2}+C^{2}-AB-BC-CA)$$
$$= (A+B+C)(A+wB+w^{2}C)(A+w^{2}B)$$
$$= (A+B+C)(A+wB+w^{2}C)\overline{(A+wB+w^{2}C)}$$

در نتیجه:

$$\det(A^{3}+B^{3}+C^{3})\det(A+B+C)$$
$$= \det((A+B+C)^{2})\det(A+wB+w^{2}C)\det\overline{(A+wB+w^{2}C)}$$
$$= (\det((A+B+C))^{2}\det(A+wB+w^{2}C)\det\overline{(A+wB+w^{2}C)}$$
$$= (\det(A+B+C))^{2}\left|\det(A+wB+w^{2}C)\right|^{2} \geq 0$$

۱۰. فرض می‌کنیم به ازای ماتریس $n\times n$ از x داشته باشیم:

$$X^{2}+pX+qI_n = o_n$$

این برابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(X+\frac{p}{2}I_n)^{2} = \frac{p^{2}-4q}{4}I_n$$

با دترمینان گرفتن از دو طرف و استفاده از این موضوع که $\det(AB)=\det A$

به دست می‌آوریم

$$(\det(X+\frac{p}{2}I_n))^{2} = (\frac{p^{2}-4q}{4})^{n}$$

سمت چپ این این رابطه نامنفی است و سمت راست آن بنا به فرض، اکیداً منفی است و این تناقض، اثبات را به پایان می‌رساند.

(المپیاد ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu و I.D. Ion)

۱۱. ابتدا باید توجه داشته باشیم که اگر فرض کنیم

$$p(x) = \det(xI_n - B)$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ B باشد، آن‌گاه بنا به قضیهٔ کوشی ـهمیلتون،

$$p(B) = o_n$$

از آن‌جا که C با هر دو مورد A و B تعویض می‌شود، داریم:

$$AB^{2}-B^{2}A = (AB-BA)B+B(AB-BA)$$
$$= BC+CB = 2BC$$

با اســتقرا نشان می‌دهیم که به ازای هر $k>0$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB^{k}-B^{k}A = kB^{k-1}C$$

این رابطه به ازای $k=1,2$، برقرار است و با این فرض که به ازای $k-1$ نیز برقرار باشد، داریم

$$AB^{k}-B^{k}A = (AB-BA)B^{k-1}+B(AB^{k-1}-B^{k-1}A)$$
$$= CB^{k-1}-B(k-1)B^{k-2}C = kB^{k-1}C$$

که ادعا را به اثبات می‌رساند.

به عنوان نتیجه، به ازای هر چند جمله‌ای q داریم:

$$Aq(B)-q(B)A = q'(B)C$$

که در آن q' مشتق q است؛ به خصوص

$$o_n = A_p(B)-p(B)A = p'(B)C$$

و در نتیجه:

$$Ap'(B)C-p'(B)AC = p''(B)C^{2} = o_n$$

بنابراین، به‌طور استقرایی به‌دست می‌آوریم:

$$p^{(k)}(B)C^{k} = o_n$$

به‌خصوص که:

$$n!C^{n} = o_n$$

و به این ترتیب، خواهیم داشت $C^{n}=o_n$؛ و کار تمام است.

(All Union University Student Olympiad, 1976)

اسم وبگاه: Basic Mathematics

نشانی وبگاه: http://www.basic-mathematics.com



ایــن وبگاه عناوین گوناگونــی از ریاضی را به صورت درک عمیق و پایه‌ای در قالب مفاهیم و عملیات ریاضی به صورت منظم و به شــکل موضوعات مرتّب‌شــده به کاربر آموزش می‌دهد. صفحهٔ اصلی این ســایت شــامل عناوین زیر است که هریک از آن‌ها زیرعنوان‌هایی دارند و در آن‌ها به تفصیل به یک موضوع پرداخته شده است.

- مقدمه (Introduction)
- حساب (Arithmetic)
- هندسه (Geometry)
- احتمال و آمار (Probability and Statistics)
- دنباله‌ها و الگوها (Sequences and Patterns)
- جبر (Algebra)
- منابع (Resources)
- معلمان (Teachers)

آموزش

۲

نظریه اعداد

برای دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی

حمیدرضا امیری

کلیدواژه‌ها: استقراء، بخش‌پذیری، خوش‌ترتیبی، عاد کردن، مبناها، شمارنده، اعداد اول.

چکیده

دراین مقاله نکات مهّم بخش‌هایی از نظریهٔ اعداد، استفاده شده در کنکورهای سراسری و آزاد، همراه با کاربرد آن‌ها در حل مسائل و پرسش‌های ۴ گزینه‌ای، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نکات مربوط به اعداد مربع کامل

I) اگر عددی مربع کامل باشد، در تجزیهٔ آن عدد به حاصل ضرب اعداد اول، همهٔ توان‌ها زوج‌اند.

مثال: کوچک‌ترین عددی را که می‌توان در عدد !۸ ضرب کرد تا حاصل عددی مربع کامل باشد، به دست آورید.

حل: $8! = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$ یا $8! = 2^7\times 3^2\times 5\times 7$ که اگر عدد $k = 2\times 5\times 7$ در آن ضرب شود، به صورت $k8! = 2^8\times 3^2\times 5^2\times 7^2$ در می‌آید و چون توان‌ها همگی زوج‌اند، مربع کامل است.

II) اگر عددی مربع کامل باشد، باید به یکی از ارقام ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۹ ختم شود و لذا اگر عددی به ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ ختم شود، آن عدد مربع کامل نیست.

III) اگر عددی فرد و مربع کامل باشد، همواره باید به صورت $(8k+1)$ باشد. لذا اگر عددی فرد باشد و به شکل $(8k+1)$ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست.

IV) اگر عددی زوج و مربع کامل باشد، همواره باید بر ۴ نیز بخش‌پذیر باشد. بنابراین اگر عددی زوج باشد و بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه مربع کامل نیست.

V) اگر عددی مضرب ۳ و مربع کامل نیز باشد همواره باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد. لذا اگر عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۹ بخش‌پذیر نباشد آن‌گاه مربع کامل نیست.

و به‌طور کلّی اگر «عددی بر عدد اولِ p بخش‌پذیر و مربع کامل باشد، آن‌گاه همواره بر p^2 بخش‌پذیر است؛ و لذا اگر عددی بر p بخش‌پذیر باشد ولی بر p^2 بخش‌پذیر نباشد و p اول باشد، آن‌گاه آن عدد مربع کامل نیست.»

VI) هر عددی که مربع کامل باشد به یکی از دو صورت $3k$ و یا $3k+1$ است. بنابراین اگر عددی به شکل $3k$ و یا $3k+1$ نباشد آن‌گاه مربع کامل نیست.

زیرا:

$$\begin{cases} a = 3k \Rightarrow a^2 = 9k^2 = 3t \\ a = 3k+1 \Rightarrow a^2 = 9k^2+6k+1 = 3t+1 \\ a = 3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2+12k+4 \\ = 9k^2+12k+3+1 = 3t'+1 \end{cases}$$

نکات مربوط به شمارنده‌های یک عدد

اگر عدد طبیعی m را به صورت استاندارد $m = p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه کنیم (p_iها اعداد اول و α_i ها اعداد حسابی‌اند)، در این صورت:

I) تعداد شمارنده‌های مثبتِ عدد m از رابطهٔ $T(m)=(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\dots(\alpha_k+۱)$ به دست می‌آید و بنابراین تعداد کلِ شمارنده‌های عدد m، برابر است با $۲T(m)$.

II) حاصل ضرب شمارنده‌های مثبتِ عدد m از رابطه $m^{\frac{T(m)}{۲}}$ به دست می‌آید و حاصل جمع آن‌ها از رابطهٔ $\frac{P_۱^{\alpha_۱+۱}-۱}{P_۱-۱}\times\dots\times\frac{P_k^{\alpha_k-۱}-۱}{p_k-۱}$ محاسبه می‌شود.

III) اگر m مربع کامل باشد، چون همهٔ α_iها زوج هستند، پس همهٔ $(\alpha_i+۱)$ها فرد خواهند بود و بنابراین T(m) فرد است و اگر m مربع کامل نباشد، حداقل یکی از α_iها فرد است و لذا حداقل یکی از $(\alpha_i+۱)$ها زوج است و در نتیجه T(m) زوج خواهد بود.

مثال: عدد ۲۸۰۰ چند **شمارنده** دارد؟

$۲۸۰۰=۲۸\times۱۰۰=۲^۲\times۷\times۲^۲\times۵^۲=۲^۴\times۵^۲\times۷$

$T(۲۸۰۰)=(۴+۱)\times(۲+۱)\times(۱+۱)=۳۰$

$\Rightarrow ۲T(۲۸۰۰)=۲\times۳۰=۶۰$

پس ۲۸۰۰ دارای ۶۰ شمارنده است.

تست: چند عدد طبیعی مانند x وجود دارد به قسمی که $۱۲۰|(x+۲)$.

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

$۱۲۰=۶\times۲۰=۲\times۳\times۴\times۵=۲^۳\times۳\times۵$

$T(۱۲۰)=(۳+۱)\times(۱+۱)\times(۱+۱)=۱۶$

$x\in N \Leftrightarrow x\ge۱ \Leftrightarrow x+۲\ge۳$

چون باید $x+۲\ge۳$ تا $x\in N$ باشد لذا (x+۲) نمی‌تواند ۱+ یا ۲+ باشد. بنابراین ۱۴ حالت برای (x+۲) قابل قبول است.

تعریف: اگر p عددی اول باشد و k بزرگ‌ترین توانی باشد که $p^k|n$؛ در این صورت می‌نویسیم: $p^k\|n$.

مثال: اگر $۵^۷\|n$، در این صورت برای هر $t>۷$ داریم $۵^t\nmid n$ ولی همواره $۵^۷|n$ و برای هر $m<۷$ نیز $۵^m|n$.

تعداد عامل‌های عدد اول p در n!

اگر p عددی اول باشد، در این صورت تعداد عامل‌های p در n! از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد عامل‌های p در n!}=[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^۲}]+[\frac{n}{p^۳}]+\dots+۰+۰+\dots$$

(چون $p\ge۲$ و n ثابت است، همواره از توانی چون k به بعد $p^k>n$ است و $۰<\frac{n}{p^k}<۱$ و $[\frac{n}{p^k}]=۰$ خواهد بود.)

تست: اگر $۵^k\|۴۲!$ مقدار k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

باید بزرگ‌ترین عددی چون k را بیابیم که $۵^k\|۴۲!$، یعنی تعداد عامل‌های ۵ در !۴۲؛ که طبق مطالب قبلی این تعداد برابر است با: $[\frac{۴۲}{۵}]+[\frac{۴۲}{۲۵}]=۸+۱=۹$

تست: در سمت راست عدد !۷۳ چند صفر وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۳

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

در یک حاصل ضرب به ازای هر ۲ و ۵ عدد ۱۰ یعنی یک صفر در سمت راست عدد حاصل تولید می‌شود و چون ۵>۲، تعداد عامل‌های ۵ در !۷۳ کم‌تر از تعداد عامل‌های ۲ است و لذا عامل‌های ۵ همان تعداد صفرها در سمت راستِ عدد !۷۳ است:

$[\frac{۷۳}{۵}]+[\frac{۷۳}{۲۵}]=۱۴+۲=۱۶$

تذکر مهم: در حالت کلّی «تعداد صفرهای سمت راستِ عدد !n برابر است با تعداد عامل‌های ۵ در !n» و تعداد عامل‌های عدد $k=p\times q$ (p و q عدد اول هستند) که در آن p>q، در عدد !n برابر است با تعداد عامل‌های عدد p در !n.

برای مثال، تعداد عامل‌های عدد ۲۱ در !n برابر است با تعداد عامل‌های عدد ۷ در !n. (۲۱=۷×۳)

هم‌چنین اگر عدد k به صورت $k=p^m$ باشد، تعدادی عامل‌های k در !n را به این صورت به دست می‌آوریم که ابتدا تعداد عامل‌های p را در !n محاسبه و عدد حاصل را بر m تقسیم می‌کنیم (هر m تا p یک عدد k تولید می‌کند) و جزء صحیح این تقسیم جوابِ مسئله است.

مثال: در عدد !۶۹ چند عامل ۸۱ وجود دارد؟

حل: چون $۳^۴=۸۱$، پس در این صورت داریم:

$[\frac{۶۹}{۳}]+[\frac{۶۹}{۹}]+[\frac{۶۹}{۲۷}]=۲۳+۷+۲=۳۲,[\frac{۳۲}{۴}]=۸$

پس ۸ عامل ۸۱ در !۶۹ وجود دارد.

اصل خوش ترتیبی: مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) خوش ترتیب است. به عبارت معادل: هر زیرمجموعهٔ ناتهی N عضو ابتدا دارد

اگر «عددی بر عدد اولِ p بخش‌پذیر و مربع کامل باشد، آن‌گاه همواره بر $p^۲$ بخش‌پذیر است؛ و لذا اگر عددی بر p بخش‌پذیر باشد ولی بر $p^۲$ بخش‌پذیر نباشد و p اول باشد، آن‌گاه آن عدد مربع کامل نیست.»

نکات مهّم

I) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ که در آن $k > m$، برابر است با تعداد صفرهای سمت راستِ عدد $m!$.

II) تعداد صفرهای سمت راست عدد $k!m!$ برابر است با مجموع تعداد صفرهای سمت راست $k!$ و صفرهای سمت راست $m!$.

III) تعداد صفرهای سمت راست عدد $\frac{k!}{m!}$ $(k > m)$ برابر است با تفاضل تعداد صفرهای سمت راست $m!$ از $k!$.

IV) اگر تعداد اعدادی چون n $(k \le n \le m)$ را بخواهیم که مربع کامل و مضرب p (p اول) باشند، این اعداد باید به شکل $n = p^۲q^۲$ باشند. لذا کافی است نابرابری $k \le p^۲q^۲ \le m$ را حل و تعداد جواب‌های آن را بررسی کنیم.

مثال: چند عدد طبیعی و چهار رقمی وجود دارد که مضرب ۱۳ و مربع کامل باشند؟

حل: چنین اعدادی باید به شکل $n = ۱۶۹k^۲$ باشند، لذا داریم:

$$۱۰۰۰ \le ۱۶۹k^۲ \le ۹۹۹۹ \Rightarrow [\frac{۱۰۰۰}{۱۶۹}] \le k^۲ \le [\frac{۹۹۹۹}{۱۶۹}]$$
$$\Rightarrow ۶ \le k^۲ \le ۵۹$$
$$\Rightarrow [\sqrt{۶}]+۱ \le k \le [\sqrt{۵۹}] \Rightarrow ۳ \le k \le ۷ \Rightarrow k = ۳ \text{ یا ... یا } ۷$$

پس ۵ عدد ٤ رقمی، مربع کامل و مضرب ۱۳ وجود دارد.

مبناها- عددنویسی در مبناهای مختلف

قضیهٔ زیر که در اثبات آن از قضیهٔ تقسیم استفاده می‌شود، نشان می‌دهد که هر عدد طبیعی را می‌توان بر حسب عدد طبیعی مانند $b>۱$ و به شکل منحصربه‌فرد نمایش داد. عدد b را مبنای نمایش عدد n می‌نامیم.

قضیه: اگر $b>۱$ عددی طبیعی باشد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به‌فرد به صورت $n = r_k b^k + r_{k-۱}b^{k-۱} + ... + r_۲b^۲ + r_۱b + r_۰$ نمایش داد که در این تساوی k عددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = ۰,۱,۲,...,k$ همواره $۰ \le r_i \le b-۱$ و $r_k \neq ۰$ است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$I)\ A = (۱۳۹۱)_{۱۰} = ۱۳۹۱ = ۱\times۱۰^۳ + ۳\times۱۰^۲ + ۹\times۱۰ + ۱$$
$$II)\ B = (۲۰۱۳)_۷ = ۲\times۷^۳ + ۰\times۷^۲ + ۱\times۷ + ۳ = ۷۵۳$$
$$III)\ n = (\overline{r_k r_{k-۱} ... r_۲ r_۱ r_۰})_b = r_k b^k + r_{k-۱}b^{k-۱} + ... + r_۲b^۲ + r_۱b + r_۰$$

تذکر: ارقام به کار رفته در هر مبنایی چون $b>۱$ کوچک‌تر از b هستند.

(برای مثال: در عدد نویسی در مبنای ٦، حداکثر رقمی که می‌توان به کار برد رقم ۵ است)، زیرا ارقام به کار رفته در مبنای b در واقع باقی‌مانده‌های تقسیم بر b هستند که همواره طبق قضیهٔ تقسیم از b کوچک‌ترند.

نکات مهّم:

I) برای تبدیل یک عدد از مبنای غیر از ۱۰به مبنای ۱۰، کافی است آن عدد را در مبنای داده شده بسط دهیم.

مثال: عدد $A = (۲۱۱۲)_۴$ را در مبنای ۱۰ بنویسید.

حل: کافی است عدد A را در مبنای ٤ بسط دهیم:

$$A = ۲\times۴^۳ + ۱\times۴^۲ + ۱\times۴ + ۳ = ۱۲۸ + ۱۶ + ۴ + ۳ = ۱۵۱$$

II) برای تبدیل عددی از مبنای ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰، باید آن عدد را با تقسیمات متوالی در مبنای مورد نظر دسته‌بندی کنیم. وقتی تقسیمات متوالی انجام شد، از آخرین باقی‌مانده و به ترتیب از سمت چپ آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم.

مثال: عدد ۱۳۹۱ را در مبنای ۷ بنویسید.

حل: تقسیمات متوالی بر ۷ را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

۱۳۹۱ | ۷
۱۹۸ | ۷ ، $r_۰ = ۵$
۲۸ | ۷ ، $r_۱ = ۲$
۴ | ۷ ، $r_۲ = ۰$
۰ ، $r_۳ = ۴$

$$۱۳۹۱ = (۴۰۲۵)_۷$$

تست: چند عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ وجود دارد؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۹۰۰۰

حل: گزینهٔ۳، زیرا:

[۴] [۵] [۵] [۵] ← تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵

$۴\times۵^۳ = ۵۰۰$: طبق اصل ضرب

(در سمت چپ رقم صفر نمی‌تواند قرار گیرد و در بقیهٔ جایگاه‌ها هر رقم ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ می‌تواند قرار گیرد)

نکته: تعداد کل اعداد k رقمی در مبنای $b>1$ برابر است با $(b-1)\times b^{k-1}$.

نکته: بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد k رقمی در مبنای b برابرند با:

بزرگ‌ترین عدد ← $(\overline{(b-1)(b-1)....(b-1)})_b$

کوچک‌ترین عدد ← $(100....0)_b$

نکتهٔ مهّم: اگر بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راستِ آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k، k رقم سمت راستِ آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد.

مثال: عدد $A=(1021121)_3$ مفروض است، این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید.

حل: چون $9=3^2$، پس هر دو رقم در A یک رقم در مبنای ۹ است، لذا داریم:

$(21)_3=2\times3+1=7,(11)_3=1\times3+1=4,(02)_3$

$=2,(1)=(01)_3=1$

$\Rightarrow (1021121)_3=(1247)_9$

مثال: عدد $A=(210123)_4$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ نمایش دهید.

حل: چون $4=2^2$، پس هر یک رقم از A دو رقم از آن عدد درمبنای ۲ را تشکیل می‌دهد. لذا داریم:

$3=(11)_2$

$,2=(10)_2,1=(01)_2,0=(00)_2$

$,1=(01)_2,2=(10)_2\Rightarrow (210123)_4=(100100011011)_2$

قرارداد: اگر مبنای نمایش یک عدد، عددی چون b>10 باشد، در این صورت برای نمایش ارقام در مبناهای بزرگ‌تر از ۱۰ از حروف کوچک انگلیسی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$a=10,b=11,c=12,d=13,e=14,...$

مثال: عدد $A=(1b2a)_{12}$ را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: عدد A را در مبنای ۱۲ بسط می‌دهیم که خواهیم داشت:

$A=1\times12^3+11\times12^2+2\times12+10=1728+1584+24+10=3346$

تست: اگر $(ab)_5+(ba)_4=33$ و عدد $(bab)_6$ را در مبنای ۱۰ بنویسیم، حاصل کدام است؟

۱) ۱۲۹ ۲) ۱۳۹ ۳) ۱۴۱ ۴) ۱۳۸

حل: گزینهٔ ۱، زیرا:

$(ab)_5+(ba)_4=33\Rightarrow 5a+b+4b+a=33$

$\Rightarrow 6a+5b=33\underset{1\le b\le3}{\overset{1\le a\le3}{\Rightarrow}}a=b=3\Rightarrow (bab)_6=(333)_6$

$(333)_6=3\times6^2+3\times6+3=129$

تست: اگر $(213)_x=(134)_{x+1}$، در این صورت $(111)_x$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۵ ۳) ۳۱ ۴) ۲۹

حل: گزینهٔ ۳، زیرا:

$(213)_x=(134)_{x+1}\Rightarrow 2x^2+x+3=(x+1)^2+3(x+1)+4$

$\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow (x-5)(x+1)=0\Rightarrow x=5$ یا $x=-1$

که $x=-1$ قابل قبول نیست (زیرا مبنا باید از یک بزرگ‌تر باشد).

$\Rightarrow (111)_5=1\times5^2+1\times5+1=31$

تست: اگر عدد دو رقمی $(ab)_7$ با عدد $(ba)_9$ برابر باشد، این عدد در مبنای ۱۰ به کدام رقم ختم می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۷

حل: گزینهٔ ۱، زیرا:

$(ab)_7=(ba)_9=7a+b=9b+a\Rightarrow 6a=8b\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{8}{6}$

و چون $a\neq8$ پس $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ و بنابراین $a=4$ و $b=3$ پس

$(ab)_7=7a+b=7\times4+3=31\Rightarrow$ رقم یکان=۱

$(ba)_9=9b+a=9\times3+4=31\Rightarrow$ رقم یکان=۱

تست: عدد !۶۵ در مبنای ۶ به چند صفر ختم می‌شود؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۲۹

حل: گزینهٔ ۲، زیرا:

در مبنای ۶ هر حاصل ضرب ۲ در ۳ یک ۶ یعنی یک صفر تولید می‌کند (شبیه به مبنای ۱۰ که هر حاصل ضرب ۲×۵ یک صفر ایجاد می‌کرد)، پس کافی است بررسی کنیم در عدد !۶۵ چند عامل ۳ وجود دارد (۲>۳) و در نتیجه خواهیم داشت:

$[\frac{65}{3}]+[\frac{65}{9}]+[\frac{65}{27}]=21+7+2=30$

اگر بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت هر k رقم از سمت راستِ آن عدد در مبنای b یک رقم از سمت راست در مبنای b^k است و برعکس، یعنی هر یک رقم از سمت راست در عددی در مبنای b^k، k رقم سمت راستِ آن عدد در مبنای b را تشکیل می‌دهد

۸

بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه
آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

کلیدواژه‌ها:
انتگرال، پادمشتق، انتگرال نامعین، انتگرال معین، دستورالعمل انتگرال‌گیری

مقدمه

مبحـث انتگـرال و قوانین انتگرال‌گیـری از جمله مباحث اساسی و پرکاربرد در حسابان است. از زمانی که نیوتن و لایپ‌نیتز به صورت منطقی به معرفی دیفرانسیل و انتگـرال پرداختنـد و نمادهایـی را برای مشـتق‌گیری و انتگرال‌گیـری ارائـه کردنـد. تاکنـون روش‌هـای تحلیلی و کلاسیک متفاوتی برای انجام عمل انتگرال‌گیری مطرح شده و کاربردهای زیادی در علوم ریاضی، فیزیک و مکانیک و علوم فنی و مهندسی برای انتگرال ارائه شده است. اهمیت موضوع محاسبهٔ انتگرال معین و نامعین یک تابع تاحدی بالاسـت که نویسـندگان مختلف کتاب‌های بسیاری در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال را در سراسر جهان به چاپ رسانده‌اند و بسیاری از آن‌ها در ایران ترجمه شده و در مقاطع مختلف تحصیلی در سطح دانشگاه تدریس می‌شود. در این راستا، طراحان بسته‌های نرم‌افزاری نیز تلاش کرده‌اند با به‌کارگیری روش‌های ساده و صریح، محاسبهٔ انتگرال یک تابع را در حالات معین و نامعین برای کاربران خود آسان کنند تا بدون نیاز به استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری، حاصل پادمشتق یک تابع یا مقدار انتگرال معین یک تابع را در صورت وجود به‌دست آورند و در کارهای علمی و تحقیقاتی خود استفاده کنند. بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا نیز کارایی و قابلیت بالایی را در محاسبهٔ انتگرال یک تابع مفروض داراست. در این قسمت به معرفی نمادها و دستورالعمل‌های اصلی محاسبهٔ انتگرال یک تابع می‌پردازیم.

دستورالعمل Integrate

می‌دانیم تابع اولیه یا پادمشتق یک تابع مفروض f تابعی چون F اسـت به‌طـوری که $F'(x) = f(x)$. دسـتورالعمل Integrate بـه صـورت کلی زیر، تابع اولیـهٔ تابع مفروض f را محاسبه‌می‌کند:

$$\text{Integrate}[f[x], x]$$

مثـال ۱: تابـع اولیهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{۴}$ را به‌دسـت آورید:

$$\text{Integrate}[x^{۴}, x]$$

$$\frac{x^{۵}}{۵}$$

مثـال ۲: تابع اولیـهٔ تابع f بـا ضابطهٔ $f(x) = x^{۳}\cos x$ را به‌دست آورید.

$$\text{Integrate}[x^{۳}\text{Cos}[x], x]$$

$$۳(-۲ + x^{۲})\text{Cos}[x] + x(-۶ + x^{۲})\text{Sin}[x]$$

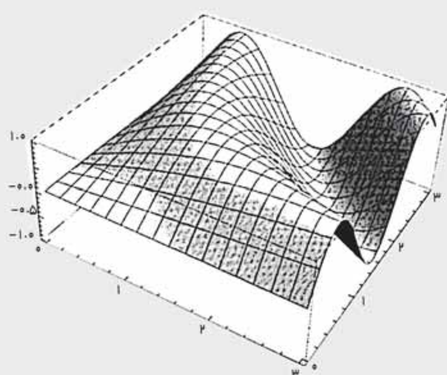
یادآوری می‌شود به منظور اجرای سلول حاوی دستور فوق به طور هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter را باید فشار داد.

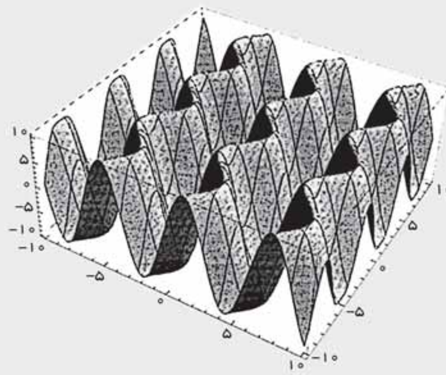
معرفـی نمـاد $\int$: راه دیگر برای محاسـبهٔ تابع اولیهٔ یک تابـع مفـروض، اسـتفاده از نماد $\int \blacksquare d\square$ در پنجـرهٔ Basic Math Input اسـت. در ایـن نماد باید به جای ■ ضابطهٔ تابع و بـه جای □ متغیـر انتگرال‌گیری را تایپ کـرد. علامت d همان نماد دیفرانسیل اسـت که با حرف d تفاوت دارد. برای اجرای این دسـتور، روی این نماد کلیک می‌کنیم. سپس در مربـع اول ضابطـهٔ تابع موردنظر را تایپ می‌کنیم و با فشـار دکمـهٔ Tab به مربع دوم منتقل می‌شـویم و درون این مربع، متغیری را که عمل انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود، تایپ می‌کنیم.

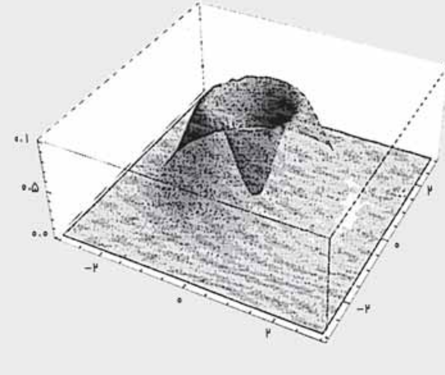
مثال ۳: حاصل $\int \sqrt{x}dx$ را مشخص کنید.

$$\int \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{۲x^{\frac{۳}{۲}}}{۳}$$







مثال ۴: حاصل $\int e^x \text{Sin}\, x dx$ را مشخص کنید.

$\int \text{Exp}[x]\text{Sin}[x]dx$

$\frac{۱}{۲}e^x(-\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])$

گفتنی است در متمتیکا ثابت انتگرال‌گیری C نوشته شده پس از محاسبهٔ انتگرال نامعین بیان نمی‌شود و فقط تابع اولیهٔ تابع مفروض اعلام خواهد شد.

در مثال زیر انتگرال نامعین چند تابع مفروض محاسبه و اجرا شده است. در نتایج حاصل تابع اولیهٔ تابع زیر علامت انتگرال چاپ می‌شود و ثابت انتگرال‌گیری قید نمی‌شود. به این ترتیب حاصل اجرای $\int \blacksquare d\square$ همان حاصل اجرای دستور Intergrate است.

مثال ۵: مطلوب است $\int x^n dx$ ، $\int \frac{dx}{x}$ ، $\int \text{Sin}^۲ xdx$ و $\int \tan^۲ xdx$.

حل:

$\int x^n dx$

$\frac{x^{۱+n}}{۱+n}$

$\int \frac{۱}{x}dx$

$\text{Log}[x]$

$\int \text{Sin}[x]^۲ dx$

$\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۴}\text{Sin}[۲x]$

$\int \text{Tan}[x]^۲ dx$

$-x+\text{Tan}[x]$

توجه شود که Log[x] همان Ln(x) را بیان می‌کند. هم‌چنین برای ورود توابع دارای کسر یا توان یا ریشه می‌توان از نمادهای موجود در پنجره Basic Math Input بهر برد و با کلیک روی آن‌ها نماد موردنظر را در زیر علامت $\int$ ایجاد و در مربع‌های مربوط ضابطهٔ تابع موردنظر را تایپ کرد.

مثال ۶: حاصل $\int \frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}$ را بیابید.

حل: ابتدا روی نماد $\int \blacksquare d\square$ و سپس در $\blacksquare$ روی نماد $\frac{\blacksquare}{\square}$ کلیک می‌کنیم و در صورت ۱ و در مخرج ابتدا روی $\sqrt{\blacksquare}$ کلیک و سپس روی $\blacksquare^\square$ کلیک و $u^۲$ را تایپ می‌کنیم. در ادامه علامت ـ را تایپ و مجدداً روی $\blacksquare^\square$ کلیک و $a^۲$ را تایپ می‌کنیم. با فشار دکمهٔ Tab به راحتی از یک مربع به مربع بعدی می‌توان وارد شد.

در نهایت، متغیر u را در $\square$ تایپ و با فشار هم‌زمان Shift+Enter نتیجه را ملاحظه می‌کنیم. توجه شود که اگر متغیر انتگرال‌گیری عوض شود، حاصل انتگرال نیز تغییر خواهد کرد.

نتیجهٔ اجرا، $\text{Ln}(u+\sqrt{u^۲-a^۲})$ است.

$\int \frac{۱}{\sqrt{u^۲-a^۲}}du$

$\text{Log}[u+\sqrt{-a^۲+u^۲}]$

انتگرال معین: با استفاده از دستورالعمل Integrate به‌صورت زیر، می‌توان حاصل $\int_a^b f(x)dx$ را دریافت:

$\text{Integrate}[f[x],\{x,a,b\}]$

مثال ۷: حاصل $\int_۰^۱ x^۳ dx$ را بیابید.

حل:

Integrate[x^3, {x,0,1}]

$\frac{1}{4}$

مثال ۸: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را بیابید.

Integrate[Sin[x], {x,0,π/2}]

1

معرفی نماد $\int_\square^\square$: با اســتفاده از نماد $\int_\square^\square \blacksquare d\square$ در پنجرهٔ Basic Math Input می‌تــوان حاصل انتگرال معین یک تابع مفروض را در بازهٔ موردنظر یافت.

مثال ۹: حاصل $\int_{-1}^{1} ||x|-1|dx$ را بیابید.

حل:

$\int_{-1}^{1}$ Abs[Abs[x]−1]d x

1

مثال ۱۰: حاصل $\int_0^1 xe^x \sin x dx$ را بیابید.

حل:

$\int_0^1 xe^x$Sin[x]d x

$\frac{1}{2}(-1+e\text{Sin}[1])$

توجه شود که هنگام تایپ تابع مذکور باید بین x و e^x یک فاصله گذاشــت. در ضمن، برای تایپ تابع e^x می‌توان از نماد عدد نپر به صورت -- در پنجرهٔ Basic Math Input اســتفاده کرد که با حرف e معمولی کاملاً متفاوت خواهد بود. این تابع به صورت Exp[x] هم قابل بیان است. هم‌چنین با استفاده از دستورالعمل N می‌توان مقدار عددی حاصل انتگرال معین را مشــاهده کرد. برای این کار کافی است پس از نماد d x تایپ کنیم:

$\int_0^1 xe^x$Sin[x]d x //N

$0/643678$

N// و سپس سلول حاصل را اجرا کنیم.

مثــال ۱۱: در ایــن مثــال حاصــل $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ و $\int_1^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ محاسبه می‌شوند.

حل: دســتور عــددی N در زیــر، مقدار انتگــرال معین تابع مذکور را به صورت تقریبی تا ۲۰ رقم اعشــار مشــخص می‌کند.

$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2Sin[$\sqrt{x}$]

$\int_1^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

2(−Sin[1]+Sin[3])

N[$\int_1^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, 20]

$-1/40070195349605856 91$

مثال ۱۲: مطلوب است $\int \frac{dx}{9+x^2}$ و مقدار عددی $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$.

حــل: ملاحظــه می‌کنیــم تابــع اولیــهٔ تابع بــا ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{9+x^2}$ بــه صورت $\frac{1}{3}\text{Arctan}\frac{x}{3}$ به‌دســت می‌آید. هم‌چنیــن انتگــرال معین ایــن تابــع در $[-3,3]$ برابر با $\frac{\pi}{6}$ اســت که مقدار عددی آن با اســتفاده از دستور N به صورت $0/523599$ مشخص شده است.

$\int \frac{1}{9+x^2}dx$

$\frac{1}{3}$ArcTan$\left[\frac{x}{3}\right]$

$\int_{-3}^{3} \frac{1}{9+x^2}dx$

$\frac{\pi}{6}$

$\int_{-3}^{3} \frac{1}{9+x^2}dx$ //N

$0/523599$

مثال ۱۳: مطلوب است $\int_{-2}^{2} \text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

حــل: توجــه می‌کنیــم کــه تابــع f بــا ضابطــهٔ $f(x)=\text{Ln}(x+\sqrt{x^2+1})$ در $[-2,2]$ تابعی فرد است (یعنی $f(x)+f(-x)=0$). به همین لحاظ حاصل انتگرال معین این

تابع در بازهٔ متقارن [۲,۲-] صفر می‌شود.

$$\int_{-۲}^{۲} Log\left[x+\sqrt{x^{۲}+۱}\right]dx$$

۰

نکتــه: حاصل انتگــرال معین یک تابــع مفروض را می‌توان در بازه‌هایی چون $[a,+\infty)$ یا $(-\infty,\infty)$ نیز یافت. به این نوع انتگرال‌ها که یکی از دو ســر بازهٔ ∞ باشد ناسره می‌گویند.

مثال ۱۴: مطلوب است $\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{۱+x^{۲}}$.

حل:

Integrate[Exp[-x ^ ۲], {x,۰, Infinity}]

$$\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx$$

π

نکته: در صورتی که مقدار انتگرال معین یک تابع در بازهٔ انتگرال‌گیری موجود نباشــد، پس از اجرای این سلول پیغام خاصی در صفحه ظاهر می‌شود.

مثال ۱۵: می‌دانیم $\int_{-۲}^{۳}\frac{dx}{x}$ قابل محاســبه نیســت، زیرا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $[-۲,۳]$ پیوســته نیست و در $x=۰$ تعریف نشده اســت. با اجرای این دستور در متمتیکا پیغامی مبنی بر همگرانبودن انتگرال فوق در این بازه نمایان می‌شود.

$$\int_{-۲}^{۳}\frac{۱}{x}dx$$

Integrate :: idiv : Integral of $\frac{۱}{x}$ does not converge on {-۲,۳}. >>

$$\int_{-۲}^{۳}\frac{۱}{x}dx$$

نکته: با استفاده از دستورالعمل N Integrate می‌توان مقدار عددی یک انتگرال معین را یافت. این دســتور معادل با این اســت که ابتدا دســتور Integrate اجرا شود و سپس با دستور N مقدار عددی جواب حاصل به‌دست آید.

مثال ۱۶: تابــع اولیهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲^{x}$ و هم‌چنین $\int_{۰}^{۱}f(x)dx$ را به‌صورت تقریبی بیابید.

حل:

Integrate[۲^{x}, x]

$$\frac{۲^{x}}{Log[۲]}$$

Integrate[۲^{x}, {x,۰,۱}]

$$\frac{۱}{Log[۲]}$$

N[%]

۱/۴۴۲۷

NIntegrate[۲^{x}, {x,۰,۱}]

۱/۴۴۲۷

نکتــه: در متمتیکا می‌توان از توابع چند متغیری هم انتگرال گرفــت. در صورتی که محدودهٔ هر متغیر در دستور انتگرال‌گیری مشخص شــود حاصل انتگرال معین یک تابع چند متغیری هم قابل محاسبه است.

مثال ۱۷: حاصل $\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}(x^{۲}+y^{۲})dydx$ را بیابید.

حل: در این حالت $۰\le x\le ۱$ و $۰\le y\le x$.

Integrate[x ^ ۲ + y ^ ۲, {x,۰,۱}, {y,۰,x}]

$$\frac{۱}{۳}$$

نکته: با اســتفاده از دســتور مشتق‌گیری D می‌توان مشتق یک تابع دارای علامت انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۱۸: حاصل $\frac{d}{dx}\int_{۰}^{x}\frac{Sint}{t}dt$ را بیابید.

حل:

$$D\left[\int_{۰}^{x}\frac{Sin[t]}{t}dt, x\right]$$

$$\frac{Sin[x]}{x}$$

در قســمت بعد مثال‌هایی از کاربرد انتگــرال معین را با استفاده از متمتیکا معرفی می‌کنیم.

منابع

۱. کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ دوره پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی، ۱۳۸۹.

2. Mathematica, Eugene Don, Second edition, Schaum's outline series, Mc Graw Hill, 2009.

سری تلسکوپی

احسان یارمحمدی

سری‌های تلسکوپی[1] یکی از مباحث گنجانده شده در کتاب درسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال[2]» رشتهٔ علوم ریاضی در دورهٔ پیش‌دانشگاهی در فصل دنباله‌ها[3] و سری‌های[4] آن است که ریاضی‌پژوهان می‌توانند با محاسبهٔ حد[5] مجموع جزئی این نوع سری‌ها با بهره‌گیری از راهکار مشهور به «قاعدهٔ ادغام»، همگرایی[6] یا واگرایی[7] این‌گونه سری‌ها را مورد بررسی قرار دهند. اما از آن‌جا که رویکرد این کتاب تنها دربرگیرندهٔ چند مثال و تمرین مانند $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ و... است و این‌گونه مسائل به علت داشتن ساختاری بسیار ساده برای حل کردن و کمبود مثال‌هایی در این زمینه، به ریاضی‌پژوهان کمک می‌کند که با مطالعهٔ این مقاله پویایی ذهن خود را محک بزنند؛ به همین دلیل در این مقاله به حل مثال‌ها و تمرین‌های گوناگون و چالش‌پذیرتر می‌پردازیم. جملهٔ عمومی این سری‌ها دربرگیرندهٔ عبارات پیچیده برای محاسبه شامل عبارات کسری، رادیکالی[8]، فاکتوریلی، نمایی[9]، لگاریتمی[10]، مثلثاتی[11]، معکوس مثلثاتی[12] ... یا تلفیقی از آن‌هاست. بدیهی است که داشتن آگاهی مناسب از قوانین رادیکال‌ها و نماها، اتحادهای مثلثاتی و معکوس مثلثاتی، قوانین لگاریتم، تجزیهٔ کسرها[13] و... کمک ارزنده‌ای برای درک بهتر این مقاله است.

قاعدهٔ ادغام

دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ مفروض است. داریم:

$$\sum_{n=n_0}^{m}(a_n-a_{n+1})=a_{n_0}-a_{m+1}$$

هنگامی که با استفاده از آزمون همگرایی داشتن شرط لازم همگرایی برای یک سری مفروض ثابت شود، اگر جملهٔ عمومی آن سری دارای ساختاری باشد که در قاعدهٔ ادغام بگنجد[14]، می‌توانیم برای نهایی شدن وضعیت همگرایی یا واگرایی سری از این قاعده استفاده کنیم. البته باید خاطر نشان کرد که با استفاده از قاعدهٔ ادغام، در صورت همگرا[15] بودن یک‌سری که این قاعده در حل آن کاربردی مؤثر دارد، می‌توان حد مجموع جزئی یا مقدار آن سری را به‌دست آورد.

در این قسمت به ارائه نمونه‌های متنوع می‌پردازیم که به کمک قاعدهٔ ادغام قابل حل‌اند تا خواننده توان خویش را در ارتباط با حل این‌گونه مسائل با توجه به ساختار و مطالب بیان شده در کتاب **«حساب دیفرانسیل و انتگرال»** رشتهٔ علوم ریاضی دورهٔ پیش‌دانشگاهی محک بزند.

مثال ۱. کدام یک از گزینه‌های زیر را در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!}$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر
۲) همگرا به ۲
۳) همگرا به $\frac{1}{e}$
۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!}=\frac{2^n(n+1-2)}{(n+1)!}=\frac{2^n(n+1)-2^{n+1}}{(n+1)!}\qquad {}^{n}(n+\ )$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n}{n!}-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$=(\frac{۲^۱}{۱!}-\frac{۲^۲}{۲!})+(\frac{۲^۲}{۲!}-\frac{۲^۳}{۳!})+...+(\frac{۲^n}{n!}-\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}) \Rightarrow$$

بنابراین:

$$S_n=۲-\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!} \Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}(۲-\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!})=۲$$

مثال۲. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) همگرا به $\frac{۱}{۱۲}$

۳) همگرا به $\frac{۱}{۴}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۳ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\frac{۱}{(n+۲)}\times\frac{n}{(n+۱)(n+۳)}$$

اکنون با استفاده از تجزیهٔ کسرها، کسر $\frac{n}{(n+۱)(n+۳)}$ را به مجموع دو کسر تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{n}{(n+۱)(n+۳)}=\frac{A}{n+۱}+\frac{B}{n+۳}=\frac{A(n+۳)+B(n+۱)}{(n+۱)(n+۳)}$$

$$=\frac{n(A+B)+۳A+B}{(n+۱)(n+۳)}$$

$$\Rightarrow n(A+B)+۳A+B\equiv n \Rightarrow \begin{cases}A+B=۱\Rightarrow A=۱-B\\ ۳A+B=۰\Rightarrow ۳(۱-B)+B=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow B=\frac{۳}{۲} \ \& \ A=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=\frac{۱}{(n+۲)}\times(\frac{-\frac{۱}{۲}}{n+۱}+\frac{\frac{۳}{۲}}{n+۳})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=-\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}+\frac{۳}{۲}\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{۱}{(n+۲)(n+۳)}$$

اکنون به کمک قاعدهٔ ادغام، مقدار هریک از دو سری را محاسبه می‌کنیم و در نهایت داریم:

$$\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{n}{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}$$

مثال۳. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\ln(۱-\frac{۲}{n(n+۱)})$ صحیح است؟

۱) واگرا ۲) همگرا به $\ln(۳)$

۳) همگرا به $\ln(\sqrt{۳})$ ۴) همگرا به $\ln(\frac{۱}{۳})$

پاسخ: گزینهٔ ۴ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\ln(۱-\frac{۲}{n(n+۱)})=\ln(\frac{n(n+۱)-۲}{n(n+۱)})=\ln(\frac{n^۲+n-۲}{n(n+۱)})=\ln(\frac{(n+۲)(n-۱)}{n(n+۱)})$$

$$=\ln((n+۲)(n-۱))-\ln((n(n+۱))$$

$$=\ln(n+۲)+\ln(n-۱)-\ln(n)-\ln(n+۱)$$

بنابراین:

$$\sum_{n=۲}^{+\infty}\ln(۱-\frac{۲}{n(n+۱)})=\sum_{n=۲}^{+\infty}(\ln(n+۲)+\ln(n-۱)-\ln(n)-\ln(n+۱))$$

$$\Rightarrow S_n=(\ln(۴)+\ln(۱)-\ln(۲)-\ln(۳))+(\ln(۵)+\ln(۲)-\ln(۳)-\ln(۴))$$

$$+(\ln(۶)+\ln(۳)-\ln(۴)-\ln(۵))+(\ln(۷)+\ln(۴)-\ln(۵)-\ln(۶))$$

$$+...+(\ln(n+۲)+\ln(n-۱)-\ln(n)-\ln(n+۱))$$

$$\Rightarrow S_n=-\ln(۳)+\ln(n+۲)-\ln(n)$$

$$\Rightarrow S_n=-\ln(۳)+\ln(\frac{n+۲}{n})$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}(-\ln(۳)+\ln(\frac{n+۲}{n}))=-\ln(۳)=\ln(\frac{۱}{۳})$$

مثال۴. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۱}^{+\infty}\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n^۲+n+۱})$ صحیح است؟

۱) همگرا به $\frac{\pi}{۲}$ ۲) همگرا به $\frac{\pi}{۳}$

۳) همگرا به $\frac{\pi}{۴}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۳ صحیح است. این سری شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون داریم:

$$\text{Arc}\tan(\frac{x-y}{۱+xy})=\text{Arc}\tan(x)-\text{Arc}\tan(y)$$

$$\& \ x>۰\ ,\ y>۰\ ,\ xy\neq -۱$$

بنابراین:

$$\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n^۲+n+۱})=\text{Arc}\tan(\frac{۱}{۱+n(n+۱)})=\text{Arc}\tan(\frac{(n+۱)-n}{۱+n(n+۱)})$$

$$=\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n})-\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n+۱})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=۱}^{+\infty}\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n^۲+n+۱})$$

$$=\sum_{n=۱}^{+\infty}(\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n})-\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n+۱}))=\text{Arc}\tan(۱)-\text{Arc}\tan(\frac{۱}{n+۱})$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\text{Arc}\tan(۱)=\frac{\pi}{۴}$$

مثال۵. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به $\frac{1}{2}$

۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۳ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\times\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=S=1$$

مثال۶. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln\left((1+\frac{1}{n})^n(n+1)\right)}{\ln(n)^n\ln(n+1)^{n+1}}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $\log_{\sqrt{e}}^{2}$ ۲) همگرا به $\log_{\sqrt{2}}^{e}$

۳) همگرا به $\log_{e}^{\sqrt{2}}$ ۴) همگرا به $\log_{2}^{\sqrt{e}}$

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(n+1))}{\ln(n)^n\ln(n+1)^{n+1}}=\frac{\ln((\frac{n+1}{n})^n(n+1))}{n\ln(n)\times(n+1)\ln(n+1)}$$

$$=\frac{\ln(\frac{n+1}{n})^n+\ln(n+1)}{n\ln(n)\times(n+1)\ln(n+1)}$$

بنابراین:

$$=\frac{n(\ln(n+1)-\ln(n))+\ln(n+1)}{n\ln(n)\times(n+1)\ln(n+1)}=\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln(n)}{n\ln(n)\times(n+1)\ln(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln((1+\frac{1}{n})^n(n+1))}{\ln(n)^n\ln(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow S_n=\left(\frac{1}{2\ln(2)}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=S=\frac{1}{2\ln(2)}=\frac{\ln(e)}{2\ln(2)}=\frac{1}{2}\times\frac{\ln(e)}{\ln(2)}$$

$$=\frac{\ln(e)^{\frac{1}{2}}}{\ln(2)}=\frac{\ln(\sqrt{e})}{\ln(2)}=\log_2^{\sqrt{e}}$$

مثال۷. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arc\,cot}(n^2+n+1)$ صحیح است؟

۱) همگرا به $\frac{\pi}{4}$ ۲) همگرا به $\frac{\pi}{3}$

۳) همگرا به $\frac{\pi}{6}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۱ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون داریم:

$$\operatorname{Arc\,cot}\left(\frac{1+xy}{x-y}\right)=\operatorname{Arc\,cot}(x)-\operatorname{Arc\,cot}(y)$$
$$\& x>0, y>0, xy\neq -1$$

بنابراین:

$$\operatorname{Arc\,cot}(n^2+n+1)=\operatorname{Arc\,cot}(1+n(n+1))=\operatorname{Arc\,cot}\left(\frac{1+n(n+1)}{(n+1)-n}\right)$$

$$=\operatorname{Arc\,cot}(n)-\operatorname{Arc\,cot}(n+1)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arc\,cot}(n^2+n+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\operatorname{Arc\,cot}(n)-\operatorname{Arc\,cot}(n+1))$$
$$=\operatorname{Arc\,cot}(1)-\operatorname{Arc\,cot}(n+1)$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\operatorname{Arc\,cot}(1)=\frac{\pi}{4}$$

مثال۸. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

پاسخ: گزینهٔ ۲ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}=-\frac{(-1)^{n}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right)=\frac{1}{0!}+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{0!}=1$$

مثال۹. کدام گزینه در مورد سری

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\tan\left(\frac{1}{n^3-n}\right)\left(1+\tan\left(\frac{1}{2n^2-2n}\right)\tan\left(\frac{1}{2n^2+2n}\right)\right)$$

صحیح است؟

۱) همگرا به $\tan(\frac{1}{2})$ ۲) همگرا به $\tan(\frac{1}{4})$

۳) همگرا به $\tan(\frac{1}{8})$ ۴) واگرا

پاسـخ: گزینهٔ ۲ صحیح اسـت. سـری بالا شـرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم که:

$$\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

ابتدا کسـر $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ را با کمک تجزیهٔ کسرها به دو کسر تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}=\frac{n(A+B)+A-B}{(n-1)(n+1)}$$

$$\Rightarrow n(A+B)+A-B\equiv 1\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2n(n-1)}-\frac{1}{2n(n+1)}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\tan\left(\frac{1}{n^3-n}\right)\left(1+\tan\left(\frac{1}{2n^2-2n}\right)\tan\left(\frac{1}{2n^2+2n}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{n^3-n}\right)}{\dfrac{1}{1+\tan\left(\frac{1}{2n^2-2n}\right)\tan\left(\frac{1}{2n^2+2n}\right)}}=\frac{1}{1+\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right)\tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)}$$

با توجـه بـه رابطهٔ $\tan(x-y)=\dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ داریم:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\dfrac{\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}-\frac{1}{2n(n+1)}\right)}{1+\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right)\tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)}}{\dfrac{1}{1+\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right)\tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)}}$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\tan\left(\frac{1}{2n(n-1)}\right)-\tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)=\tan\frac{1}{4}-\tan\left(\frac{1}{2n(n+1)}\right)$$

$$\Rightarrow S=\lim_{n\to+\infty}s_n=\tan(\frac{1}{4})$$

پی‌نوشت

۱. Telescoping Series. دلیل نام‌گذاری این سری‌ها به سری‌های تلسکوپی آن است که در هنگام محاسبهٔ این نوع سری‌ها به علت وجود مقادیر برابر و تنها متفاوت از نظر علامت، این مقادیر با یکدیگر خنثی می‌شوند و به اصطلاح مقادیر توی یکدیگر می‌روند و بنابراین یک عبارت بزرگ از اعداد به یک عبارت کوچک تبدیل می‌شود. این موضوع را با بازشدن و جمع‌شدن تلسکوپ‌های کیهان‌شناسی در رصدخانه‌ها مقایسه کرده‌اند و نام سری‌های تلسکوپی را بر آن نهاده‌اند.

2. Calculus 3. Sequences 4. Series 5. Limit
6. Convergence 7. Divergence 8. Irrational 9. Exponential
10. Logarithmic 11. Trigonometric 12. Inverse Trigonomertic

۱۳. البته ممکن است خواننده برای حل سری‌های تلسکوپی در مواردی که نیاز به تجزیهٔ کسرها دارند از روش‌های متنوعی استفاده کنید. برای مثال در سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(8n-3)(8n+5)}$ جملهٔ عمومی آن را می‌توان به یکی از دو روش زیر تجزیه کرد:

روش اول:

$$\frac{1}{(8n-3)(8n+5)}=\frac{A}{8n-3}+\frac{B}{8n+5}=\frac{(A+B)5n+5A-3B}{(8n-3)(8n+5)}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{8}\\ B=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

روش دوم:

$$\frac{1}{(8n-3)(8n+5)}=\frac{1}{8}\times\frac{\overbrace{(8n+5)-(8n-3)}^{8}}{(8n-3)(8n+5)}=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n+5}\right)$$

۱۴. اگر در سری $\sum_{n=n_0}^{m}(a_n-a_{n+1})$ با تبدیل n به $n+1$ در عبارت a_n بتوان عبارت a_{n+1} را به دست آورد، سری مزبور یک سری تلسکوپی است که در شرایط قاعدهٔ ادغام می‌گنجد.

15. Convergent

منابع

۱. **حساب دیفرانسیل و انتگرال** دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۸

۲. **حساب دیفرانسیل و انتگرال**. تام . م . آپوستل. ترجمهٔ علیرضا ذکایی، مهدی رضایی دلفی، علی‌اکبر عالم‌زاده و فرخ فیروزان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۰

3. *SCHAUMS SOLVED PROBLEMS SERIES;* 3000 SOLVED PROBLEMS IN CALCULUS. Elliott Mendelson. McGrow-Hill, 1988, (ISBN: 7-07-041480-7).

پیوستگی تابع

سعید چتر آبنوس
دبیر ریاضی استان فارس

کلیدواژه‌ها:
جمع دو تابع، تفریق دو تابع، ضرب دو تابع، تقسیم دو تابع، پیوستگی.

مقدمه

یکی از قضایایی که در مورد پیوستگی وجود دارد، قضیهٔ پیوستگی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو تابع پیوسته است. در این مقاله ابتدا این قضیه را بیان می‌کنیم و سپس به وضعیت پیوستگی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته می‌پردازیم.

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه

می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است، هرگاه:

الف) مقدارتابع در نقطهٔ a موجود باشد، یعنی f(a) موجود باشد.

ب) حدهای راست و چپ تابع در نقطهٔ a موجود و با f(a) برابر باشند.

قضیهٔ ۱: اگر دو تابع f و g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه:

الف) توابع $f+g$ و $f-g$ و fg نیز در نقطهٔ a پیوسته‌اند.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ با شرط $g(a)\neq ۰$ در نقطهٔ a پیوسته است.

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر در نقطهٔ $x=a$ تابع f پیوسته و تابع g ناپیوسته باشد، توابع $f+g$، $f-g$، fg و $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ a چه وضعیتی دارند. برای این منظور قضیهٔ زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۲: اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، توابع $f+g$ و $f-g$ در این نقطه ناپیوسته‌اند.

اثبات قضیه:

فرض: تابع f در نقطهٔ a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته است.

حکم: تابع $f+g$ در نقطهٔ a ناپیوسته است.

برهان خلف: فرض کنیم تابع $f+g$ در نقطهٔ a پیوسته باشد. چون تابع f نیز در این نقطه نقطه پیوسته است، بنابر قضیهٔ ۱ تفریق این دو تابع، یعنی $(f+g)-f$ نیز در نقطهٔ a پیوسته است، یعنی تابع g در نقطهٔ a پیوسته است که با فرض ما تناقض دارد. پس تابع $f+g$ در نقطهٔ a ناپیوسته است. به‌طور مشابه ناپیوسته بودن تابع $f-g$ نیز ثابت می‌شود.

مثال: پیوستگی تابع $y=[x]+\text{Sin}(۲x)$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

حل: در نقاط صحیح تابع $y=[x]$ ناپیوسته و تابع $y=\text{Sin}۲x$ پیوسته است، پس طبق قضیهٔ قبل، مجموع دو تابع یعنی $y=[x]+\text{Sin}۲x$ در این نقاط ناپیوسته است.

در نقاط غیرصحیح هر دو تابع $y=[x]$ و $y=\text{Sin}۲x$ پیوسته‌اند، پس جمع آن‌ها یعنی تابع $y=[x]+\text{Sin}۲x$ پیوسته است.

سؤال دیگری که وجود دارد این است که آیا قضیهٔ فوق برای ضرب دو تابع نیز قابل اثبات است. یعنی اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، آیا تابع

fg در نقطهٔ a ناپیوسته است. برای روشن شدن مطلب ابتدا مثال زیر را بیان می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x)=x^۲$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و تابع $g(x)=[x]$ در این نقطه ناپیوسته است و ضرب آنها یعنی $y=x^۲[x]$ در این نقطه ناپیوسته است، زیرا:

$$f(۱)=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} x^۲[x]=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-} x^۲[x]=۰$$

هم‌چنین ضرب آن‌ها یعنی $y=x^۲[x]$ در نقطهٔ صفر نیز پیوسته است، زیرا:

$$f(۰)=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^+} x^۲[x]=۰ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} x^۲[x]=۰$$

بنابراین می‌توانیم قضیهٔ مربوط به ضرب یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته را به صورت زیر بیان و اثبات کنیم.

قضیهٔ ۳: اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و $f(a)\neq ۰$ باشد و تابع g در این نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه تابع fg در نقطهٔ $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض: f در نقطهٔ a پیوسته و g در این نقطه ناپیوسته است و $f(a)\neq ۰$.

حکم: تابع fg در نقطهٔ a ناپیوسته است.

برهان خلف: فرض کنیم تابع fg در نقطهٔ a پیوسته باشد. چون تابع f نیز در این نقطه پیوسته است و $f(a)\neq ۰$، پس طبق قضیهٔ ۱، تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{fg}{f}$ نیز در نقطهٔ a پیوسته است، یعنی تابع g در نقطهٔ a پیوسته است و این با فرض ما تناقض دارد، پس تابع fg در نقطهٔ a ناپیوسته است.
برای تقسیم دو تابع نیز می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۴: اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و $f(a)\neq ۰$ و تابع g در نقطهٔ a ناپیوسته باشد، آنگاه تابع $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ a ناپیوسته است.

اثبات: طبق برهان خلف، فرض می‌کنیم تابع $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ a پیوسته باشد و چون تابع f نیز در نقطه a پیوسته است، پس بنابر قضیهٔ ۱ ضرب این دو تابع یعنی $\frac{g}{f}\times f$ نیز در نقطهٔ a پیوسته است. بنابراین تابع g در نقطهٔ a پیوسته است که با فرض قضیه تناقض دارد. پس تابع $\frac{g}{f}$ در نقطهٔ a ناپیوسته است.

اسم وبگاه: Understanding Calculus

نشانی وبگاه: http://www.understandingcalculus.com



این وبگاه یک منبع الکترونیکی مناسب آنلاین برای دروس «حسابان» و «حساب دیفرانسیل و انتگرال» است که دارای عناوین متعدد و جالب توجه این شاخه از ریاضیات به شرح زیر است:

- چرا حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه می‌کنیم (Why Study calculus)
- اعداد (Numbers)
- توابع (Functions)
- مشتق (Derivative)
- دیفرانسیل‌گیری (Differentiation)
- نظریهٔ انتگرال‌گیری (Integration Theory)
- توابع معکوس (Inverse Functions)
- نماها (Exponents)
- توابع نمایی (Exponential Functions)
- کاربردهای توابع نمایی(Applications of Exponential Functions)
- توابع سینوس و کسینوس (Sine and Cosine Functions)
- حرکت نوسانی (Oscillatory Motion)
- قضیهٔ مقدار میانگین (Mean Value Theorem)
- سری تیلور (Taylor Series)
- روش‌های انتگرال‌گیری (Integration Techniques)



۱۱ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم و کاربردهای آن‌ها

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

کلیدواژه‌ها:
معادلهٔ درجه سوم، چندجمله‌ای، هندسهٔ اقلیدسی، خیام.

اشاره

از آن‌جـا که هر روش جدید در واقع القاکنندهٔ ایده‌هایی جدید اســت، در این مختصر به ارائهٔ ۸ روش عمومی آزمون و خطا، عددی (تکرار)، هندســی (تحلیلی، ترســیمی و تعبیری) جبری، آنالیزی، مثلثاتی، ماتریسی (برداری)، ترکیبی (تلفیقی) و دیگر روش‌ها پرداخته‌ایم که هر یک از این روش‌ها علاوه بر القای ایده، نوآوری و خلاقیت، کاربردهایی را نیز دربردارند که مانند مقالهٔ پیش (۲۹ روش برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم) به آن‌ها اشاره شده است و ممکن است بسیاری کاربردهای عملی یا نظری دیگر داشته باشند که به تفصیل در شماره‌های آینده به نتایج آن‌ها خواهیم پرداخت.

مقدمه

می‌دانیم از نظر تاریخی نخستین مسئله‌های جبر حل معادله‌های جبری بود، یعنی پیداکردن ریشه‌های آن و در واقع مقدارهایی از مجهول x که به ازای آن‌ها چندجمله‌ای برابر صفر شــود. از زمان‌های دور جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم معلــوم بود و حل جبری معادلهٔ درجهٔ ســوم و در پی آن درجهٔ چهارم در قرن شــانزدهم میلادی پیدا شد. برای معادلــهٔ عمومی ناقص $X^3+pX+q=0$ (کــه هر معادلهٔ درجهٔ ســومی را می‌توان به آن تبدیل کرد) رابطهٔ زیر داده شده است:

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$$

این رابطه را که به رابطهٔ کاردان معروف اســت (اگرچه این پرســش مطرح اســت که آیا این رابطه را خود کاردان به‌دســت آورده یا از دیگرانی همچون تارتاگلیا، استاد خود، اقتباس کرده اســت) نمی‌توان حل کامل معادله دانســت، زیرا ریشــهٔ فوق تنها در حالت $\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3\geq 0$ قابل قبــول اســت و در حالت $\Delta<0$ ریشــهٔ مذکــور نمی‌تواند ریشــه‌ای حقیقی برای معادله به‌حساب آید. در این‌جاست کــه می‌توان به اهمیت روش‌هایی غیر از روش‌های جبری، مانند روش‌های مثلثاتی، هندسی، آنالیزی و... پی برد و در واقع جبر به دنبال یاری می‌شــتابد کــه آن را از این تنگنا و بن‌بســت برهاند. همین‌جاســت که وجود علم مســتقلی احساس می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم تنها علم مستقلی کــه می‌توانــد به یاری جبــر بشــتابد و آن را از این تنگنا برهاند، شــاخه‌ای دیگر از ریاضیات به نام «مثلثات» است (در این‌جا به اســتقلال مثلثات اشــاره شــد که به تفصیل می‌توان دربارهٔ آن صحبت کرد؛ ولی در این‌جا فقط به این نکته بســنده می‌کنیم که پیدایش استقلال روابط مثلثاتی از هندســهٔ اقلیدســی به کمک روابط اویلر اثبات می‌شود $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-}}{2}$ و $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$؛ $\cos x+i\sin x=e^{ix}$).



(e: پایه لگاریتم طبیعی و $i=\sqrt{-1}$) از این زمان به بعد بود که انسان با اطمینان کامل مثلثات را برای حل مسائل غیرقابل حل با روش‌های هندسی، جبری و... برگزید.

● انواع روش‌های حل معادلۀ درجۀ سوم کامل (۱)

برای حل یک مسئله ممکن است راه‌های گوناگونی وجود داشته باشد که با ابتکار، خلاقیت و نوآوری بتوان به برخی از آن‌ها دست یافت. البته ممکن است برخی از مسائل را به هریک از انواع روش‌های زیر حل کرد و حتی برای هر نوع، چندین روش مختلف وجود داشته باشد که در این‌جا به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱. آزمون و خطا
۲. عددی (تکرار)
۳. هندسی (تحلیلی، ترسیمی)
۴. جبری
۵. آنالیزی
۶. مثلثاتی
۷. ماتریسی (بُرداری)
۸. ترکیبی (تلفیقی از چند روش)
۹. ابزاری (خط‌کش، پرگار، نقاله و...) و مکانیکی
۱۰. بخش‌پذیری

* **توجـه:** روش‌های دیگری نیز با ابزارهای دیگر شاخه‌های ریاضیات وجود دارند که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توانیم به بیان آن‌ها بپردازیم.

در این‌جا برای حل معادلۀ درجۀ سوم (۱) از هر یک از روش‌های مذکور استفاده می‌کنیم و به صورتی کاملاً خلاق و همراه با نوآوری به ارائۀ طریق می‌پردازیم.

● تبدیل معادلۀ درجه سوم کامل (۱) به ناقص

برای حل و بحث روی معادلۀ درجۀ سوم کامل (۱)، کافی است معادلۀ درجۀ سوم ناقص به صورت عمومی زیر را مورد بحث و بررسی قرار دهیم:

$$X^{3}+pX+q=0 \qquad (۲)$$

برای تبدیل معادلۀ (۱) به (۲) کافی است تبدیل $X=X-\frac{b}{3a}$ را انجام دهیم:

$$a(X-\frac{b}{3a})^3+b(X-\frac{b}{3a})^2+c(X-\frac{b}{3a})+d=0$$

پس از بسط پرانتزها و اختصار لازم داریم:

$$aX^3+(c-\frac{b^2}{3a})X+(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d)=0$$

با فرض $a\neq 0$ معادلهٔ فوق را بر a تقسیم می‌کنیم:

$$X^3+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2})X+(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{c})=0$$

در این‌جا اگر فرض کنیم:

$$p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2} \text{ و } q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$$

معادلهٔ (۱) به معادلهٔ عمومی (۲) تبدیل می‌شود:

$$X^3+pX+q=0$$

بنابراین، از این به بعد کافی است به جای معادلهٔ (۱) معادلهٔ تبدیل یافتهٔ (۲) را مورد بحث و بررسی قرار داد.

۱) روش خیام

بحث خیام دربارهٔ معادلات درجهٔ سوم را می‌توان در کتاب جبر وی پیدا کرد. پیش از پرداختن به اثر خیام متذکر می‌شویم که هیچ بحث جبری در مسائلی که وی به آن‌ها می‌پردازد از پیشینیان به او نرسیده است. ولی از متأخران، نویسنده‌ای به نام ابوعبدالله ماهانی، تحلیلی جبری در مورد لمی از ارشمیدس به نگارش درآورده است. لمی که ارشمیدس در مسئلهٔ بریدن کره با صفحه (حجم دو قسمت حاصل به نسبت مفروضی باشد) به اثبات رساند بیان می‌دارد این مسئله در صورتی قابل حل است که قطعه خطی مانند a به دو قسمت b و c چنان تقسیم شود که نسبت به c به طولی مفروض مثل نسبت مساحتی مفروض بر b^2 باشد. اگر فرض کنیم $b=x$، خواهیم داشت $c=a-x$ و نسبت را می‌توان به صورت $x^3+m=nx^2$ نوشت که در آن m حاصل‌ضرب طول و مساحت مفروض است. خیام می‌گوید، نه ثابت بن قره و نه ماهانی (بین سال‌های ۸۲۵ میلادی تا ۸۸۸ میلادی) که معاصر خوارزمی بوده‌اند، موفق به حل این معادله نشده‌اند، ولی ریاضی‌دانی از نسل بعد به نام ابوجعفر خازن، توانست آن را از تقاطع دادن به مقاطع مخروطی حل کند. سپس ریاضی‌دانان متعددی به پیروی از ابوجعفر به حل انواع خاص این معادلات که از درجهٔ سوم بودند، دست یافتند، ولی کسی دربرشمردن همهٔ معادلات ممکن از این نوع و حل همهٔ آن‌ها کوشش به‌عمل نیاورد. خیام می‌گوید که او این کار را در رساله‌اش انجام خواهد داد.

● طبقه‌بندی خیام از معادلات درجهٔ سوم

در ابتدا تأکید می‌کنیم که گرچه در این قسمت از «معادلات» و «ضرایب» صحبت می‌کنیم، خیام این‌ها را به‌طور نمادی نمی‌نویسد، زیرا او حتی برای اعداد فقط از الفاظ استفاده می‌کند.

خیام در بخش اول رساله‌اش همهٔ انواع معادلاتی را که در آن‌ها جملات بالاتر از درجهٔ سه ظاهر نمی‌شوند، فهرست می‌کند.

در معادلات خیام همهٔ جملات، ضرایب مثبت دارند به‌طوری که، گرچه از نظر ما $x^3-3x+8=0$ و $x^3+3x-8=0$ از یک نوع‌اند، از نظر خیام این دو متفاوت به‌حساب می‌آیند. وی اولی را به صورت «کعبی و عددی معادل جذری است» $(x^3+8=3x)$ بیان می‌کرد و آن‌را از «کعبی و جذری معادل عددی است» $(x^3+3x=8)$ متمایز می‌دید. بنابراین، وی به ۲۵ نوع معادله می‌رسد و در باقی‌ماندهٔ رساله‌اش نشان می‌دهد که چگونه می‌توان ۱۱ نوع از این معادلات را با روش‌های اقلیدسی و ۱۴ نوع آن را با مقاطع مخروطی حل کرد. برای هر یک از این ۱۴ نوع، خیام بخش کوتاهی را به این امر اختصاص می‌دهد و می‌گوید چگونه می‌توان با استفاده از مقاطع مخروطی پاره‌خطی را ایجاد کرد که بتوان از آن اجسام صلبی ساخت که در رابطهٔ مطلوب صدق کنند.

* **توجه:** هرکس که ترجمهٔ انگلیسی کثیر (D.S.Kasir) از جبر خیام را بخواند، استدلال‌های خیام را بسیار روشن خواهد یافت و نیز از نکات متعدد جالب توجهی در تاریخ انواع مختلف معادلات مطلع خواهد شد.

پارادوکس‌های هندسی

فرزاد حمزه‌پور
دبیر ریاضی شهرستان بانه

اشاره

پارادوکس یا باطل‌نما، یافتن تناقضی واقعی یا فریب‌کارانه در یک ساختار ریاضی است. اگر این پارادوکس یک تناقض واقعی را بیان کند ـ مانند آن‌چه که برتراندراسل در ساختار نظریهٔ مجموعه‌ها کشف کرد و به نام خود او پارادوکس راسل نام گرفت ـ در این صورت باید در تعریف‌ها یا اصول اولیهٔ آن ساختمان ریاضی تجدیدنظر کرد تا آن تناقض از برود. اما اگر این تناقض فریب‌کارانه ایجاد شده باشد، نیازی به هیچ تجدیدنظری نیست و در واقع باید در نگاهمان به آن تجدیدنظر کنیم تا با دقت بیشتر و توجه به اصول و ظرایفی که معمولاً به آن‌ها دقت نمی‌شود، ببینیم که چرا این تناقض ایجاد شده است. بنابراین طرح چنین پارادوکس‌هایی هم می‌تواند به نوعی دیگر مفید واقع شود. پارادوکس‌های زیر، نمونه‌هایی از این دست، در هندسه می‌باشند.

کلیدواژه‌ها:
مثلث متساوی‌الساقین، پارادکس، زاویهٔ قائمه، زاویهٔ منفرجه، نیمساز، عمودمنصف، همنهشت.

۱. هر مثلثی متساوی‌الساقین است؟!

فرض کنید ABC مثلث دلخواهی باشد (به شکل زیر نگاه کنید). نیمساز زاویهٔ C و عمودمنصف ضلع AB را رسم می‌کنیم. از نقطه تلاقی آن‌ها یعنی E، عمودهای EG و EF را به ترتیب بر AC و BC وارد کنید و EB و EA را رسم کنید. حال مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ CGE و CFE همنهشت‌اند، زیرا وتر هر دوی آن‌ها CE است و $G\hat{C}E = F\hat{C}E$ (نیمساز)، بنابراین $CG = CF$. هم‌چنین مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ EGB و EFA همنهشت‌اند، زیرا ساق EF از یکی برابر ساق EG از دیگری است (هر نقطه مانند E بر نیمساز زاویهٔ C از دو ضلع این زاویه به یک فاصله‌اند) و چون وتر EA برابر با وتر EB از دیگری است (هر نقطه مانند E بر عمودمنصف پاره‌خطی مانند AB از دو انتهای این پاره‌خط به یک فاصله است) پس $FA = BG$. بنابراین نتیجه می‌شود که $CF + FA = CG + GB$ و لذا $CA = CB$؛ که در نتیجه مثلث مزبور متساوی‌الساقین است.

نقد بر این پارادکس

اشکال اثبات در این است که در مثلث‌هایی غیر از مثلث متساوی‌الساقین و (متساوی‌الاضلاع) نیمساز، عمودمنصف خود را در خارج از مثلث قطع می‌کند (به شکل زیر نگاه کنید).

اثبات:

در مثلث غیر متساوی‌الساقین $AB < AC$

$\frac{AB}{AC} < ۱$ یا $\frac{AB}{AC} > ۱$

بدون اینکه خللی بر اثبات وارد شود فرض کنید:

$$\frac{AB}{AC} < ۱ .$$

از عمود منصف بودن XY داریم:

$$BH_۱ = CH_۱ \Rightarrow \frac{BH_۱}{CH_۱} = ۱$$ و

از نیمساز بودن $AH_۲$ و قضیهٔ نیمسازها داریم:

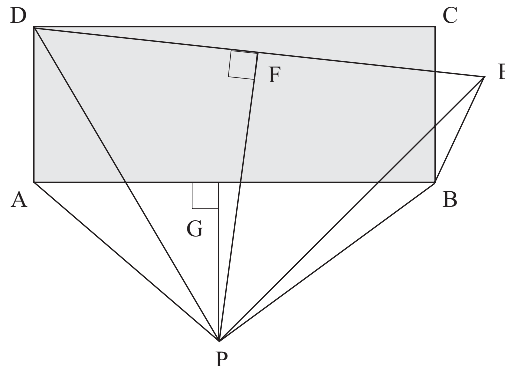
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH_۲}{CH_۲} \Rightarrow \frac{BH_۲}{CH_۲} < ۱$$

پس نیمســاز زاویهٔ A (خط $AH_۲$)، عمودمنصف BC را در خارج از مثلث قطع می‌کند.

۲. یک زاویهٔ قائمه با یک زاویهٔ منفرجه برابر است؟!

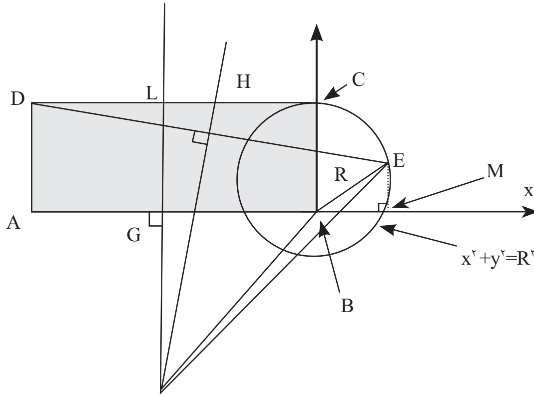
فرض کنید ABCD مســتطیل دلخواهی باشد (شکل زیر را ببینید). BE را خارج مســتطیل و برابر با AD رسم می‌کنیم. ســپس عمــود منصف‌های AB و DE را رســم می‌کنیــم. چون آن‌هــا بر خطوط غیرمــوازی عمودند باید در نقطــه‌ای ماننــد P یکدیگر را قطع کننــد، EP و DP و BP و AP را رســم می‌کنیــم، در این صورت DP = EP و AP = BP (هــر نقطه بر عمودمنصف یــک پاره‌خط از دو ســر پاره‌خط به یک فاصله‌اند) و می‌دانیم که AD = BE؛ بنابراین مثلث‌های BPE و APD همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض). در نتیجه $D\hat{A}P = E\hat{B}P$؛ اما $B\hat{A}P = A\hat{B}P$، زیرا این زوایا، زوایای مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین APBاند.

با تفریق، اکنون نتیجه می‌شود که زاویهٔ قائمهٔ $D\hat{A}G$ برابر زاویهٔ منفرجهٔ $E\hat{B}G$ است.



نقد بر پارادکس

اشکال اثبات در این است که شیب PB را کوچک‌تر از شیب BE گرفته‌ایم که دقیقاً برعکس است؛ ببینید:



$$DC = P_۰ \quad BM = a \ , \ D\left|\begin{matrix}-p_۰\\ R\end{matrix}\right. \ , \ L\left|\begin{matrix}\frac{-p_۰}{۲}\\ R\end{matrix}\right. \ , \ C\left|\begin{matrix}۰\\ R\end{matrix}\right.$$

$$E\left|\begin{matrix}a\\ \sqrt{R^۲-a^۲}\end{matrix}\right. \ , \ B\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \ , \ P\left|\begin{matrix}\frac{-p_۰}{۲}\\ \frac{-P_۰ a}{۲(R-\sqrt{R^۲-a^۲})}\end{matrix}\right. (@)$$

$$H\left|\begin{matrix}\frac{a-p_۰}{۲}\\ \frac{R+\sqrt{R^۲-a^۲}}{۲}\end{matrix}\right.$$

$$m_{DE} = \frac{\sqrt{R^۲-a^۲}-R}{a+p_۰}$$

$$y-y_H = -\frac{۱}{m_{DE}}(x-x_H)$$

$$\Rightarrow y-\frac{\sqrt{R^۲-a^۲}+R}{۲} = \frac{a+p_۰}{R-\sqrt{R^۲-a^۲}}(x-\frac{a-p_۰}{۲})$$

$$y = \frac{a+p_۰}{R-\sqrt{R^۲-a^۲}}x - \frac{a^۲-p_۰^۲}{۲(R-\sqrt{R^۲-a^۲})} + \frac{\sqrt{R^۲-a^۲}+R}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a+p_۰}{R-\sqrt{R^۲-a^۲}}x + \frac{p_۰^۲}{۲(R-\sqrt{R^۲-a^۲})}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲(a+b)x+p_۰^۲}{۲(R-\sqrt{R^۲-a^۲})} (@)$$

$$(m_{PB})m_۱ = \frac{\dfrac{p_۱ a}{۲(R-\sqrt{R^۲-a^۲})}}{\dfrac{p_۱}{۲}} = \frac{a}{R-\sqrt{R^۲-a^۲}}$$

$$= \frac{R+\sqrt{R^۲-a^۲}}{a} \quad (۱)$$

$$(m_{BE})m_۲ = \frac{\sqrt{R^۲-a^۲}}{a} \quad (۲)$$

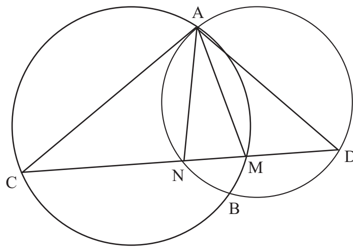
$$(۱),(۲) \Rightarrow m_۲ < m_۱$$

در نتیجه مثلث BEP خارج مستطیل است.

۳. از یک نقطه می‌توان دو عمود بر خطی رسم کرد؟!

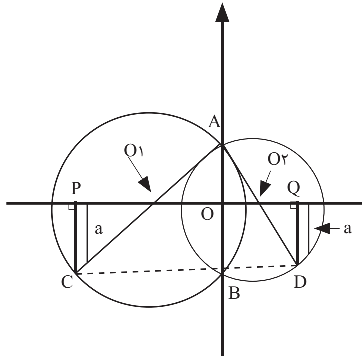
فــرض کنید که دو دایرهٔ دلخواه یکدیگر را در نقطهٔ B و A قطع کنند (شکل را ببینید).

اقطار AD و AC را رســم و فرض کنید که خط واصل بین C و D دایره‌های مربوط را M و N قطع کنند. در این صــورت زوایای AND و AMC قائمه‌انــد، زیرا هر یک در نیم‌دایــره‌ای محاط‌اند. بنابرایــن AN و AM دو عمود وارد بر CD هستند.



نقد بر این پارادکس

اثبــات: اشــکال اثبات در این اســت کــه M و N یــک نقطه‌اند، یعنی امتداد D به طرف C از B می‌گذرد.



زیرا اگر وسط AB را مبدأ مختصات فرض کنیم، روابط زیر برقرار است:

$$A\overset{\Delta}{O_۱}O \cong O_۱\overset{\Delta}{P}C \Rightarrow PC = AO = a$$

$$A\overset{\Delta}{O}O_۲ \cong O_۲\overset{\Delta}{Q}D \Rightarrow QD = AO = a$$

بنابراین $y_B = y_C = y_D = a$ و در نتیجه DC از نقطهٔ B می‌گذرد.

اسم وبگاه: Maths is good for you

وبگاه‌های ریاضی جهان

نشانی وبگاه: http://www.mathsisgoodforyou.com

صفحهٔ اصلی این سایت دربرگیرندهٔ عناوین زیر است که هریک از آن‌ها نیز زیرعنوان‌هایی دارند که به تفصیل دربارهٔ آن‌ها مطالبی آورده است.

- دوره‌های آموزشی (Courses)
- ریاضی‌دانان (Mathematicians)
- عناوینی در تاریخ ریاضیات(Topics in the History of Mathematics)
- قضایا و حدس‌های مشهور(Famous Theorems and Conjecture)
- جبر (Algebra)
- هندسه (Geometry)
- منطق (Logic)
- مکان‌شناسی (Topology)
- مثلثات (Trigonometry)
- فیثاغورسیان (Pythagoreans)
- ریاضیات مصری (Egyptian Maths)



کوزه در خیاط

تاریخچه مجله ریاضی برهان

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: تاریخچهٔ مجلهٔ برهان، پیدایش صفر، مشاهیر ریاضی جهان، محاسبات ریاضی، محاسبهٔ انتگرال، تابع، هندسهٔ فضایی، مجلهٔ یکان، روش لاگرانژ، روش اویلر، اعداد فیبوناتچی، اعداد لیوویل.

در شمارهٔ هجدهم، باز هم طبق معمول، اولین مقاله، مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**»، از استاد شهریاری است. در این مقاله، پاره‌ای از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع آورده شده است که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از:

مثلث متساوی‌الاضلاع با همهٔ سادگی خود، ویژگی‌های جالب زیادی دارد که اثبات برخی از آن‌ها چندان ساده نیست. برخی از این ویژگی‌ها در آغاز موجب شگفتی می‌شوند. سیاههٔ کوتاهی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را در این‌جا آورده‌ایم، ولی این سیاهه را می‌توانید ادامه دهید و اندیشهٔ هندسی خود را دربارهٔ این ویژگی‌ها بیازمایید و برای اثبات درستی آن‌ها تلاش کنید:

۱. مثلث متساوی‌الاضلاع تنها مثلثی است که سه محور تقارن دارد.

۲. در بین مثلث‌های با محیط برابر، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۳. اگر طول شعاع دایرهٔ محاط در مثلث را r و طول شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث را R بنامیم، بیشترین مقدار نسبت $\frac{r}{R}$ در مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.

۴. اگر نقطهٔ M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب و عمودهای MP، MQ و MR را بر ضلع‌های مثلث فرود آوریم (شکل ۲)، مجموع طول‌های این سه عمود، به جای نقطهٔ M بستگی ندارد و در هر حال، برابر طول ارتفاع مثلث است.

در مقالهٔ **تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران** این شماره، بخشی دربارهٔ **ویژگی‌های صفر** آمده است. اندکی از این مقاله را در این‌جا می‌آوریم:

صفری که اغلب دانش‌آموزان از آن نفرت دارند و صفر بی‌مقداری که هیچ‌کس آن را دوست ندارد، داستان و تاریخ دلپذیری دارد. بین ارقام مختلف، صفر از همه جوان‌تر است. به مقیاس انسانی، صفر را در مقابل سایر اعداد، نوزادی بیش نباید دانست. در این صورت، آیا این همه نفرت از این موجودی که (!) فرصت نداشته است آن‌طور که باید و شاید خود را نشان دهد، بیجا نیست؟ شاید اگر عمر صفر به اندازهٔ عمر سایر اعداد بود، اکنون یکی از عزیزترین اعداد به‌حساب می‌آمد. قبول ندارید؟ پس شما را به خواندن این داستان، که داستانی جز سرگذشت صفر، این طفل یک‌شبه نیست، دعوت می‌کنیم.

صفر، اولین علامت از ده علامتی است که بیانگر ارقام است؛ ارقامی که ما می‌توانیم کلیهٔ اعداد فوق‌العاده بزرگ را به کمک آن‌ها نشان دهیم، ارقامی که تار و پود تمدن جدید بر آن‌ها استوار است. پس، اولین رقمی است که باید با آن آشنا شویم. ولی باید اذعان داشت که این اولین رقم، آخرین رقمی بود که پیدا شد، یا بهتر بگوییم این اولین عدد، آخرین عددی بود که کشف شد.

این دو واقعه، یعنی **پیدایش و کشف** صفر به موجب تاریخ اعداد، در یک زمان اتفاق نیفتاد. پیدایش آن قرن‌ها قبل از کشف آن اتفاق افتاد. تا سال‌های مقارن با تولد مسیح تصور صفر به عنوان یک عدد به فکر هیچ‌کس نرسیده بود. حتی در کلیهٔ مجامع مترقی آن زمان، شکل نوشتن هر یک از اعداد، با علامت‌های متفاوت بود. برای مثال، مصریان قدیم اشکال مختلفی برای نشان دادن اعداد به‌کار می‌بردند. یونانیان از حروف الفبا برای بیان اعداد استفاده می‌کردند. رومیان با چند خط

ساده که در سنگ‌نبشته‌ها دیده شده است، اعداد را نشان می‌دادند.

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند، ولی همهٔ آن‌ها اعداد را دسته‌بندی کرده بودند، به گونه‌ای که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد.

بقیهٔ ویژگی‌های صفر را می‌توان در همین شماره خواند.

در مقالهٔ **«مشاهیر ریاضی جهان»** این شماره با پاره‌ای از ریاضی‌دان‌ها ازجمله **فرما، فیبوناتچی، فوریه و گالوا** آشنا می‌شویم. یکی از این ریاضی‌دان‌ها **گودل** آلمانی است که در شرح حالش چنین می‌خوانیم:

کورت گودل[1] (۱۹۰۶-۱۹۷۸) در سال ۱۹۳۱ مطلبی را منتشر کرد که بسیاری از امیدواری‌های منطق ریاضی جدید را بر باد داد. ریاضی‌دان‌ها در تلاش بودند تا نظریهٔ حساب مقدماتی را بر مبنایی دقیق و صوری قرار دهند. یکی از شرایط لازم در مورد هر دستگاه صوری آن است که خودـ سازگار و کامل باشد. گودل نشان داد که سازگاری حساب مقدماتی را نمی‌توان از داخل خود نظریه اثبات کرد و به این ترتیب، مفهوم اثبات‌ناپذیری را به‌عنوان مفهومی مهم که در علوم کامپیوتری جدید دارای اهمیت است به‌دست ما سپرد.

بعضی از مقاله‌های این شماره عبارت‌اند از:

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f: احمد قندهاری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضا امیری

رادیکال: سید محمدرضا هاشمی موسوی

در اظهار نظر شتاب نکنیم: احمد شرف‌الدین

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی‌پور

تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران: غلامرضا یاسی‌پور

تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها از طریق ریشه‌یابی: رضا پیکر

پیرامون منظومهٔ شمسی: حسن نصیرنیا

مکان هندسی: محمدهاشم رستمی

نکته‌ای هندسی برای ساختن جوی‌ها: احمد شرف‌الدین

ناگفته نماند که این شماره با بهای ۲۰۰۰ ریال منتشر شد.

* * *

شمارهٔ نوزدهم مجله در زمستان ۱۳۷۵ با بهای ۲۰۰۰ ریال انتشار یافت.

مقالهٔ **«شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید»** در این شماره همچون شماره‌های پیشین خواندنی است.

این مقاله به مفهوم حد و دقت نکردن در کاربرد آن پرداخته و در آن به این موضوع اشاره شده است که: نخستین کسی که از مقدارهای بسیار کوچک و حد مجموع آن‌ها استفاده کرد، **ارشمیدس** بود. او با روش ابداعی خود توانست راهی برای محاسبهٔ مساحت قطعه‌ای از سهمی و هم‌چنین محاسبهٔ حجم سهموی (پارابولوئید)، یعنی حجم جسمی که از دوران یک سهمی دور محور خود به‌دست می‌آید، پیدا کند (امروزه، این محاسبه‌ها را به یاری انتگرال‌گیری انجام می‌دهند. به همین مناسبت، ارشمیدس را باید پیشگام در راه کشف محاسبهٔ انتگرال دانست).

«تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران»، این شماره نیز هم‌چنان در کار معرفی مقاله‌های مجلهٔ یکان است که در آن مطلب مهم زیر را می‌خوانیم:

در نظر عموم مردم، ریاضی‌دان شخصی است که در حساب ورزیده باشد، ولی خود ریاضی‌دانان این تعریف را قبول ندارند. ریاضی‌دانان می‌گویند که خودشان به اندازهٔ اشخاص دیگر در محاسبات روزانه و در بررسی صورت‌حساب‌های بانکی خویش اشکال دارند و به داستان‌هایی که دربارهٔ ریاضی‌دانان معروف گفته می‌شود، استناد می‌جویند. برای مثال، می‌گویند که نیوتن به هنگامی که رئیس ضرابخانه بود، شخصی را استخدام کرد تا محاسباتش را انجام دهد. اختراع و تکمیل خط‌کش‌های محاسبه و ماشین‌های حساب الکترونیکی نیز به‌منظور کمک به ریاضی‌دانان انجام گرفته است.

بدیهی است که مطالب فوق زیاد مستدل نیست. اگر ریاضی‌دانان را کنار بگذاریم از چه کسانی اعداد فرد و زوج و مربع و سرراست را یاد بگیریم؟ برای کسب اطلاع از اعداد فیبوناتچی و اعداد لیوویل و اعداد فوق مختلط و اعداد لایتناهی به چه مقامی مراجعه کنیم؟ پس باید دانست که ریاضیات، در حد اعلای خود، همیشه به بازی با اعداد مربوط می‌شود. **برخف،** دانشمند معروف آمریکا، بارها خاطرنشان می‌کرد که معماهای سادهٔ پدید آمده دربارهٔ اعداد صحیح در طی قرون متمادی، سرچشمهٔ تجدید حیات ریاضیات بوده است.

در **ادب ریاضی** این شماره به گفته‌ای از **لاپلاس** ۲۸ ساله خطاب به **دالامبر** برمی‌خوریم که در آن چنین آمده است:

من همواره به اقتضای ذوق خویش به مطالعه در ریاضیات پرداخته‌ام، نه به علت تمایل به شهرت‌های بی‌حاصل که اصلاً توجهی به آن‌ها ندارم. بزرگ‌ترین تفریح من آن است که خط سیر مخترعان را تعقیب کنم و نبوغ آنان را هنگام مواجهه یا موانع مشاهده کنم و موانعی را که آنان در سر راه خویش دیدند و توانستند از آن‌ها بگذرند، در نظر آورم.

در چنین مواردی سعی می‌کنم خویشتن را به جای ایشان قرار دهم و این مسئله را مطرح کنم که در چنین مقامی من خود برای عبور از این موانع چه می‌کرده‌ام و با آن‌که در اغلب

ایرانیان نیز علامات محدودی برای نشان دادن اعداد به خط میخی به کار می‌بردند، ولی همهٔ آن‌ها اعداد را دسته‌بندی کرده بودند، به گونه‌ای که نوشتن اعداد بزرگ با تکرار این علامات نشان داده می‌شد

موارد این جانشینی موجب توقف من می‌شود و برای من حسرت و خفت ایجاد می‌کند، ولی بر عزت‌نفس خود چیره می‌شوم و این مختصر خفت را با لذت استفاده از توفیق آنان با شایسته‌ترین وضع جبران می‌کنم. در موارد معدودی که اقبال با من یاری می‌کند و موفق می‌شوم که چیزی بر آثار آنان بیفزایم، همهٔ لیاقت این توفیق را به اولین کوشش‌های آن‌ها نسبت می‌دهم و خویشتن را قانع می‌کنم که اگر آنان در وضع من قرار داشتند خیلی پیش‌تر از آن می‌رفتند که من رفته‌ام.

در مطلب **«مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان»** در مورد **حدس گلدباخ** به مطلب خواندنی زیر برمی‌خوریم:

یکی از مشهورترین سؤال‌های بی‌پاسخ مربوط به اعداد اول، حدس گلدباخ است. **کریستین گلدباخ** در نامه‌ای به **لئونهارد اویلر** در سال ۱۷۴۲، حدس زد که هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ مجموع دو عدد اول است. برای نمونه:

۴=۲+۲

۶=۳+۳

۸=۳+۵

۱۰=۵+۵

۱۲=۵+۷

تحقیقات کامپیوتری، حدس گلدباخ را به ازای جمیع اعداد زوج تا ۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰ ثابت کرد، اما اثبات یا عدم اثبات کلی آن تاکنون مشخص نشده است.

مقالهٔ **«بی‌نهایت» استاد پرویز شهریاری** چنین آغاز می‌شود:

«بی‌نهایت» به‌معنای سادهٔ خود در ریاضیات، یعنی بزرگ‌تر از هر عددی، ولی خود بی‌نهایت، یک عدد نیست، بلکه یک مفهوم است و بیشتر معرف یک کیفیت است تا کمیتی مشخص. به همین دلیل است که تا مدت‌ها، ریاضی‌دانان به چند و چون بی‌نهایت نمی‌پرداختند و از کنار آن می‌گذشتند. وقتی زنون، ریاضی‌دان یونانی، برای اثبات یکپارچگی جهان و نبودن حرکت در آن، با درکی ساده‌اندیشانه از «بی‌نهایت» استفاده کرد، هراس ریاضی‌دانان یونانی را از بی‌نهایت بیش‌تر کرد، زیرا می‌دیدند که با سوءاستفاده از آن، می‌توان حقیقت را وارونه جلوه داد.

تنها ریاضی‌دان دنیای کهن که برخلاف تفکر رایج زمان خود، بی‌نهایت را به مفهوم ریاضی آن (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) بررسی کرد، ارشمیدس بود. ارشمیدس در نوشته‌های خود از روشی استفاده می‌کند که دو هزار سال بعد از او به کشف محاسبهٔ انتگرالی منتهی شد.

ساده‌ترین کاربرد این روش را در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره» می‌بینیم. ارشمیدس در این رساله برای نخستین‌بار در تاریخ ریاضیات، مسئلهٔ اندازه‌گیری طول محیط دایره و تعیین مقدار تقریبی عدد پی (π) را مطرح می‌کند و درضمن، میزان خطای موجود را در هر مرحله از محاسبه به‌دست می‌دهد.

در مقالهٔ **«در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع»** از **حمیدرضا امیری** به این موضوع می‌رسیم که:

در شاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریف آن شیوه‌های مختلفی به‌کار می‌رود که البته همگی معنای واحدی دارند و فقط نوع گفتار یا ابزارهای معرفی تابع فرق می‌کند، اما مهم این است که مفهوم تابع با مفهوم مجموعه‌ها، همواره درهم آمیخته، به طوری که حتی می‌توان برای شروع، تابع را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف کرد که در آن هیچ دو زوج مرتبِ متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر یافت نشود.

بعضی از مقاله‌های دیگر این شماره عبارت‌اند از:

مکان هندسی: محمدهاشم‌رستمی

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: حمیدرضاامیری

حل یک مسئلهٔ آنالیز با هندسه: دکتر احمد شرف‌الدین

رادیکال: سید محمدرضا هاشمی موسوی

ماکزیمم و می‌نیمم: امیرمنصور خان‌محمد و مجید اعتماد سعید

دسته خط: سیامک جعفری

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی‌پور

* * *

شمارهٔ بیستم این مجله در بهار ۱۳۷۶ با همان بهای ۲۰۰۰ ریال انتشار یافت.

در اولین مقالهٔ این شماره که طبق معمول از **استاد شهریاری** با عنوان همیشگی **«شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید»** است در سرفصل **«نقش شکل در مسئله‌های هندسهٔ فضایی»** چنین می‌خوانیم:

اگر در هندسه روی صفحه باید مراقبت کرد تا شکل درست و دقیق رسم شود و سپس با استدلال و با پیدا کردن رابطه‌های موجود بین عنصرهای شکل (زاویه‌ها و پاره‌خط‌های راست و غیره) درستی آن را تأکید کرد، در هندسهٔ فضایی، اغلب خود رسم شکل، دشواری به‌وجود می‌آورد و پیدا کردن رابطه‌هایی که ممکن است بین عنصرهای شکل وجود داشته باشد، چندان ساده نیست. رسم برخی جسم‌های فضایی، مثل مکعب مستطیل، هرم یا منشور با قاعدهٔ سه‌ضلعی یا چهارضلعی چندان دشوار نیست، ولی رسم جسم‌هایی مثل هرمی با قاعدهٔ هفت‌ضلعی یا پیدا کردن شکلی که از برخورد یک صفحه با جسم فضایی یا دو جسم فضایی به دست می‌آید یا تلاش برای یافتن سایهٔ

یک جسم (یعنی تصویر مرکزی آن)، گاهی بسیار دشوار خواهد بود. گذشته از رسم شکل، جست‌وجوی رابطه‌های لازم بین عنصرهای جسم هم، اغلب سردرگمی به‌وجود می‌آورد.

در مقالهٔ **«تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران»** این شماره که هم‌چنان در کار بررسی **مجلهٔ یکان** است، به مناسبت سالروز انتشار یکان به این آگهی برمی‌خوریم:

«اولین شمارهٔ مجلهٔ یکان در بهمن‌ماه دو سال قبل تقدیم علاقه‌مندان شد.»

استقبالی که از این مجلهٔ صد درصد علمی به عمل آمد، این امکان را برایش فراهم ساخت تا قائم بالذات به حیات عملی خویش ادامه دهد و اتکای وی فقط به خوانندگان و علاقه‌مندان خویش باشد. کوشش‌هایی که تاکنون به عمل آمده، تنها در راه بهبود وضع مجله در جهت مطلوب آن و در جهت تمایلات خوانندگان آن انجام گرفته و غیر از آن، حتی برای شناساندن مجله به مقامات ذی‌نفوذ، کوچک‌ترین اقدامی به‌عمل نیامده، مگر آنچه آیین‌نامه و قانون مطبوعات ایجاب می‌کرده است.

باز در همین مقاله و با عنوان **«بی‌آن‌که عصبانی شوید این مسئله را حل کنید»** به این معما می‌رسیم:

سه نفر از دانایان یونان قدیم در باغ آکادمی استراحت می‌کردند و به خواب رفته بودند: رجاله‌ای که گذارش به آن‌جا افتاده بود، پیشانی هر یک از آن‌ها را با دوده سیاه کرد، بعد در اثر صدایی که از ناحیه‌ای برخاست، هر سه نفر از دانایان بیدار شدند و هریک از دیدن پیشانی دو نفر دیگر، شروع به خنده کردند. اما بعد از لحظه‌ای، هر سه نفر از خنده بازایستادند، زیرا هر یک دریافته بودند که پیشانی خود آن‌ها نیز سیاه است. به چه دلیل منطقی؟

در **ادب ریاضی** این شماره، از قول **داوید هیلبرت**، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، چنین آمده است:

مشهور است که زرگر متقلبی که بنا بود تاجی از طلا برای **هیرون** بسازد، مقداری نقره در آن وارد کرده بود و پادشاه که تقلب صنعتگر را حدس زده بود، **ارشمیدس** را خواست که دربارهٔ حل این مسئله راه چاره‌ای بیابد.

امروزه هر محصل مدرسهٔ متوسطه می‌داند که چگونه می‌تواند با تجربه‌ای ساده و با حساب مختصری دربارهٔ وزن مخصوص‌ها این مسئله را حل کند و نیز همهٔ مبتدیان جوان و مهندسان بحرپیمایی و کشتی‌سازی موارد کاربرد بی‌شمار قانونی را که به اصل ارشمیدس معروف است، می‌دانند. اما مردی که برای اولین‌بار توانست از تجربه‌ای عادی چنین قانونی را نتیجه بگیرد، در مقامی مافوق مشاهده‌کنندگان عادی قرار داشته است.

از این نکته اطلاعی نداریم که بالاخره زرگر را مقصر شناختند یا نه، اما با استناد به این افسانه، معمولاً به این سؤال پاسخ داده می‌شود.

در مقالهٔ **«مشاهیر ریاضی جهان»** این شماره به شرح حال **لاگرانژ**، ریاضی‌دان فرانسوی برمی‌خوریم.

این شرح حال مختصر به صورت زیر است:

ژوزف لویی لاگرانژ[2] (۱۸۱۳-۱۷۳۶) و **اویلر**، شاید بزرگ‌ترین ریاضی‌دان‌های قرن هجدهم باشند. گرچه لاگرانژ در تورین تولد یافت و بخش آغازین حیات خود را در آن‌جا گذراند، اما سرانجام در پاریس اقامت گزید و معمولاً ملیت او را فرانسوی می‌دانند، اما ممکن است ایتالیایی‌ها این را عادلانه تصور نکنند. غالب کارهای مهمش در برلین، که در آکادمی آن جانشین اویلر بود، انجام گرفت. آثارش، همراه با آثار مهم‌ترین ریاضی‌دان‌های آن زمان، همهٔ مسائل ریاضیات را دربرمی‌گیرد. شاید بیشتر به عنوان پیشرو در توسعهٔ مکانیک نظری مشهور باشد، به‌ویژه که عهده‌دار روش‌های حساب تغییرات و روش لاگرانژی حاصل از آن در مکانیک است. در نظریهٔ ماکسیمم‌ـ می‌نیمم معمولی، باید مقدار xی را که مثلاً مقدار $F(x)$ را می‌نیمم می‌کند، به‌دست آوریم. در صورت مبنایی حساب تغییرات، باید مسئلهٔ بسیار مشکل‌تر به دست آوردن تابع fی را حل کنیم که مقدار انتگرالی چون $\int_a^b F(x,f(x),f'(x))dx$ را می‌نیمم می‌کند. یکی از مسائل مشهور این موضوع مسئلهٔ یافتن منحنی و اصل دو نقطهٔ مفروض در صفحهٔ قائمی است که ذرهٔ لغزنده در امتداد آن تحت نیروی ثقل، کمترین زمان را برای رسیدن از نقطهٔ بالایی به نقطهٔ پایینی بگیرد.

پاره‌ای از مطالب این شماره به‌ترتیب زیرند:

تغییرات و انتقال منحنی‌ها: احمد قندهاری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی: محمدصادق عسکری

رادیکال: سید محمدرضا هاشمی موسوی

اصل رد و شمول: امیرمنصور خان‌محمد، امیر فرزاد

ریاضیات گسسته: غلامرضا یاسی‌پور

سرگرمی برای اندیشه‌ورزی: حسن نصیرنیا

مکان هندسی: محمدهاشم رستمی

یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه و کاربرد آن در صنعت: دکتر احمد شرف‌الدین

بررسی وضع دو دایره نسبت‌به هم: محمدهاشم رستمی

محاسبهٔ مساحت دایره: سید محمدرضا هاشمی موسوی

پی‌نوشت

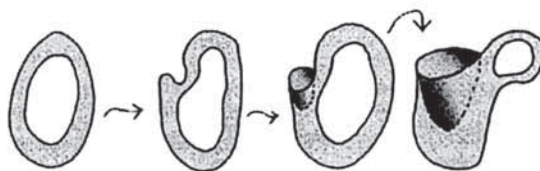
1. Kurt Godel
2. Joseph Louis Lagrange

توپولوژی

رضا تهرانی

کلیدواژه‌ها:
توپولوژی، کیفیات شکل‌ها، طول، سطح، زاویه، هندسهٔ صفحه لاستیکی، چندوجهی‌ها، چندوجهی منتظم، اجسام ارشمیدسی، فرمول اویلر، رویهٔ یک‌طرفه، فضای سه بعدی، مَنیفُلد، حدس پوانکاره.

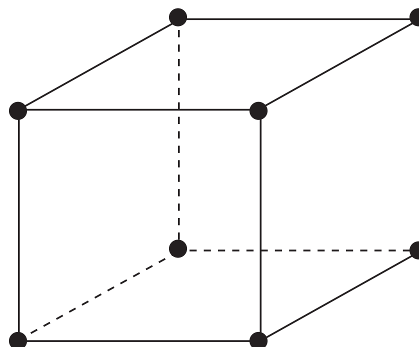
توپولوژی، شاخه‌ای از هندسه است که با ویژگی‌های سطوح و اشکال عمومی سروکار دارد، اما به اندازه‌گیری طول‌ها یا زوایا نمی‌پردازد. در این مسیر، مهم کیفیاتی هستند که هنگام انتقال شکل‌هایمان به شکل‌های دیگر بی‌تغییر می‌مانند. در این مورد مجازیم که شکل را در هر جهت فشار دهیم و بکشیم؛ و به همین دلیل است که توپولوژی را گاهی به عنوان «هندسهٔ صفحه لاستیکی»[1] توصیف می‌کنند. توپولوژیست‌ها افرادی هستند که نمی‌توانند تفاوت بین یک شیرینی حلقه‌ای (دونات) و یک فنجان قهوه را بیان کنند!



دونات یا شیرینی حلقه‌ای، رویه‌ای است با سوراخی در آن. فنجان قهوه هم همان است که در آن سوراخ مورد بحث، شکل دسته را اختیار می‌کند. در شکل موردنظر، چگونگی انتقال دونات به فنجان قهوه آورده شده است.

دسته‌بندی چندوجهی‌ها

اساسی‌ترین شکل‌هایی که توپولوژیست‌ها آن‌ها را



بررسی کرده‌اند چندوجهی[2]ها هستند. (poly به معنای «بسیار» و hedra به معنای «وجه‌ها» یا «رویه‌ها»). مثالی از چندوجهی‌ها مکعب است با ۶ وجه[3] مربع، ۸ رأس[4] (نقاط واقع در اتصال وجوه) و ۱۲ یال[5] (خط‌های وصل‌کنندهٔ رأس‌ها). مکعب، یک چندوجهی منتظم[6] است، زیرا در آن:

- همهٔ وجه‌ها، شکل‌های منتظم یکسان‌اند؛
- همهٔ زوایای بین یال‌های برخوردکننده در یک رأس، برابرند.

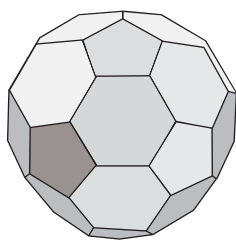
توپولوژی موضوعی نسبتاً جدید است، اما با این همه می‌توان رد آن را تا یونانیان دنبال کرد و در واقع دستاورد نهایی در مقدمات[7] اقلیدس، نشان دادن این است که دقیقاً پنج چندوجهی منتظم موجود است. این چندوجهی‌ها، اجسام افلاطونی[8] هستند:

- چهاروجهی[9] (با ۴ وجه مثلث‌شکل)؛
- مکعب[10] (با ۶ وجه مربع)؛
- هشت‌وجهی[11] (با ۸ وجه مثلث‌شکل)؛
- دوازده‌وجهی[12] (با ۱۲ وجه پنج ضلعی)؛
- بیست‌وجهی[13] (با ۲۰ وجه مثلث شکل)

در صورتی که یکسان‌بودن وجه‌ها را حذف کنیم، در قلمرو اجسام ارشمیدسی[14] خواهیم بود که نیمه ـ منتظم[15]اند. در این مورد مثال‌ها را می‌توان از اجسام افلاطونی به‌دست آورد. اگر گوشه‌هایی از یک بیست‌وجهی را ببریم (ناقص کنیم)، شکلی به دست می‌آوریم که در



طرح توپ فوتبال مدرن به‌کار رفته است. در این صورت، ۳۲وجهی که قاب‌ها[۱۶] را می‌سازند از ۱۲ پنج‌ضلعی و ۲۰ شش‌ضلعی ساخته شده‌اند. در این مورد ۹۰ یال و ۶۰ رأس موجود است. شکل مذکور، شکل مولکول‌های باکمینسترفولرین[۱۷] نیز هست که به نام ریچارد باکمینسترفولر[۱۸] خیال‌پرور، خالق گنبد ژئودزیک[۱۹] نام‌گذاری شده است. این «توپ‌های باکی»[۲۰] صورت تازهٔ کشف‌شدهٔ کربن ($C_{۶۰}$) با یک اتم کربن یافت شده در هر رأس است.



بیست‌وجهی‌ناقص

فرمول اویلر

فرمول اویلر[۲۱] این است که تعداد رأس‌های V، یال‌های E و وجه‌های F یک چندوجهی طبق رابطهٔ زیر را به هم مرتبط‌اند:

V−E+F=۲

برای مثال در مورد مکعب، V=۸، E=۱۲ و F=۶ بنابراین خواهیم داشت:

V−E+F =۸−۱۲+۶=۲

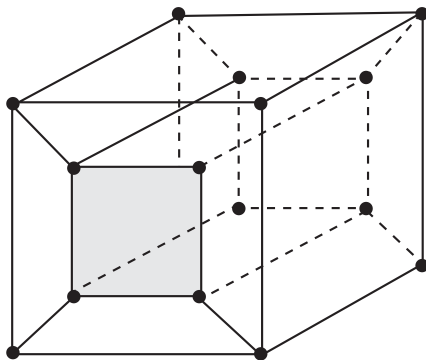
و در مورد باکمینسترفولرین داریم:

V−E+F =۶۰−۹۰+۳۲=۲

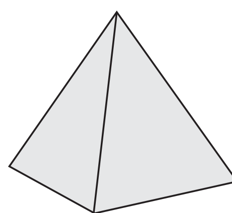
این قضیه عملاً خودِ مفهوم چندوجهی را زیر سؤال می‌برد.

آیا در صورتی که مکعبی، «تونلی» در میان خود داشته باشد، چند وجهی واقعی است؟ در مورد این شکل، V=۱۶، E=۳۲ و F=۱۶ است و داریم:

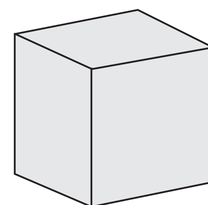
V−E+F =۱۶−۳۲+۱۶=۰



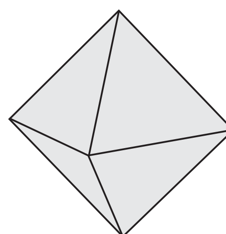
مکعبی با یک تونل



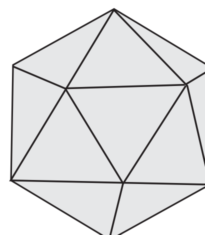
چهاروجهی



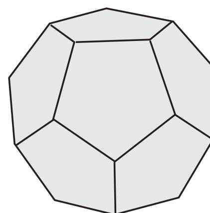
مکعب



هشت‌وجهی



بیست‌وجهی



دوازده‌وجهی

یعنـــی فرمول اویلر از کار می‌افتد. در این صورت، برای اصلاح صحّت فرمول مزبور، نوع چندوجهی را باید محدود بـه موارد بــدون تونل کرد، یـا به طریق دیگــر، فرمول را می‌توان برای دربرگرفتن این حالت خاص تعمیم داد.

دسته‌بندی رویه‌ها

گرچه توپولوژیســت می‌تواند دونــات و فنجان قهوه را یکسان در نظر بگیرد، اما چه نوع رویه‌ای متفاوت از دونات است؟ در این مورد، یک کاندیدا توپ لاستیکی است. یعنی هیچ طریقی بــرای تبدیل دونات به توپ موجود نیســت، زیــرا دونات یک ســوراخ دارد، در حالی‌که توپ ندارد. این تفاوت، تفاوتی اساســی بین دو رویه اســت. بنابراین، یک طریق دسته‌بندی رویه‌ها، استفاده از سوراخ‌های آن‌هاست.

بگذارید رویه‌ای با r سوراخ را در نظر بگیریم و آن را به نواحی محصور با یال‌های وصل‌کنندهٔ رئوس نصب‌شــده به یکدیگر در آن رویه تقســیم کنیم. زمانی که این کار انجام گرفت، می‌توان تعداد رئوس، یال‌ها و وجه‌ها را شــمرد. در این صورت، به ازای هر تقسیم، عبارت اویلر، یعنی V–E+F همواره دارای مقدار یکســانی است که مشخصهٔ اویلر[۲۲] آن رویه نامیده می‌شود:

V–E+F= ۲r–r

اگر رویه بدون سوراخ باشد (یعنی r=۰)، همان‌گونه که در حالت چندوجهی‌هــای معمولی بود، فرمول مورد بحث به فرمول اویلر، یعنی V–E+F=۲ تبدیل می‌شود. در حالت یک سوراخ (یعنی r=۱)، مکعب با یک تونل خواهیم داشت که در آن فرمول زیر برقرار است:

V–E+F=۰

رویه‌های یک‌طرفه

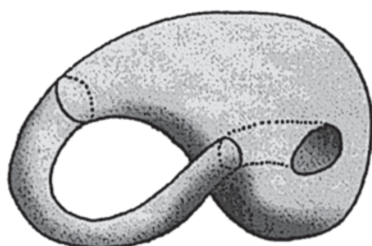
یک رویه به‌طور معمول، دارای دو طرف اســت. بیرون یک تــوپ با درون آن تفاوت دارد و تنهــا راه عبور از یک طرف به طرف دیگر، ســوراخ‌کردن توپ است؛ عمل برشی که در توپولوژی مجاز نیســت (می‌توانیم گسترش یا کش دهیــم اما نمی‌توانیم ببریم). یــک تکه کاغذ، مثال دیگری از یک رویه با دو طرف اســت، زیــرا تنها مکانی که در آن یک طرف بــا طرف دیگر برخورد می‌کنــد، در امتداد خم محصورکننده‌ای اســت که از لبه‌های کاغذ ســاخته شده است.

ایدهٔ رویــهٔ یک‌طرفه دور از ذهن به نظر می‌رســید. با وجــود این، مورد مشــهوری از آن را آگوســت موبیوس[۲۳]، ریاضی‌دان و منجم آلمانی در قرن نوزدهم کشف کرد. برای ســاختن چنین رویه‌ای، نوار کاغذی برمی‌داریم، یک پیچ به آن می‌دهیم، ســپس سرهای آن را به هم می‌چسبانیم. نتیجه نوار موبیوســی[۲۴] یعنی، رویه‌ای یک‌طرفه با یک خم مرزی اســت. اکنون می‌توان مدادی برداشــت و شروع به کشــیدن خطی در وســط آن کرد. در ایــن صورت طولی نمی‌کشد که به نقطهٔ آغاز برمی‌گردید.



نوار موبیوس

حتی داشــتن رویهٔ یک‌طرفه‌ای که خم مرزی نداشته باشــد امکان‌پذیر اســت. بــه این رویه «بطــری کلاین»[۲۵] می‌گویند که بــه نام فلیکس کلایــن[۲۶] ریاضی‌دان آلمانی نام‌گذاری شــده اســت. نکتهٔ جالب در مورد این بطری آن است که خود را قطع نمی‌کند، گرچه ساختن مدلی از بطری کلاین در فضای ســه‌بُعدی بدون قطع فیزیکی امکان‌پذیر نیســت، زیرا این بطری دقیقاً در فضایی چهاربُعدی زندگی می‌کند، جایی که در آن تقاطعی نخواهد داشت.



بطری کلاین

هــر دوی این رویه‌ها، مثال‌هایی از شــکلی اســت که توپولوژیســت‌ها آن را مَنیفُلد یــا خمینه[۲۷] می‌نامند؛ یعنی رویه‌هــای هندســی کــه اگــر بخش‌های کوچک توســط خودشــان در نظر گرفته شــوند، ماننــد تکه‌هایی از کاغذ دوبُعدی به نظر می‌آیند. چون بطری کلاین بی‌مرز است به ۲ـ منیفلد «بسته» موسوم است.

حدس پوانکاره

برای بیش از یک قرن، یکی از مسائل مهم توپولوژی، حدس مشهور پوانکاره[28] بود که به نام خود او نام‌گذاری شده است. حدس مزبور متمرکز بر ارتباط بین جبر و توپولوژی است.

آن قسمت از حدس مورد بحث که تا چندی پیش حل‌نشده باقی‌مانده بود، در مورد ۳ـ منیفلدهای بسته است. این منیفلدها می‌توانند پیچیده باشند. بطری کلاینی را با بعدی اضافه تصور کنید. پوانکاره این حدس را زد که ۳ـ منیفلدهای بستهٔ معینی که تمام مشخصات جبری کرهٔ سه‌بُعدی را دارند، عملاً باید کره باشند. این ماجرا مانند این است که آدمی حول یک توپ عظیم قدم بزند و تمام سرنخ‌هایی که در دست دارد مقرّر کنند که توپ مزبور کره است، اما از آن‌جا که نمی‌تواند شکل بزرگ مزبور را مشاهده کرد، سرگردان بماند که آیا این شیء واقعاً کره است؟!

هیچ‌کس نتوانست حدس پوانکاره را در مورد ۳ـ منیفلدها به اثبات برساند. این حدس، راست است یا دروغ؟ حدس مورد بحث به ازای جمیع بُعدهای دیگر به اثبات رسیده، اما حالت ۳ـ منیفلدی هم‌چنان سر سخت است. در این مورد، اثبات‌های خطای بسیاری موجود بود، تا این‌که در سال ۲۰۰۲ گریگوری پرلمان[29] از انستیتوی استکلوف[30] در سن پطرزبورگ، آن را ثابت کرد. روش‌های حل حدس پوانکاره، مانند حل مسائل بزرگ دیگر ریاضیات، در خارج از حوزهٔ بی‌واسطهٔ خود، یعنی در تکنیکی مرتبط با انتشار حرارت، قرار دارد.

چند تاریخچه

حدود ۳۰۰ قبل از میلاد: اقلیدس نشان داد که پنج چندوجهی منتظم موجود است.

حدود ۲۵۰ قبل از میلاد: ارشمیدس چندوجهی‌های ناقص را بررسی کرد.

۱۷۵۲ میلادی: اویلر فرمول خود را دربارهٔ تعداد رأس‌ها، یال‌ها و وجه‌های یک چندوجهی به‌دست داد.

۱۸۵۸ میلادی: موبیوس و لیستینگ[31]، نوار موبیوس را معرفی کردند.

۱۹۶۱ میلادی: استفن اسمیل[32] حدس پوانکاره را در بُعدهای بزرگ‌تر از ۴ به اثبات رساند.

۱۹۸۲ میلادی: مایکل فریدمن[33] حدس پوانکاره را در بعد برابر ۴ اثبات کرد.

۲۰۰۲ میلادی: پرلمان حدس پوانکاره را در مورد بُعد ۳ به اثبات رساند.

پی‌نوشت

1. rubber sheet geometry
2. Polyhedra
3. face
4. vertex
5. edge
6. regular
7. Elements
8. Platonic solids
9. tetrahedron
10. cube
11. octahedron
12. dodecahedron
13. icosahedron
14. Archimedean solids
15. semi-regular
16. panels
17. buckminster-fullerene
18. Richard Buckminster Fuller
19. geodesic dome
20. bucky balls
21. Euler's formula
22. Euler characteristic
23. August Möbius
24. Möbius strip
25. Klein bottle
26. Felix Klein
27. manifold
28. Poincaré
29. Grigori Perel
30. Steklov Instit
31. Listing
32. Stephen Smal
33. Michael Freedman

معادله‌های کلاسیک ۳

معادلهٔ کلاسیک نوع سوم

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: معادلهٔ کلاسیک نوع سوم، معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم.

این معادله به صورت زیر است:

$$a\sin^{۲} x + b\sin x.\cos x + c\cos^{۲} x = d$$

روش اول حل معادله

اگر $a \neq d$، دو طرف تساوی معادله را بر $\cos^{۲} x \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم و به جای $\frac{۱}{\cos^{۲} x}$ مساوی‌اش $(۱+\tan^{۲} x)$ را قرار می‌دهیم.

چنانچه $a = d$، آن‌گاه دو طرف تساوی معادله را بر $\sin^{۲} x \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم و به جای $\frac{۱}{\sin^{۲} x}$ مساوی‌اش $(۱+\cot^{۲} x)$ را قرار می‌دهیم.

برای ادامهٔ کار فرض می‌کنیم، $a \neq d$، خواهیم داشت:

$$\frac{a\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^{۲} x} + c = \frac{d}{\cos^{۲} x}$$

$$\Rightarrow a\tan^{۲} x + b\tan x + c = d(۱+\tan^{۲} x)$$

$$\Rightarrow a\tan^{۲} x + b\tan x + c = d + d\tan^{۲} x$$

$$\Rightarrow \boxed{(a-d)\tan^{۲} x + b\tan x + (c-d) = ۰}$$

شرط وجود جواب در معادلهٔ کلاسیک نوع سوم

$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow b^{۲} - ۴(a-d)(c-d) \geq ۰$$

مثال ۱:

معادلهٔ $۲\sin^{۲} x - \sqrt{۳}\sin x.\cos x + ۵\cos^{۲} x = ۵$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: در این معادله $a = ۲$ و $d = ۵$، پس $a \neq d$. لذا دو طرف تساوی معادله را بر $\cos^{۲}x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x} - \frac{\sqrt{۳}\sin x.\cos x}{\cos^{۲} x} + ۵ = \frac{۵}{\cos^{۲} x}$$

$$\Rightarrow ۲\tan^{۲} x - \sqrt{۳}\tan x + ۵ = ۵(۱+\tan^{۲} x)$$

$$\Rightarrow ۲\tan^{۲} x - \sqrt{۳}\tan x + ۵ = ۵ + ۵\tan^{۲} x$$

$$\Rightarrow ۳\tan^{۲} x + \sqrt{۳}\tan x = ۰ \Rightarrow \tan x(۳\tan x + \sqrt{۳}) = ۰$$

الف) $\tan x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \,,\, k \in Z$

ب) $۳\tan x + \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\tan\frac{\pi}{۶}$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$



$$\Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z$$

مثال ۲:

معادلهٔ $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x.\cos x + 3\cos^2 x = 2$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: $a = 2$ و $d = 2$، پس $a = d$، در نتیجه، دو طرف تساوی معادله را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sqrt{3}\sin x.\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3}\cot x + 3\cot^2 x = 2(1 + \cot^2 x)$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3}\cot x + 3\cot^2 x = 2 + 2\cot^2 x$$

$$\Rightarrow \cot^2 x - \sqrt{3}\cot x = 0 \Rightarrow \cot x(\cot x - \sqrt{3}) = 0$$

الف) $\cot x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in Z$

ب) $\cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z$$

مثال ۳:

به ازای چه مقادیر m، معادلهٔ زیر دارای جواب است؟

$$3\sin^2 x + (m-1)\sin x.\cos x + 2\cos^2 x = 1$$

حل: این مثال معادلهٔ کلاسیک نوع سوم است و وقتی جواب دارد که:

$b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0$. در این معادله $a = 3$، $b = (m-1)$، $c = 2$ و $d = 1$ است.

$$b^2 - 4(a-d)(c-d) \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(3-1)(2-1) \geq 0$$

$$(m-1)^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow (m-1)^2 \geq 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(m-1)\geq 2\sqrt{2}\\ \text{یا}\\ (m-1)\leq -2\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\geq 1+2\sqrt{2}\\ \text{یا}\\ m\leq 1-2\sqrt{2}\end{cases}$$

روش دوم حل معادلهٔ کلاسیک نوع سوم

در ایـن روش از سـه فرمـول $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ اسـتفاده می‌کنیم، پس از جای‌گذاری و ساده‌کردن، معادلهٔ کلاسیک نوع سـوم به معادلهٔ کلاسیک نوع اول تبدیل می‌شود که با راه‌حل‌های معادلهٔ کلاسیک نوع اول حل خواهد شد.

مثال ۴:

معادلهٔ $(\sqrt{3}+1)\sin^2 x+\sin x.\cos x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حـل: از سـه فرمـول گفته شـده در درس اسـتفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{3}+1)\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$(\sqrt{3}+1)(1-\cos 2x)+\sin 2x+1+\cos 2x=\sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x+1-\cos 2x+\sin 2x+1+\cos 2x=\sqrt{3}+1$$

$$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=-1$$

این معادله، کلاسیک نوع اول است.

$$\sin 2x-\tan\frac{\pi}{3}\cos 2x=-1$$

$$\sin 2x-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}.\cos 2x=-1$$

$$\sin 2x.\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}.\cos 2x=-\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin(2x-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\sin(\underbrace{2x-\frac{\pi}{3}}_{x})=\sin(\underbrace{-\frac{\pi}{6}}_{\alpha})$$

الف) $x=2k\pi+\alpha\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{6}$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12}\ ,\ k\in Z$$

ب) $x=2k\pi+\pi-\alpha\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}$

$$2x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in Z$$

چند نکته ....

(۱) داریم:

$$\boxed{\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}$$

اثبات:

$$\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos x.\cos\frac{\pi}{4}+\sin x.\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$$

$$=\cos x+\sin x \quad \blacktriangle$$

(۲) داریم: $\boxed{\sin x.\cos x=\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}}$

....

اثبات: در نکتهٔ (۱) داشتیم:

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ دو طرف این تساوی

را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^{۲} x + \cos^{۲} x}_{۱} + ۲\sin x \cos x = ۲\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$۱ + ۲\sin x.\cos x = ۲\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow ۲\sin x.\cos x = ۲\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - ۱$$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x = \cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{۱}{۲} \quad \blacktriangle$$

$$\boxed{\sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})} \qquad (۳)$$

اثبات:

$$\sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(\sin x.\cos\frac{\pi}{۴} - \cos x \sin\frac{\pi}{۴})$$

$$= \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)$$

$$= \sin x - \cos x \quad \blacktriangle$$

$$\boxed{\sin x.\cos x = \frac{۱}{۲} - \sin^{۲}(x - \frac{\pi}{۴})} \qquad (۴)$$

اثبات: در نکتهٔ (۲) داشتیم:

$$\sin x.\cos x = \cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{۱}{۲}$$

$$\sin x.\cos x = ۱ - \sin^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{۱}{۲}$$

$$\sin x.\cos x = \frac{۱}{۲} - \sin^{۲}(x - \frac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{۱}{۲} - \sin^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) \quad \blacktriangle$$

معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم

این معادله به دو شکل زیر است:

الف) $a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x = c$

ب) $a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x = c$

راه‌حل معادلهٔ (الف)

با توجه به نکات (۱) و (۲) به جای $(\sin x + \cos x)$ مساوی‌اش $\sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$ و به جای $six.\cos x$ مساوی‌اش $\cos^{۲}(x - \frac{\pi}{۴}) - \frac{۱}{۲}$ را قرار می‌دهیم و معادلهٔ

حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $2(\sin x+\cos x)+2\sin x.\cos x=-1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

حل:

$$\sin x.\cos x=\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$$

و $$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+2\cos^2(x-\frac{\pi}{4})-1=-1$$

$$2\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})+2\cos^2(x-\frac{\pi}{4})=0$$

$$2\cos(x-\frac{\pi}{4})[\sqrt{2}+\cos(x-\frac{\pi}{4})]=0$$

الف) $\cos(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{3\pi}{4},\ k\in Z$$

ب) $\sqrt{2}+\cos(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$ غیرممکن

حـل معادلهٔ (ب): بـا توجه به نکات (۳) و (۴) به جای $(\sin x-\cos x)$ مسـاوی‌اش $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ و بـه جـای $\sin x.\cos x$ مساوی‌اش $\frac{1}{2}-\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$ را قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ $\sqrt{3}(\sin x-\cos x)+2\sin x.\cos x=1$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

$$\sqrt{3}\times\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+1-2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}\sin(x-\frac{\pi}{4})-2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})=0$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{4})[\sqrt{6}-2\sin(x-\frac{\pi}{4})]=0$$

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

ب) $\sqrt{6}-2\sin(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$ غیرممکن

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir

۷۵

همراه با ویژه‌نامهٔ زنده‌یاد پرویز شهریاری

رشد برهان
ریاضی



برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست و دوم
شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۱

- زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری و مجلهٔ برهان
- درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها
- دنباله‌های حسابی و هندسی
- المپیاد ریاضی در بلژیک
- فارابی، معلم ثانی

زندگی‌نامه استاد پرویز شهریاری



استاد پرویز شهریاری روز دوم آذرماه ۱۳۰۵ در محلهٔ دولت‌خانهٔ کرمان متولد شد و در مهرماه ۱۳۱۱ تحصیلات ابتدایی خود را در «دبستان کاویانی» آن شهر آغاز کرد. دوران نوجوانی او با مرگ پدر در سن ۴۶ سالگی (هنگامی که او ۱۲ سال بیشتر نداشت) آغاز شد و برای او رنج‌ها و مشقات فراوانی (از جمله کارگری در محیط‌های مختلف برای امرار معاش) به همراه داشت. در سال ۱۳۲۱ وارد دانش‌سرای مقدماتی کرمان شد و در ۱۳۲۴ به دانشکدهٔ علوم ریاضی وارد شد.

از همان بدو تحصیل در دانشگاه به فعالیت‌های فرهنگی پرداخت و به عضویت هیئت تحریریهٔ چند نشریه درآمد. در سال ۱۳۲۷ نخستین کتاب خود، «جنبش مزدک و مزدکیان» را به چاپ رساند و از آن زمان تا آخر عمر پربرکتش، نزدیک به ۳۰۰ جلد کتاب و بیش از هزار مقاله منتشر کرد. شهریاری در هیئت تحریریهٔ چندین مجلهٔ علمی و ریاضی عضویت داشت و همچنین سردبیر مجلات «سخن علمی» (۱۳۴۹-۱۳۴۲، ۹۰ شماره)، «آشتی با ریاضیات» و «آشنایی با ریاضیات» (۱۳۷۱-۱۳۵۶، ۷۰ شماره) و چیستا (از ۱۳۶۰ تا پایان عمر) بود. سال‌ها نیز در دبیرستان‌های تهران به معلمی ریاضی پرداخت و بسیاری از نام‌آوران عرصهٔ علم در ایران و کشورهای بزرگ جهان از شاگردان ایشان بوده‌اند. علاوه بر اینها، استاد، ریاست هیئت مدیرهٔ «گروه فرهنگی خوارزمی» را که از مشهورترین مجموعه‌های علمی پایتخت بود، به‌عهده داشت.

از این استاد گران‌قدر در زمان حیاتشان تجلیل فراوانی به‌عمل آمد. از جمله در سال ۱۳۷۴ در بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور و در سال ۱۳۷۹ به مناسبت سال جهانی ریاضیات از ایشان تقدیر فراوان به‌عمل آمد. و در سال ۱۳۸۱ نیز دانشگاه کرمان به ایشان دکترای افتخاری تقدیم کرد و در سال ۱۳۸۴ عنوان «چهرهٔ ماندگار سال» در صدا و سیمای جمهوری اسلامی به ایشان اعطا شد.

این استاد فرزانه همان‌گونه که خود به دیگران توصیه می‌کرد، شخصیتی چندبعدی داشت و در زمینه‌های گوناگون از جمله ریاضیات، تاریخ، تاریخ علم، ادبیات و مسائل اجتماعی صاحب‌نظر بود. کتاب‌های متعددی هم در زمینه‌های بسیار متنوع نوشت و یا ترجمه کرد.

او نخستین کسی بود که با ترجمهٔ مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای گوناگون دنیا، جوانان کشورمان را با این مسائل آشنا ساخت. بعضی از کارهای او مانند «خلاقیت ریاضی»، «روش‌های جبر»، «در پی فیثاغورس» و... جزو آثار ماندگار ادب ریاضی کشورماست.

چراغ پرفروغ عمر این بزرگ‌مرد تاریخ آموزش ریاضی کشورمان روز بیست و دوم اردیبهشت ۱۳۹۱ به خاموشی گرایید.

روحش شاد و یادش جاودان باد

حرف اول

مردی که ۲۱ سال با
مجلهٔ رشد برهان متوسطه زندگی کرد

دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی «رشـد برهان متوسـطه» و تمام کسـانی که در طول این ۲۱ سـال با مجلهٔ برهان آشنا بوده و مقالات آن را مطالعه کرده‌اند و در واقع، همهٔ افرادی که به نوعی با ریاضیات سـروکار دارند، استاد پرویز شهریاری، چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی ایران را می‌شناسند، از کتاب‌ها و مقالات ایشان استفاده کرده‌اند و به نوعی خود را شاگردِ استاد می‌دانند. استاد فرزانه‌ای که هم‌اکنون بین ما نیست و چندی است به دیار باقی شتافته و همهٔ ما از فیض وجودش محروم شده‌ایم.

اسـتاد شـهریاری از اولین شمارهٔ مجله برهان که در سال ۱۳۷۰ به چاپ رسید و البته قبل از چاپ مجلـه، یعنی از اواخر سـال ۱۳۶۹، در برنامه‌ریزی و تعیین خط‌مشـی مجله با آن همکاری مسـتمر و تنگاتنگی را آغاز کرد. وی علاوه بر شـرکت فعال در جلسـات هیئت تحریریه و حضور مؤثر در جمع اعضای این هیئت، همواره در هر شـماره مقاله یا مقالاتی را نوشـته اسـت. همیشـه، مقالات استاد به گفتهٔ همهٔ خوانندگان جزو خواندنی‌ترین و بهترین مقالاتِ برهان بوده است؛ سلسله مقاله‌هایی تحت عنوان «شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید» (که این سلسله مقاله‌ها به صورت کتاب توسـط انتشارات مدرسه به چاپ رسـید) «از تاریخ بیاموزیم»، «یادهای آموزشی»، «اتحاد و معادله»، «ریاضیات در ایران» و... که تعداد این مقاله‌ها در ۷۴ شمارهٔ برهان به حدود ۱۰۵ مقاله می‌رسد.

اسـتاد شـهریاری در طول ۲۱ سـال همکاری مسـتمر با مجلهٔ ریاضی برهان، حتی در یک جلسهٔ هیئت تحریریه تأخیر نداشـتند و همیشه لااقل نیم سـاعت قبل از شروع جلسه در دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشـی حاضر بودند. هرگاه در جلسات هیئت تحریریه روی مسئلهٔ مهمی بحث می‌شد یا اختلاف نظری بین اعضا به‌وجود می‌آمد، ایشان با متانت و آرامش خاصِ خودشان حرف آخر را می‌زدند و البته با ذکر منطق حاکم بر نظر خودشان با ذکر مثال یا تجربه‌ای در آنِ زمینه، بحث را خاتمه می‌دادند.

وقتی در زمسـتان سال ۱۳۶۹با طرحم برای چاپ یک مجلهٔ ریاضی موافقت شد، به منظور معرفی اعضای هیئت تحریریه با استاد شهریاری تماس تلفنی گرفتم و جریانِ انتشار این مجله و اهداف آن را با ایشان در میان گذاشتم. ایشان فرمودند: «مجله‌ای شبیه به مجلهٔ یکانِ؟! خیلی موافقم! اولین جلسه کجا و کی تشکیل می‌شود؟»

من واقعاً باور نمی‌کردم استاد بزرگی همچون شهریاری به همین راحتی دعوت مرا پذیرفته باشند. ایشان در همان جلسهٔ اول که با حضور آقایان غلامرضا یاسی‌پور و محمدهاشم رستمی و سیدحسین سیدموسوی تشکیل شد، نام زیبای برهان را برای مجله پیشنهاد کردند که همگی پذیرفتند.

فکر می‌کنم بعد از چاپ سه یا چهار شماره از مجلهٔ ریاضی برهان، استاد شهریاری مجلهٔ «آشنایی با ریاضیات» را که خودشـان سـردبیری آن را به‌عهده داشـتند، تعطیل کردند. وقتی از ایشان سؤال کردم چرا این مجله را تعطیل کردند فرمودند: «دست تنها بودم. در ضمن برهان خیلی خوب دارد پیش می‌رود و من بیشتر روی این مجله انرژی خواهم گذاشت.»

و ما در طول این ۲۱ سال همکاری، شاهد عمل به این قولِ توسط استاد بودیم. مجلهٔ ریاضی برهان واقعاً برایشان در اولویت کارها، نوشته‌ها و تألیفاتشان قرار داشت.

ضایعه جبران‌ناپذیر از دسـت دادن استاد شـهریاری نه تنها برای مجلهٔ ریاضی برهان، بلکه برای جامعهٔ ریاضی و علمی ایران بسیار سنگین است. از خداوند متعال خواستارم که ما را در ادامهٔ راه استاد که همان عزت و سربلندی جامعهٔ علمی کشور و دست‌یابی به بالاترین حد آموزش، به‌خصوص آموزش ریاضی در ایران است، یاری بخشد تا روح زنده‌یاد پرویز شهریاری به آرامش ابدی برسد.

سردبیر

همچون آفتاب



ویژه‌نامهٔ یار دیرین مجله و ریاضیدان معاصر
زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری

دل می‌رود ز دستم...

گزارشی کوتاه از مراسم تشییع و مراسم بزرگداشت استاد پرویز شهریاری



«وداع با شهریار ریاضیات» عنوان مطلبی بود که در یکی از نشریات صبح روز شنبه ۲۳ اردیبهشت‌ماه ۱۳۹۱ در بازتاب خبر درگذشت استاد پرویز شهریاری، به چاپ رسید. استاد پرویز شهریاری در پی ناراحتی ناشی از عفونت ریه‌ها، روز چهارشنبه ۲۰ اردیبهشت در بیمارستان جم تهران بستری شد و دو روز بعد، در صبح جمعه ۲۲ اردیبهشت دارفانی را وداع گفت.

مراسم تشییع پیکر ایشان بعدازظهر همان روز و از مقابل «دبیرستان فیروز بهرام» انجام گرفت. در مراسم تدفین استاد ده‌ها نفر از چهره‌های فرهنگی کشور حضور داشتند. از جمع اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ «رشد برهان متوسطه» نیز، آقایان حمیدرضا امیری، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر و سیدمحمدرضا هاشمی موسوی در این مراسم شرکت کردند. پس از آن سه مراسم به شرح زیر در بزرگداشت آن استاد فرزانه برگزار شد:

۱. روز پنج‌شنبه ۲۸ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۱۸ تا ۲۲ از طرف «خانهٔ ریاضیات تهران» و به مناسبت «روز جهانی خیام» مراسم ویژه‌ای برگزار شد. در این مراسم به مناسبت بزرگداشت زنده‌یاد دکتر شهریاری نیز برنامه‌هایی به اجرا درآمد؛ از جمله: سخن‌رانی آقای حمیدرضا امیری، سردبیر مجلهٔ رشد برهان متوسطه؛ سخن‌رانی آقای محمد باقری؛ سخن‌رانی آقای دکتر ممقانی، نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران و فیلم کوتاهی هم از زندگی استاد نمایش داده شد.

آقای امیری در سخن‌رانی خود، متن پیام تسلیت آقای دکتر محی‌الدین بهرام محمدیان، معاون وزیر و رییس «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی» وزارت آموزش‌وپرورش را قرائت کرد و پس از آن متن این پیام را به آقای دکتر شهریار شهریاری (فرزند استاد) تقدیم نمود.

۲. روز جمعه ۲۹ اردیبهشت ۹۱ از ساعت ۳ تا ۵ بعدازظهر مراسمی در محل «انجمن زرتشتیان تهران» واقع در «خیابان میرزا کوچک‌خان» برگزار شد. در این مراسم بسیاری از دبیران، استادان دانشگاه، مؤلفان، مترجمان و صدها نفر از چهره‌های فرهنگی و شخصیت‌های علمی حضور داشتند. حضور جناب حجت‌الاسلام سیدمحمود دعایی، نمایندهٔ محترم ولی فقیه در «روزنامهٔ اطلاعات» نیز جالب توجه بود.

سخن‌ران این مراسم ضمن بیان شمه‌ای از فعالیت‌ها و تلاش‌های استاد شهریاری در ترویج دانش ریاضی بین نسل‌های گوناگون جوانان این مرز و بوم، به تجلیل از شخصیت ماندگار ایشان پرداخت. شایان ذکر است که به علت ازدحام جمعیت، حضور بسیاری از علاقه‌مندان استاد در این مراسم میسر نشد و همه نتوانستند به سالن مراسم وارد شوند.

۳. روز چهارشنبه ۳ خرداد ۹۱ نیز مراسمی در محل «فرهنگ‌سرای ابن‌سینا» واقع در شهرک قدس تهران برگزار شد.



سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز



پیام تسلیت حجت‌السلام والمسلمین دکتر محمدیان معاون وزیر و رییس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی به مناسبت درگذشت استاد پرویز شهریاری

هر ورق از تاریخ کشور ما، نام و یادی از عالمان و دانشمندان یا هنرمندانی را در خود جای داده است که آثار وجودی آنها، مایهٔ افتخار مُلک و ملت و خیر و برکت عالم انسانی است؛ کسانی که کتاب و قلم و خامه و چامهٔ آنان روشنی‌بخش اندیشه و آرامش‌بخش دل انسان‌های مشتاق آموختن و فهمیدن برای بهتر زیستن است؛ به‌ویژه اگر آن عالم یا هنرمند معلمی در خدمت تربیت، آموزش و تألیف و ترجمه بوده باشد. استاد گران‌مایه، **پرویز شهریاری**، معلم پیش‌کسوت و پیشرو در آموزش ریاضی برای فرزندان این مرز و بوم و چهرهٔ ماندگار این رشته، مردی که چندین نسل از دانش‌آموزان و دانش‌آموختگان کشور با کتاب‌های او، ریاضی‌خوان و ریاضی‌دان شده‌اند، شخصیتی بود که علی‌رغم چهره در نقاب خاک کشیدن، هم‌چون آفتاب در دل و جان و ذهن و یاد دانشجویان و پژوهشگران عرصهٔ دانش ریاضیات خواهد ماند.

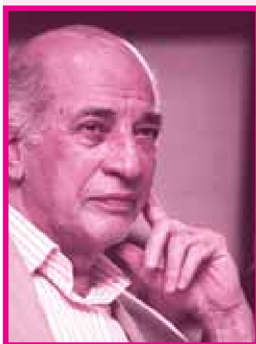
فقدان این استاد دانشمند که با «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» در برنامه‌ریزی، تألیف و تدوین کتاب‌های درسی، به‌ویژه مجلات رشد همکاری پایا و مانایی داشت، موجب تألم و تأثر گردید.

ضمن عرض تسلیت این ضایعهٔ غمناک و تأسف‌برانگیز به شاگردان و بهره‌مندان محضر علمی آن استاد فرزانه، به‌ویژه خاندان محترم ایشان، آرزومند علوّ درجه و مرتبه، و آرامش و غفران در جوار رحمت حق تعالی برای روح آن استاد، و صبر و شکیبایی برای بازماندگان هستیم. امید آنکه با دوام تلاش‌های علمی، آموزشی و پژوهشی از سوی شاگردان و تربیت‌یافتگان ایشان شاهد سربلندی جمهوری اسلامی ایران در عرصه‌های علم و فرهنگ که از آرزوهای همیشگی استاد بوده است، باشیم.

سعدیا مرد نکونام نمیرد هرگز
مرده آن است که نامش به نکویی نبرند

دل‌نوشته‌ای از دکتر مهدی بهزاد

رییس پیشین «انجمن ریاضی ایران» و استاد ریاضی دانشگاه‌های کشور



ورای بوستان دل یک صحرا است بی‌پایان
به پای جان توان رفتن در آن صحرای حیوانی
ترا چون از تو بستاند، نمانی، جمله او ماند
تو آن‌که خواه اَنَا الحق گوی و خواهی گوی سبحانی
(فخرالدین عراقی)

فرهیختهٔ نیک‌پندار، پرویز شهریاری را بیش از ۴۰ سال است می‌شناسم و با دستاوردها و توانایی‌های گوناگونش آشنایی دارم: معلمی شایسته، مدیری مدبر، مورخی چیره‌دست، نویسنده‌ای توانا و مترجمی پرکار و پربار بود که در آستانهٔ ۹۰ سالگی هم از تماشای رقص قلم خسته نمی‌شد و همچنان افتخار می‌آفرید. بخت با ایران و ایرانی یار بود که به دنبال اخذ مدرک دکترا نرفت و به جای آن آثاری متنوع تولید کرد که کم و کیفشان را بزرگان به تفضیل خواهند نوشت.

در دو سفر داخلی همراهش بودم و در چند نشست علمی از وجودش کسب فیض کردم. افتخار می‌کنم که نقشی بموقع و مؤثر ایفا کردم تا به شایستگی دکترای افتخاری کسب کند و عنوان چهرهٔ ماندگار ریاضیات مدرسه‌ای نصیبش شود. بی‌شک بسیاری از آثارش بارها و بارها تجدید چاپ خواهند شد و منبع فیض خواهند بود، اما چون علم و ریاضیات را کم اهمیت‌تر از شعر و ادبیات نمی‌دانم، به جد از شاگردان مستقیم و غیرمستقیم میلیونی استاد می‌خواهم به عنوان زیارتگه علم و معرفت، احداث بنای یادبودی را به عظمت بارگاه **شهریار** در تبریز به افتخار شهریاری در کرمان مدنظر قرار دهند. و نیز به دو «انجمن ریاضی ایران» و «ترویج علم ایران» پیشنهاد می‌کنم جایزه‌ای مشترک به نام پرویز شهریاری تعیین کنند تا همه ساله طبق آیین‌نامه‌ای خاص به مروجان برتر ریاضیات کشور اهدا شود.

یادش جاودان و راهش پررهرو باد.







یاد استاد

حمیدرضا امیری ـ سردبیر مجلهٔ رشد ریاضی برهان متوسطه

خیلی سخت و دشوار است که بخواهم در مورد شخصیتی بنویسم که ۲۱ سال در کنار هم بودیم و اکنون در جمع ما حضور ندارد و برای همیشه در کنار او بودن و فیض وجودش را از دست داده‌ایم.

استاد شهریاری عزیز، شما برایم همیشه زنده‌اید و افکار، توصیه‌ها و راهبردهای شما همواره با من و در ذهن و جان من جاری و ساری است.

استاد عزیز، هیچ‌گاه لذت لحظاتی که با شما سپری کردم، از یاد و خاطرم نخواهد رفت. روزها و ساعت‌هایی که در جمع هیئت تحریریه و یا مکان‌های دیگر بنا بر مناسبت‌های گوناگون در محضر شما بودم و از لحظه‌لحظهٔ آن درس می‌گرفتم و شاگردی می‌کردم و شما همچون پدری مهربان برایم راهنما و سرمشق بودید، جزو بهترین ساعت‌های عمرم محسوب می‌شود.

هرگز روزهایی را که در «دبیرستان فیروز بهرام» با هم تدریس داشتیم فراموش نمی‌کنم. به‌خصوص زنگ‌های تفریح که شما از کلاس جبر سوم و بنده از کلاس ریاضیات جدید می‌آمدیم و در آن دقایقی که در خدمت شما بودم، همواره با شوخی‌های لطیف خود روحیه‌ای مضاعف به من می‌بخشیدید.

استاد عزیزم، از سال ۱۳۶۹ تاکنون هنوز طنین اولین صحبت تلفنی با شما در گوشم هست که وقتی خودم را معرفی کردم و توضیح دادم که می‌خواهم مجله‌ای مشابه «مجلهٔ یکان» راه‌اندازی کنم و به کمک شما نیاز دارم، فرمودید: «کار خیلی خوبی است. با این کار موافقم. آدرس شما کجاست تا اولین جلسه را شروع کنیم؟»

باورم نمی‌شد ای استاد که به همین راحتی و در نهایت بزرگواری دعوت مرا پذیرفته باشید. از آن پس همواره با چهرهٔ متین، آرامش‌بخش و در عین حال فکور، هر سه یا چهار هفته یک‌بار نیم ساعت قبل از شروع جلسه هیئت تحریریه در دفتر انتشارات حضور می‌یافتید و تا پایان ما را همراهی می‌کردید.

استاد شهریاری عزیز، سال‌ها از آن تاریخ می‌گذرد که یک‌بار از شما سؤال کردم: «چرا پیشنهاد «دانشگاه ونکوور» را برای تدریس «تاریخ ریاضیات» با آن شرایط ایده‌آل و در کنار خانواده نپذیرفتید؟»

و شما با عبارتی کوتاه اما معنی‌دار که تا زنده‌ام آن را فراموش نخواهم کرد، فرمودید: «اگر قبول می‌کردم، الان در جمع شما عزیزان مجله برهان نبودم.»

استاد بزرگوار، روزی ویژگی‌های شغل معلمی را برایم بیان کردید و فرمودید:

«معلم یک پروندهٔ زنده است. در جامعه حرکت می‌کند و می‌تواند نتیجهٔ کار خود را تا زنده است، مشاهده کند.»

اینکه: «معلم همیشه در دو نسل زندگی می‌کند: یکی نسل خودش و دیگری نسل بچه‌هایی که با آنها سروکار دارد.»

و اینکه از من سؤال کردید چند ساعت در روز تدریس می‌کنم و عرض کردم حدود هشت ساعت. فرمودید: «پس هشت ساعت دروغ نمی‌گویید. این ویژگی شغل شریف شماست که تا درس می‌دهید، امکان دروغ‌گفتن را در حضور دانش‌آموزان ندارید.»

استاد عزیز، من از شما درس‌ها و تجربیات بسیاری را آموخته‌ام و به مصداق کلام گهربار امیر مؤمنان **علی(ع)** که فرمودند: «من عَلَّمَنی حرفاً فَقَد صَیَّرنی عَبداً»، بار سنگینی را بر دوش خود احساس کرده و می‌کنم؛ اینکه بتوانم حق شاگردی را به‌جا آورم، یاد و خاطرهٔ شما را زنده نگه دارم و همهٔ تجربیات و آموزه‌هایم را که شما در طبق اخلاص و در کمال بزرگواری در اختیارم قرار دارید، به نسل‌های بعدی منتقل نمایم.

استاد عزیزم، شما هیچ‌گاه از یاد و خاطرهٔ شاگردانتان نخواهید رفت و همواره برای همهٔ ما زنده‌اید. از خداوند منان می‌خواهم توفیق ادامهٔ راه استاد را که همان راه معلمی و ترویج علم و معرفت است، به ما عطا کند.

به همهٔ شما دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان توصیه می‌کنم که در همهٔ دوران زندگی خود همواره قدر معلمان و استادان محترم خود را بدانید و از شمع وجود آنها فیض ببرید.





پرورش‌دهندهٔ شکوفه‌های ریاضی

زهرا گویا ـ استاد ریاضیات دانشگاه شهید بهشتی و سردبیر مجلهٔ رشد ریاضی

استاد شهریاری طی پنج سالی که مراسم «جُنگ شکوفه‌ها» از طرف دانشکدهٔ علوم ریاضی «دانشگاه شهید بهشتی» برگزار می‌شد (۱۳۷۵ تا ۱۳۸۰)، در تمام آنها شرکت کرد. تقریباً هم تا آخر مراسم حضور داشت و با حوصله، سعهٔ‌صدر و شوخ‌طبعی منحصر به فردش، با دانش‌آموزان دبیرستانی به گفت‌وگو نشست. شیرینی حضور ایشان در جمع‌های بیش از ۱۰۰۰ نفری «بچه مدرسه‌ای‌ها»، غوغایی در دانشگاهمان برپا می‌کرد که نظیرش کمتر دیده می‌شد.

شهریاری سخنور، انسان‌دوست، عاشق، فهیم و آشنا با زمانهٔ خویش بود و شخصیتی چندوجهی و چندبعدی داشت. استاد در مراسم سومین گردهمایی شکوفه‌های ریاضی، مثل همیشه راست قامت، مطمئن، سربلند و عاشقانه، خطاب به بیش از هزار دانش‌آموز، آنها را «معشوق‌های» خویش نامید و به این نکتهٔ اساسی اشاره کرد: «سفارشی که به جوان‌های خودم، فرزندان خودم، دارم این است که کوشش کنند چندبعدی باشند. انسان موجودی نیست که بتوان پاره‌پاره‌اش کرد... خودمان را از رشته‌های دیگر جدا نکنیم.»

و بالاخره با توضیحات مبسوط، فرق بین «انسان» و «آدمواره» را بیان کردند. شهریاری برای بسیاری از دانش‌آموزان ما چندان شناخته شده نیست، اما در ۱۰۰ شمارهٔ مجله، آثارش چراغ راه این عزیزان است.

هرگز نمیرد آن‌که دلش زنده شد به عشق   ثبت است بر جریدهٔ عالم دوام ما

معلم نمونه

هوشنگ شرقی ـ مدیرداخلی مجلهٔ رشد برهان متوسطه

پرویز شهریاری عزیز از میان ما رفته و حالا قرار است مطلبی به یاد او بنویسم، ولی چه می‌توانم بنویسم. صدها خاطره از او جلوی چشمانم دارم و به همین خاطر باور نمی‌کنم که از پیش ما رفته باشد. آنها که با من بوده‌اند، می‌توانند گواهی دهند که در تمام این سال‌ها چه تعلق خاطر عمیقی نسبت به او داشته‌ام و نقد و احیاناً اسائهٔ ادب نسبت به او را به هیچ روی برنمی‌تافتم. البته همهٔ انسان‌ها قابل نقد هستند، اما او برای من موجود دیگری بود. به همین دلیل بود که تیتر اصلی ویژه‌نامه‌ای که برای بزرگداشت او در شمارهٔ ۱۲ و ۱۳ «مجلهٔ ریاضی توان» (از انتشارات مبتکران) انتخاب کردم، این بود: «هیچ‌کس مثل او نیست».

من به‌راستی معتقد بودم و هستم که هیچ‌کس چون پرویز شهریاری نبوده و نیست. هر چند نویسنده‌ای در گرامی‌داشت او گفت که مطمئن است پرویز شهریاری در میان نسل‌های بعد همگنانی خواهد داشت؛ که امیدوارم چنین باشد. ولی مگر او که بود و چه بود که درباره‌اش چنین می‌اندیشم؟ گمان می‌کنم به جای هر توضیحی بهتر است پرسش و پاسخی را که خود با او داشتم و در همان شمارهٔ مجله، در قالب مصاحبهٔ من با او، به چاپ رسید، در این‌جا بیاورم:

«**سؤال:** به نظر من پرویز شهریاری نمونه‌ای است که ثابت می‌کند، معلم ریاضی می‌تواند در حوزهٔ ادبیات فعال باشد. می‌تواند اهل مطالعه باشد، اهل نویسندگی باشد. می‌تواند درد آشنا باشد و با دردهای کودکان و نوجوانان، دانش‌آموزان و دانشجویان، و طبقات مردم آشنا باشد و به راه‌حل آنها بیندیشد و مقاله بنویسد. می‌تواند دربارهٔ تاریخ به‌طور عام و تاریخ ریاضی به‌طور ویژه مطلب بنویسد و خلاصه موجودی چندبعدی باشد. معلم ریاضی چگونه می‌تواند چنین باشد؟

جواب: حقیقت این است که شما به من محبت دارید، ولی من معتقدم، انسان در هر زمینه‌ای که کار می‌کند، اگر با علاقه تلاش کند و با هیچ مشکلی از میدان خارج نشود، می‌تواند موفق باشد. من نه استعداد فوق‌العاده‌ای دارم



و نه حالت به‌خصوص دیگری داشته‌ام، ولی هیچ‌وقت کارم را رها نکرده‌ام. با اینکه اتفاق افتاده است که در مواقعی نتوانسته‌ام کار کنم، ولی تا وقتی که توانسته‌ام کار کنم، همیشه پشت میز کار بوده‌ام... آن‌چه باعث موفقیت انسان می‌شود، پشتکار و ادامهٔ کار است. اگر تأثیر هوش و استعداد دو تا سه درصد باشد، ۹۷ تا ۹۸ درصد بقیه به پشتکار و علاقه‌مندی مربوط می‌شود.»

و به‌خاطر همین دیدگاه و به خاطر همین استقامت و مردانگی و ده‌ها خصلت انسانی دیگر بود که خیلی‌ها مثل من شیفتهٔ شخصیت والای پرویز شهریاری بودند و تا نفسی باقی است او را فراموش نمی‌کنند.

روحش شاد و یادش گرامی باد



بار امانت

میرشــهرام صدر_ عضو هیئــت تحریریه
مجلهٔ رشد برهان متوسطه

غمی خواهم که غم‌خوارش تو باشی*
دلی خواهم دل آزارم تو باشــی
جهان را یک جوی ارزش نباشد
اگــر یــارم اگر یــارم تو باشــی
ببوســم چوبــهٔ دارم به‌شــادی
اگر در پــای آن دارم تو باشــی
به بیماری دهم جان و سر خود
اگــر یــار پرســتارم تو باشــی
شوم ای دوست پرچم‌دار هستی
در آن روزی که سردارم تو باشی
کشــم بــار امانــت با دلــی زار
امانت‌دار اسرارم تو باشی

اســتاد **شــهریاری** دربارهٔ کارهای فرهنگی «نه» نمی‌گفــت. از جان مایه می‌گذاشت. یادم می‌آید، زمستان سال ۱۳۸۳ قرار بود اولین همایش ریاضیات شهرستان خمین برگزار شود. همکاران گــروه ریاضی آموزش‌وپــرورش خمین بسیار مشتاق بودند که در این همایش اســتاد شــهریاری حضور داشته باشد و ســخن‌رانی کند. بــه همین دلیل مرا واســطه قرار دادند که ایشــان را دعوت کنــم. امــا در آن زمان اســتاد به دلیل کهولت ســن پادرد داشتند و با عصا راه می‌رفتنــد و فکر نمی‌کــردم با این بُعد مســافت، آن هم با وسیلهٔ شخصی این دعوت را قبول کنند. اما وقتی با ایشان تماس گرفتم و ماجرا را گفتم، ایشــان قبــول کردند. به جز ایــن، هر کجا که معلمان ریاضی دور هم جمع می‌شدند و از ایشان دعوت می‌کردند، با هر سختی که بــود، حضور فعال پیــدا می‌کردند. معلمی «معشوق» او شده بود و در این راه سر از پا نمی‌شناخت.

چند ســالی بود که جلسات هیئت تحریریهٔ برهان را در منزل استاد تشکیل می‌دادیم (به این دلیل که استاد زحمت ایاب و ذهاب نداشته باشد). هر بار که با ایشان تماس می‌گرفتم تا تاریخ و ساعت



جلسه را هماهنگ کنم، «نه» نمی‌گفت و با روی باز استقبال می‌کرد.

دو موضــوع خاطر اســتاد را آزرده می‌کرد:

یکی برگزاری آزمون‌های سراسری به شیوهٔ تســتی بود. ایشان می‌گفت تا وقتی کنکور به این وضع برگزار می‌شود، تیشه به ریشهٔ دانش می‌زند. دانش‌آموز ســال چهــارم متوســطه فقــط دنبال روش‌های تســتی است و معلمی از نظر مســئولان مدرســه و دانش‌آموزان پایهٔ چهارم موفق است که نکته‌های تستی بیشتری بگوید و کمتر مسئله یا قضیه حل کند. این روش، حاصلی جز از بین رفتن تدریجی دانش ندارد. زیرا تدریس ریاضیات باید با کاربــرد ریاضی، تاریخ ریاضی و به‌خصوص با فلســفهٔ ریاضی همراه باشد. مرتب از ایشان شنیده بودم کــه برای حل فلان معضل (برای مثال، کاشت درخت آلبالو!)، چندین سمینار برگــزار می‌کنند، اما بــرای رفع معضل کنکور به این روش، هیچ کسی قدم جلو نمی‌گذارد.

دیگر اینکه بســیاری از کتاب‌های ریاضی‌دانان ایرانی، مانند جبر و مقابله، به زبان‌های دیگر ترجمه شده‌اند، البته مرحــوم **خدیــو جــم** این کتــاب را به فارســی ترجمه کرده است. اما برخی از رساله‌های **کاشانی** به روسی، انگلیسی، فرانسه و آلمانی ترجمه شده‌اند و اصل رساله به زبان عربی است، اما به فارسی ترجمه نشــده‌اند، در حالی‌کــه باید به فارســی ترجمه شــوند تا هر کس که مطالعه می‌کند، بداند کاشانی چه کسی بــوده و چه کارهایی انجام داده اســت. در حال حاضر، کتاب «مفتاح‌الحساب» **غیاث‌الدین جمشید کاشــانی** به زبان عربی، توسط دانشــگاه حلب سوریه با عنــوان «تُراثُنا»، یعنی ارث و میراث ما، به چاپ رســیده اســت. در واقع کتاب مفتاح‌الحساب کاشــانی را جزو میراث عرب در نظر گرفته‌اند.

یکــی از دلایلی که اســتاد «بنیاد پرویز شــهریاری» را تأســیس کرد این بود که این‌گونه کتاب‌ها و رســاله‌ها که میراث گذشــتگان ما هســتند، به نحو مطلوبی ترجمه و در اختیار دانش‌آموزان و محققــان ایــن مرز و بوم قــرار گیرد. ان‌شــاءالله با این‌گونه تلاش‌ها شــاهد روزی باشــیم که این **بــار امانت** را به ســرمنزل مقصود رســانده باشیم و در متون غربی‌ها دیگر ننویسند: «الکاشی، ریاضــی‌دان عــرب»، بلکه بنویســند: «کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی».

* غــزل «بار امانــت» از مجموعهٔ اشــعار **امام خمینی**(قدس سره)





اشاعه‌گر دانش ریاضی

محمدهاشم رستمی ـ عضو هیئت تحریریه مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطه

از ابتدای شـغل معلمی‌ام در سال ۱۳۴۱ تاکنون، از کتاب‌های ریاضی تألیف اســتاد شهریاری اســتفاده کرده‌ام. برای اولین بار در نخستین جلسه‌های هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان در سال‌های ۷۰-۱۳۶۹ که استاد هم برای شرکت در آن جلسات دعوت داشتند، با ایشان از نزدیک آشنا شدم. این فرصتی مغتنم برای من و دیگر همکاران بود که بتوانیم از رهنمودهای آموزش ریاضی و دانش ریاضی ایشان در ارتقای دانش ریاضی خود بهره‌مند شویم.

استاد شهریاری هرچه از علم ریاضی می‌دانست، در اختیار دانش‌پژوهان، اعم از شاگردان و معلمان ریاضی قرارمی‌داد. یادم هست که برای تألیف «دایره‌المعارف هندسه» مشغول جمع‌آوری منابع ریاضی بودم، در انتهای یکی از کتاب‌های تألیف استاد شهریاری فهرستی از تألیفات ریاضی ایشان یافتم. من که برای تألیف دایره‌المعارف هندسه، در جست‌وجوی کتاب‌هایی بودم که آنها را نداشتم، در بررسی این فهرست چند کتاب هندسه دیدم که تألیف ایشان بود و من نداشتم.

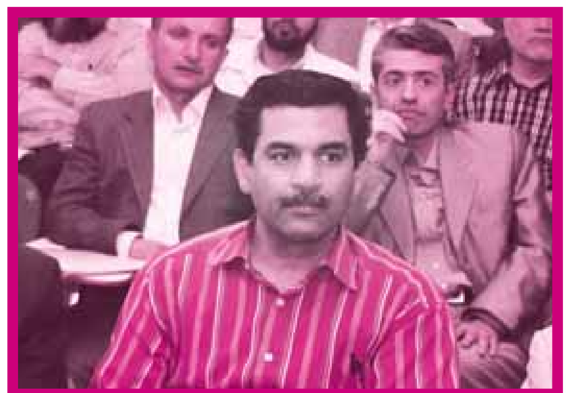
این مطلب را با استاد در میان گذاشتم. ایشان گفتند: من به کتاب‌خانه‌ام مراجعه می‌کنم. اگر از هر کدام از این کتاب‌ها دو نسخه داشته باشم، یک جلد آن را به شما می‌دهم. ولی اگر تنها یک جلد داشتم، آن را به شما می‌دهم تا کپی بگیرید و کتاب اصلی را به من برگردانید. چنین هم شد و از لطف ایشان سپاس‌گزاری کردم. ایشان همواره برای همکاران خود و دانش‌آموزان احترام فراوان قائل بودند و برای اشاعهٔ دانش ریاضی از هیچ کوششی فروگذار نمی‌کردند. روحشان شاد باد.

نام نیکش از یاد نرود

دکتر مانی رضائی ـ مدیرداخلی مجلهٔ رشد آموزش ریاضی

نوشتن درباره مردی که با همهٔ بزرگی و توانایی‌های خود، متواضع و فروتن بود، برایم دشـوار اسـت، و انتخاب نقطه‌ای برای آغاز این نوشــتار، دشوارتر! پس، از آشنایی خودم با این بزرگ‌مرد می‌نویسم؛ کسی که باور داشت آموزش کاری مهم است و به آرامی اثر می‌کند.

با نام **پرویز شــهریاری** از نوجوانی آشنا شدم؛ زمانی که دانش‌آموز مدرســه‌ای بودم که او معلم آن بود. آن زمان برایم جالب بود که بسیاری از بزرگ‌ترهایی که دور و بر من بودند، او را می‌شناختند و آنها نیز با کتاب‌هایش بزرگ شده بودند. تا پیش از آنکه معلم بشوم، در دوره‌های متفاوت از کتاب‌هایش بهره‌ها بردم و انگار پایانی بر تعداد کتاب‌هایشــان نبود. وقتی معلم شــدم نیز کتاب‌های بیشــتری از او یافتم که به کمک حرفه‌ام می‌آمد، و زمانی که با ایشــان ملاقات داشتم، سرآغاز دیگری برایم بود.



استاد شهریاری نخســتین کتاب خود را در سال ۱۳۲۷ منتشــر کرد. خودش می‌گفت: «حـدود ۴۰۰ عنوان کتاب تألیــف و ترجمــه کرده اســت.» گنجینــه‌ای گران‌بها برای علاقه‌مندان ریاضی و دانش‌آموزان که حاصل حدود ۷۰ سال فعالیت علمی است. برای من به عنوان معلم، بخش‌هایی از این گنجینه، دست‌مایه‌ای است تا شور و اشتیاق را به کلاس‌های درس ببرم؛ شور و اشتیاقی که در پیام‌های استاد شهریاری به معلمان و دانش‌آموزان نهفته است. دو نکتهٔ مهم را می‌توان از این پیام‌ها دریافت:

۱. همه می‌توانند ریاضیات را درک کنند و از آن لذت ببرند؛

۲. بایــد بــرای همه فرصــت برابر ایجاد کنیــم تا ریاضی بیاموزند.

برای تحقق این دو، استاد شهریاری بر اهمیت پرداختن بــه کاربردهای ریاضــی و تاریخ ریاضیات تأکید داشــت و از جنبه‌های ســرگرمی و بازی ریاضی نیز غافــل نمی‌ماند. به یقین می‌توان گفت تأثیر نگرش پرویز شــهریاری بر معلمان و دانش‌آموزان ماندنی اســت؛ تأثیر و نقشــی که شــاید غبار معاصر بودن با شهریاری امکان دیدن آن را کم کرده باشد! اما بی‌شک با گذشت ایام نقش وی پررنگ و واضح خواهد شد.

یاد و نام نیکش گرامی



به یاد پرویز شهریاری

دکتر یحیی تابش، استاد ریاضیات دانشگاه صنعتی شریف

پرویز شهریاری مجموعه‌ای از توانمندی‌های علمی و فرهنگی خود را در زمینه‌های متفاوت به منصهٔ ظهور رسانده بود و به گونه‌ای از «فرد» به «نهاد» تبدیل شده بود. او به حرفهٔ اصلی خود، دبیری آموزش‌وپرورش می‌بالید، ولی آنچه که او را به عنوان یک دبیر آموزش‌وپرورش متمایز و کم‌نظیر کرد، شخصیت «دانشور»* او بود. دانشوران، عمیق، جامع و تأثیرگذارند. پرکاری و منظم بودن دیگر ویژگی آنان است. آنان هر چه را که می‌دانند، وسیع، پرمایه و با دقت و ظرافت فراگرفته‌اند و به یک معنا انسان‌هایی فرهنگی‌اند. شاید این ویژگی‌ها صرفاً در میان مردان قدیم یافت می‌شد که **احمد بیرشک** و **پرویز شهریاری** نمودهایی قابل توجه از آنان در میان دبیران ریاضی زمان ما بودند. دغدغهٔ اصلی آنان آموزش بود، برای پرورش استعدادها و توسعهٔ تفکر خلاقانه بین دانش‌آموزان، متناسب با توانایی‌ها و استعداد آنان، که این مؤلفه‌ها مهم‌ترین عوامل در توسعهٔ منابع انسانی محسوب می‌شوند.

فقدان دانشوران همیشه اندوهبار و تلخ است، ولی از آن تلخ‌تر این واهمه است که مشعل دانایی، که در دست آنان بود، دیگر نگه‌داری نیابد؛ خوشبختانه، علی‌رغم این نگرانی رشد فناوری و توسعهٔ زیرساخت‌های ارتباطی، نسل جوان



را با فضای ذهنی جدیدی مواجه ساخته است. بر این اساس، از بین دبیران جوان نیز حتماً دانشورانی ظهور خواهند کرد که مشعل دانش را، که چندی در دست شهریاری بود، استوار و جاودانه نگه خواهند داشت و یاد پرویز شهریاری را گرامی می‌دارند.

* Scholar

پدر و معلم*

دکتر شهریار شهریاری، فرزند استاد پرویز شهریاری، استاد ریاضی دانشگاه در کشور آمریکا

استاد راهنمای من برای پایان‌نامهٔ دکترای ریاضی، پروفسور **مارتین آیزاکس** از «دانشگاه ویسکانسین» در آمریکا بود. او در اوایل آشنایی‌مان از من دربارهٔ خانواده‌ام پرسید. ضمن توضیح درخصوص فعالیت‌های پدرم گفتم اکثر کسانی که در ایران تحصیل کرده‌اند و نیم علاقه‌ای به ریاضیات داشته‌اند، پدر مرا می‌شناسند. او چیزی نگفت ولی معلوم بود که ادعای مرا کمی گزافه‌گویی دانسته است.

سال‌ها بعد که برای فرصت مطالعاتی به «انستیتوی تحقیقات ریاضی» در برکلی رفته بودم، آیزاکس هم آن‌جا بود. یکی از روزها که برای دیدار او به دفترش رفتم، شخص دیگری هم در دفتر او حضور داشت. آیزاکس آقای دکتر **اسدی** را به من معرفی کردند. دکتر اسدی بلافاصله به زبان فارسی رابطهٔ مرا با پرویز شهریاری جویا شدند و بعد از پاسخ من، به آیزاکس گفت که پدر مرا می‌شناسد. آیزاکس جواب داد که این مطلب تازه‌ای نیست، چرا که همهٔ ایرانیان پدر شهریار را می‌شناسند. او بعد به من گفت که تا آن زمان با هر ایرانی روبه‌رو شده، پدرم را می‌شناخته است!

***

وقتی دورهٔ لیسانس ریاضی را در آمریکا می‌گذراندم،



استادی داشتم که نظریهٔ عددها را تدریس می‌کرد. او به کارهای **سرپینسکی****، ریاضی‌دان لهستانی خیلی علاقه داشت و پژوهش‌های او را می‌پسندید. روزی سر کلاس به دانشجویان سفارش کرد، کتاب «نظریهٔ عددها»ی سرپینسکی را تهیه و مسئله‌های آن را حل کنند. او وقتی فهمید که من ترجمهٔ فارسی این کتاب را در اختیار دارم، بسیار شگفت‌زده شد که چگونه ممکن است چنین کتابی به زبان فارسی ترجمه شده باشد. این کتاب را پدرم سال‌ها پیش از آن، ترجمه کرده بود که شامل پیش‌گفتاری مفصل و شرح کارهای سرپینسکی بود.

* برگرفته از یادداشت دکتر شهریار شهریاری برای کتاب «جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری»، انتشارات فردوس، ۱۳۸۲.

** واتسلاو سرپینسکی، ریاضی‌دان معاصر لهستانی. کتاب برجستهٔ او در نظریهٔ اعداد را تحت عنوان «۲۵۰ مسئلهٔ حساب» استاد پرویز شهریاری در آبان‌ماه ۱۳۴۹ ترجمه کردند و «انتشارات خوارزمی» آن را منتشر ساخت.



خردگرایی در پرتو ریاضیات

استاد عبدالحسین مصحفی، سردبیر مجلهٔ ریاضی یکان (۱۳۵۶-۱۳۴۲) معلم پیشکسوت ریاضی، مترجم و مؤلف ده‌ها عنوان کتاب و مقاله



اشاره

استاد گرانقدر عبدالحسین مصحفی وضعیت جسمانی مساعدی ندارند و متأسفانه چندی است که در بستر بیماری به‌سر می‌برند. مطمئنم که اگر این استاد فرزانه وضعیت مناسب‌تری داشتند، حتماً مایل بودند که در این ویژه‌نامه مطلبی به یاد استاد شهریاری بیاورند. اکنون به نیابت از ایشان، بخش‌هایی از مطلب ایشان در کتاب «جشن‌نامهٔ استاد پرویز شهریاری» را در این‌جا درج می‌کنیم.

سال‌ها پیش از آنکه با خود آقای پرویز شهریاری آشنا شوم، با نامش آشنا بودم و آن‌گاه که با خواندن یکی از مصاحبه‌هایش، سال تولدش را دانستم و دریافتم دوران کودکی را در محلهٔ دولت‌خانهٔ کرمان گذرانده است، پی بردم که در سال‌هایی از دوران نوآموزی در دبستان، روزانه یکی دو بار از کنار هم می‌گذشته‌ایم...

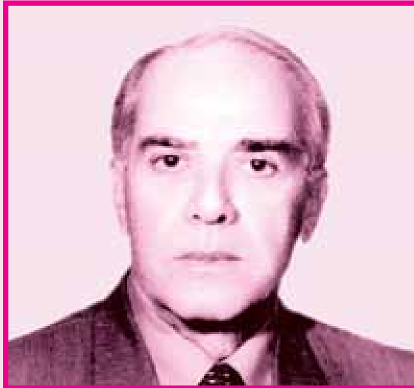
نخستین دیدارم با آقای پرویز شهریاری در آذرماه ۱۳۴۲ بود. امتیاز انتشار «مجلهٔ ریاضی یکان» را گرفته بودم و به دنبال فراهم آوردن مقاله برای آن، به سراغ فرهنگ دوستان می‌رفتم. شهریاری آن موقع مجلهٔ سخن علمی را درمی‌آورد. گمان نداشتم با آن همه گرفتاری، همکاری با مجلهٔ یکان را هم بپذیرد. اما او با گرمی این را پذیرفت و تشویقم کرد، در کاری که در پیش دارم از پای ننشینم ...

پرویز شهریاری در سطح‌ها و در محیط‌های متفاوت آموزشی درس داده است و مسلماً خیلی از شاگردانش به مقام‌های بالای علمی یا اجتماعی دست یافته‌اند، اما هیچ‌گاه از او نشنیده‌ام که موردی را نام ببرد و از بابت آن به خود ببالد. خوب آموختن برای او هدف بود و رضایتش در رسیدن به این هدف برآورده می‌شد. به گفتهٔ خودش: «... معلمان خوب عاشقانی هستند که روح و جان و زندگی خود را فدای عشق خود می‌کنند...» و خود او به گواهی بسیاری از شاگردانش، یک معلم خوب بوده است...

پرویز شهریاری شخصیتی خود ساخته و انسانی تلاشگر است. تلاش او در دو راه صرف شده و می‌شود: یادگرفتن و یاددادن. او زیاد می‌خواند و زیاد می‌نویسد. اگر آنچه را می‌نویسد، همه‌اش ریاضیات است، اما آنچه را می‌خواند یا ریاضیات است و یا به گفتهٔ خودش: «ریاضی‌دان نه تنها باید با هنر و ادبیات آشنا باشد، بلکه باید به این آفریده‌های زیبای روح انسانی عشق بورزد... و نه تنها هنر و ادبیات، ریاضی‌دان باید به تاریخ، فلسفه و علوم اجتماعی علاقه‌مند باشد. موسیقی را دوست داشته باشد، و از شعر خوب هم لذت ببرد... کوتاه سخن، انسان باشد. بدون این، یک ریاضی‌دان حتی ریاضی‌دان هم نیست.»

شهریار ریاضیات ایران

ابراهیم دارابی، دبیر پیشکسوت ریاضی، عضو سابق هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد ریاضی و مؤلف کتاب‌های درسی ریاضی



استاد **پرویز شهریاری**، شهریار ریاضیات ایران ما، تنها یک ریاضی‌دان، یک ادیب و یک مورخ نبود، آموزگاری بزرگ از آموزگاران زندگی بود که همچون ستاره‌ای همهٔ عمر خلاق خود را در مدار خورشید مرادش چرخید و ذره ذرهٔ وجودش را «واژه» کرد و چون همه را فرو ریخت، تکثیر شد، کتاب شد، مجله شد و مقاله شد تا راه را از چاه، خیر را از شر، و زیبایی را از زشتی به ما بشناساند.

بر این اساس استاد از میان ما نرفته است. در آثار تکثیر و ماندگار شده است. هر دانش‌آموز و دانشجویی، هر معلم و استادی، هر علاقه‌مند به علم و تاریخی، هر شیفتهٔ هنر و ادبیاتی که آثار استاد را خوانده است، و یا از این پی خواهد خواند، یک شهریاری را در قلب و وجود خویش حس خواهد کرد...

از استاد بسیاری، بسیار آموخته‌اند، من نیز یکی از آنها هستم. در دوران تدریسم در مدارس، هر شب که خود را برای تدریس روز بعد آماده می‌کردم، استاد با من بود. وقتی پای تخته می‌نوشتم، با من بود. وقتی سرفراز از تدریس روز، کلاس را ترک می‌کردم، با من بود...

حالا هم که می‌نویسم، با من است: با سیمای انسانی دوست‌داشتنی احترام برانگیزشان بالای سرم ایستاده‌اند و با تبسم نوشته‌هایم را با نگاهشان سیر می‌کنند.







شهریاری؛ همراه همیشگی جوانان

سپیده چمن‌آرا ــ سردبیر مجلهٔ رشد برهان راهنمایی تحصیلی

پرویز شــهریاری، معلم این نسل و آن نســل نبود، او معلم همهٔ نسل‌ها بوده و هســت. او در هر سنی، با سعهٔ صدر و فروتنــی کم‌نظیری، با جوانان و نوجوانانی که قصــد انجام کاری در حیطهٔ توســعهٔ دانش ریاضی داشتند، برخــورد می‌کــرد. بگذاریــد برایتان خاطره‌ای بگویم:

زمســتان ســال ۱۳۸۰ بــود. من بــا گروهــی از دانشــجویان ریاضــی و بــه مدیــر مســئولی دکتــر **یحیی تابش**، برای دانش‌آموزان دبیرســتان و پیش‌دانشــگاهی، نشــریه‌ای به نام «ماه‌نامهٔ ریاضیات» منتشر می‌کردیم؛ همان کــه امروز بــا عنوانِ «نشــریهٔ ریاضیات» توسط «انتشاراتِ فاطمی» به چاپ می‌رسد.

قصد داشــتیم برای نوروز ۱۳۸۱ ویژه‌نامه‌ای چــاپ کنیم و برای اینکه عید نوروز را بــه خوانندگان جوانمان تبریــک بگوییم، پس از بحث بر ســر پیشــنهادهای متفاوت، قرار شــد هر یــک از اعضــای تحریریــه و تعدادی از نویســندگان همکار بــا مجله، چند ســطری بنویســند و آنهــا را به جای ســرمقاله قــرار دهیــم. دکتــر تابش پیشــنهاد داد که از پرویز شــهریاری هــم درخواســت کنیم که بــرای این ویژه‌نامــه، مطلبی برایمان بنویســد. همه از این پیشنهاد استقبال کردیم.

من تا آن زمان نام پرویز شهریاری را بســیار شــنیده بــودم و کتاب‌های زیــادی به قلــم یا ترجمهٔ او داشــتم، ولی هرگز او را ندیده بودم. می‌دانستم با ترجمــه و تألیف کتاب‌های بســیار دربارهٔ ریاضی و سرگرمی‌های ریاضی، خدمــت بزرگی بــه رواج این علم نزد نوجوانان و جوانان کرده اســت. تصور اینکــه ملاقاتی با شــهریاری داشــته باشــم و ضمــن اهــدای شــماره‌های پیشــین ماه‌نامه، از او حضوراً مطلبی بــرای مجله درخواســت کنــم، برایم غیرممکن بــود. یعنی من مرد بزرگی را کــه این همه کتاب تألیف یا ترجمه کرده اســت، از نزدیک می‌بینم و با او مانند یک همکار صحبت خواهم کرد؟

قرار گذاشــته شد و من و یکی دو نفر دیگر از اعضای تحریریه، به منزل ایشــان رفتیم. استقبال گرم او از ما ـ که گویی سال‌هاســت ما را می‌شناسد ـ و شــوقش برای شــنیدن حرف‌های ما و دیــدن شــماره‌های ماه‌نامه، مرا متعجب کرد. پیرمــردی که این همه شــهرت و تجربه داشــت، چگونه با ما چند جوان کم‌تجربــه به این مهربانی و راحتی ارتباط گرفت و تقاضای ما را پذیرفت؟ البته به هر حال ما به اعتبار دکتر تابش به این ملاقات رفتیم، ولی برخورد شــهریاری با ما کاملاً مستقل از آن می‌نمود.

بعدهــا نیــز کــه مدیــر داخلــی رشــد آمــوزش ریاضی شــدم و برای ویژه‌نامه‌ای بــرای خود او، باز هم با او ملاقات کــردم، او هم‌چنان ماه‌نامه را به‌خاطر داشت و پی‌گیر آن شد.

ایــن خاطــره را گفتــم تــا بــه خوانندگان برهان یادآور شــوم که به راستی این مرد فروتن و صبور، از هیچ کمکی به جامعهٔ آموزش ریاضی ایران دریغ نکرده اســت. شــاید بد نباشــد نوشــتارم را بــا آخرین بنــد از همان مطلبی که شهریاری برای شمارهٔ نهم ماهنامــهٔ ریاضیات در اســفند ۱۳۸۰ نوشت، به اتمام برسانم. یادش گرامی و راهش مستدام باد:

«من درد دل‌های زیادی در زمینهٔ آموزش ریاضــی دارم که جای آن در این مختصر نیست و معتقدم تا زمانی که این کنکور را برندارند و دســت از تســت نکشــند، کار آموزش از جمله آمــوزش ریاضی به جایی نمی‌رســد. این کنکور به شکلی که وجود دارد، از یک‌طرف سطح آگاهی جوانان را پایین نگه می‌دارد و... کنکور سال‌هاست که دانش مملکت را ویران کرده اســت و باید فکری عاجل برای آن کرد.»



شهریاری و ظهور مجلهٔ برهان ریاضی

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ـ عضو هیئت تحریریه مجلهٔ رشد برهان متوسطه



اولین بار که با نام استاد **شهریاری** آشنا شدم، در سال سوم رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک (نظام قدیم) و در درس حساب و جبر آن زمان بود. کتاب درسی حساب و جبر ایشان بسیار متنوع و جذاب بود، به‌طوری که یکی از بهترین و دوست‌داشتنی‌ترین کتاب‌های مورد علاقهٔ من بود. علاوه بر این، چند کتاب ایشان از جمله روش‌های جبر (جلد اول)، روش‌های مثلثات، اندیشهٔ ریاضی، در پی فیثاغورس و... به دستم رسید. در آن زمان همیشه آرزو داشتم ایشان را ببینم که با «مجلهٔ آشتی با ریاضیات» و بعد از آن با «آشنایی با ریاضیات» (مجلهٔ آشتی با ریاضیات به آشنایی با ریاضیات تغییر نام پیدا کرد) روبه‌رو شدم. این مجلات چنان جذاب و تأثیرگذار بودند که مرا به نوشتن مقاله تشویق کردند. پس مصمم شدم که به دفتر مجله بروم و استاد را ملاقات کنم.

بالاخره انتظار به سر رسید و در دفتر مجله واقع در خیابان جمهوری ایشان را مقالات کردم. پس از ارائهٔ مقاله و استقبال خوب و صمیمی ایشان، به نوشتن مقالات بعدی تشویق شدم. در آن زمان که دانش‌آموز بودم، بیشتر پنج‌شنبه‌ها به میدان انقلاب می‌رفتم و در کتاب‌فروشی‌ها به دنبال کتاب جدید ریاضی ایشان می‌گشتم. از آنجا که پول هفتگی من کفاف خرید کتاب را نمی‌داد، مجبور بودم که بیشتر مسافت‌ها را پیاده بروم تا پول خود را برای خرید کتاب‌های استاد ذخیره کنم. به دنبال مقالاتی که این جانب پی‌درپی به دفتر مجلهٔ آشنایی با ریاضیات ارائه می‌کردم، ارتباط من با استاد تنگاتنگ شد تا زمانی که مجلهٔ ریاضی برهان ظهور کرد. آن زمان در دبیرستان‌های البرز و کمال تدریس می‌کردم و بیشتر وقتم صرف خواندن کتاب‌های ایشان، تحقیق و پژوهش، نگارش مقاله برای مجلات آشنایی با ریاضیات، رشد آموزش ریاضی و مجله‌های ریاضی برهان، و تألیف کتاب‌های ریاضی (سری کتاب‌های کوچک ریاضی) می‌شد. این‌جانب که از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی برهان بودم، دعوت‌نامه‌ای برای همکاری از طرف مجله برای استاد شهریاری بردم.

ایشان از اولین شماره، مجلهٔ ریاضی برهان را یاری کردند. و با ارائهٔ مقالات بسیار ارزنده، همیشه مشوق دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضیات بودند. در مدت ۳۰ سالی که در محضر استاد بودم، بسیار چیزها یاد گرفتم که تا آخرین لحظات زندگی‌ام یاد شیرین آن لحظات همیشه جاودان است. همیشه یادش گرامی.



کنون کز برم رفته آن غمگسار
دگر با که گویم غم روزگار؟ *

غلامرضا یاسی‌پور ـ عضو هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد برهان متوسطه



استاد **شهریاری** از میانمان رفت و با رفتنش جمع برهانیون را که متجاوز از ۲۰ سال در هیئت تحریریهٔ «مجلهٔ ریاضی برهان»، در حضور ایشان جمع می‌شدند، پریشان کرد.

روزی که با جناب **امیری**، سردبیر مجله، و استاد **رستمی** رأی زدیم و که از تجربهٔ استاد در تهیهٔ مطالب مجله کمک بگیریم، روزی فراموش‌نشدنی در تاریخچهٔ این مجله است. استاد همان لحظه قول همکاری داد و در مدت ۲۰ سالی که از انتشار این مجله گذشت، هیچ‌گاه ترکمان نکرد. همواره با رویی گشاده ما نوسفران این راه دشوار را می‌پذیرفت و هدایتمان می‌کرد.

مردی از تبار جوانمردان و از قبیلهٔ جهان‌گردان، هیچ‌گاه در اجابت تقاضایی که اوقات شریفشان را نیز بسیار می‌گرفت، «نه» بر لب نداشت. در هر دشواری، مرد «آری» بود.

یاد دارم هر زمان برای برنامهٔ **«در جهان ریاضی»** که به مدت یک‌سال از **«رادیو فرهنگ»** پخش می‌شد، یا برنامهٔ **«آراء»** که میزگردی دو نفره بود، از ایشان دعوت می‌کردیم نیز سر ساعت حاضر بودند. با این‌که گاهی در ورود به **صدا و سیما** دچار اشکال می‌شدند، نه گله می‌کردند و نه شکایت می‌آوردند.



خودشان تعریف می‌کردند روزی که برای شرکت در برنامه به **صدا و سیما** آمده بودند، سرباز جلوی دروازه از ورود ایشان به این عذر جلوگیری کرد که نام شهریاری در دفتر اسامی وارد شوندگان نیست. استاد حکایت کردند که به او گفتم ممکن است اسامی دفتر را من هم ملاحظه کنم که قبول کرد. آن‌وقت استاد نام پرویز شهریاری را که در دفتر بود به سرباز نشان می‌دهند و می‌گویند: پس این چیست؟ و سرباز ساده‌دل پاسخ می‌دهد: شما گفتید شهریاری، در حالی که این پرویز شهریاری است.

رسم معمول این بود که برای مدعوین برنامه وسیلهٔ آمد و رفت در نظر بگیرند. اما استاد هر بار خودشان می‌آمدند و خودشان می‌رفتند و ما هرچه اصرار می‌کردیم، قبول نمی‌کردند.

استاد در رفتار مؤدب بودند و با فعلشان به ما شاگردان درس ادب می‌آموختند.

من در مدت ۵۰ سالی که ایشان را می‌شناختم، و از آن زمان‌ها که شاگرد ایشان بودم و بعدها که همکار ایشان شدم، هرگز اخمی بر چهرهٔ باصفایشان ندیدم. هیچ‌گاه هم بانگی بلند از ایشان نشنیدم. به جرئت می‌توانم ادعا کنم که تمام شاگردان استاد عاشقانه دوستشان داشتند و از ایشان علاوه بر ریاضی، در رفتار و کردار نیز درس می‌گرفتند.

استاد چو آن بید معلق **بهار**، دست ضیمران‌های ضعیف را می‌گرفتند و نه تنها اندیشهٔ ریاضی را می‌آموختند که روش انسان‌بودن را نشان می‌دادند. ریاضیات استاد ریاضیات پای در عمل بود و دست در کار. همچون **کانت** که فلسفه را آموختن اندیشیدن می‌دانست نه آموزش اندیشه‌ها، کار ریاضیات را آموزش انسان بودن و در خدمت انسان‌ها قرار گرفتن می‌دانستند. ریاضیات بدون عمل را چون **سعدی** که علم بی‌عمل را زنبور بی‌عسل می‌گوید، بیهوده می‌انگاشتند و در این راه به روش ریاضی‌دانان گذشتهٔ ایرانی می‌رفتند که ریاضیاتشان عملی و کاربردی بود.

به ایران و ایرانیان عشق می‌ورزیدند، آن‌گونه که ترک زن و فرزند فرنگ مانده را کرده بودند و در دوران پیری و بیماری به تنهایی، اما در ایران، روزگار می‌گذراندند.



روزی در زنگ تفریح جلسهٔ تحریریهٔ برهان تعریف کردند:

«یکی از روزها در ایامی که در کانادا بودم، خانمی زنگ زد که اگر ممکن است فردا به ادارهٔ فلان برای شنیدن پیشنهادی بیایید. من به ایشان گفتم چون خیابان‌های شهر را نمی‌شناسم، خودتان بیایید. قرار شد فردا مراجعه کنند. فردا خانم و آقایی آمدند و گفتند ما از وزارت فرهنگ کانادا آمده‌ایم. به شما ویزای اقامت می‌دهیم و همهٔ امکانات را برایتان آماده می‌سازیم. تنها از شما انتظار داریم که در دانشکده‌های ما تاریخ ریاضیات تدریس کنید. در مقدمهٔ کتاب‌هایی هم که تألیف می‌کنید، بنویسید این کتاب‌ها را در کانادانوشته‌اید.»

استاد می‌گویند: «به ایشان گفتم به اقامت نیاز ندارم و اگر کاری کنم، برای کشورم و در کشورم انجام می‌دهم. این مدت کوتاه را نیز برای دیدن فرزندانم به کانادا آمده‌ام.»

باری از این خاطرات، هم ما و هم دیگران از استاد زیاد داریم و بسیار خوانده و شنیده‌ایم. برایند تمام این خاطرات در ذهن من که آشنایی ۵۰ ساله‌ای با استاد داشتم، این است که استاد مردی خوش‌بخت بود. سعید زیست و سعید از دنیا رفت. از همه مهم‌تر، خطبهٔ نامدار خود را به قول **حسین مسرور** در منبر روزگار خواند و آن‌گاه از آن فرود آمد.

به سر برد آن خطبهٔ نامدار
فرود آمد از منبر روزگار

---

* استاد حسین مسرور

زنده‌یاد پرویز شهریاری



فارابی معلم ثانی

کلیدواژه‌ها: فارابی، فلسفهٔ نوافلاطونی، سیف‌الدولهٔ حمدانی، مدینهٔ فاضله، افلاطون، آرمانشهر، ارسطو، بیکن، ابن‌رشد، ابوالوفای بوزجانی، مقدمات، اقلیدس

زندگی، فعالیت‌ها و دیدگاه‌ها

از زندگی خصوصی فارابی، چندان نمی‌دانیم، جز اینکه: در «فاراب» ماوراءالنهر (دقیق‌تر، در قریه، «وسیج» فاراب در کنار رود سیحون و واقع در جنوب جمهوری قزاقستان)، در سال ۲۵۹ یا ۲۶۰ هجری قمری، در خانوادهٔ یکی از سرداران سپاه سامانی به‌دنیا آمد، در همانجا درس خواند و به احتمالی، نزد **یوحنا**، فرزند **حیلان مسیحی** ـ که در مرو زندگی می‌کرد و با فلسفهٔ نوافلاطونی فیلسوفان اسکندرانی آشنا بود ـ با فلسفهٔ نوافلاطونی، آشنا شد. سپس، برای تکمیل تحصیل خود به بغداد رفت و در آنجا ضمن فراگیری زبان عربی، نزد همان استاد قبلی خود یوحنا (که او هم، از مرو به بغداد آمده بود) و استاد مسیحی دیگری به نام **مستی**، فرزند **یونس** (مترجم برخی کتاب‌های یونانی به عربی)، درس خود را ادامه داد. همچنین به حلب (در سوریه) و مصر سفر کرد. فارابی بیشتر کتاب‌های خود را در بغداد نوشت و سرانجام در سال ۳۳۹ هجری قمری، در دمشق درگذشت.

سفر او به حلب، به دعوت **سیف‌الدولهٔ حمدانی** (۳۰۱-۳۵۶ هجری قمری) بود. سیف‌الدوله برای نخستین بار حکومتی مستقل در حلب (که شامل خود حلب و بسیاری از سرزمین‌های دور و بر آن می‌شد) تشکیل داده بود. او حاکمی مستبد و خون‌ریز، ولی شجاع بود. در عین حال، به دانش و ادبیات علاقه داشت و می‌کوشید دانشمندان را در دربار خود گردآورد. **ابوالفرج اصفهانی**، کتاب «اغانی» خود را به او پیشکش کرده است.

علی، فرزند حمدان و معروف به **ابوالحسن**، وقتی در ۳۳۰ هجری قمری، **ابن‌رائق**، امیرالامرای سابق خلافت بغداد را، با همکاری برادرش کشت، از طرف **متقی**، خلیفهٔ عباسی، لقب «سیف‌الدوله» گرفت. دوران زندگی فارابی، دوران ضعف و آغاز فروپاشی کامل خلافت عباسی بود. سراسر سرزمین‌های خلافت بغداد را، کشمکش، جنگ و نافرمانی فراگرفته بود. هر امیری در هر ناحیه‌ای خروج می‌کرد و دعوی استقلال داشت. حکومت بغداد که از درون پوسیده بود، قادر به حفظ خود و نگه‌داری سرزمین‌های قلمرو خود نبود. یکسره در جنگ و خون‌ریزی با رقیبان و مدعیان به‌سر می‌برد. بغداد و سرزمین‌های اطراف، دائماً به دست سپاهیان خلیفه و یا مدعیان او غارت می‌شدند و...

چه بسا، همین ناامنی‌ها و بی‌عدالتی‌ها که زمینه‌ای ویرانگر برای هرگونه کار علمی است، فارابی را قانع کرده بود که با پذیرش دعوت سیف‌الدوله، بغداد را ترک کند و به دربار او برود.

آن‌چه مسلم است، فارابی هرگز به خدمت امیر یا خلیفه‌ای درنیامد و با آن‌که در «سیاست» صاحب‌نظر بود، خود را از هرگونه کار دولتی و دیوانی کنار نگه داشت. به دلیل اعتقادهای عرفانی خود، بسیار ساده زندگی می‌کرد و مثل صوفی‌ها لباس می‌پوشید. اگر **ابن‌سینا**، اصطلاح‌های عرفانی و صوفیگری را، به عنوان تتمه و ضمیمه‌ای بر فلسفهٔ خود می‌آورد، فارابی از این اصطلاح‌ها در متن کتاب‌های خود و به عنوان اصطلاح‌های فلسفی استفاده می‌کند.

فارابی دیدگاه‌های سیاسی و فلسفی

خود فرمان می‌برند و به زیردستان خود فرمان می‌دهند. آنها با واسطهٔ رییس خود، مطیع و فرمان‌بر رییس جامعه‌اند. تنها مردم عادی هستند که هیچ خدمت‌گزاری ندارند و فقط باید کار کنند و فرمان ببرند.

البته در آرمانشهر فارابی، برخی دیدگاه‌های مثبت نیز وجود دارند، او برای رییس شرط می‌گذارد که باید فیلسوفی آگاه، عدالت‌خواه، هوادار مظلومان، صلح‌طلب و بری از فساد، دزدی و مال‌اندوزی باشد. فارابی تعاون، هم‌فکری و کار گروهی را شرط سلامت جامعه می‌داند و جامعه‌ای را که در پی جنگ و توسعه‌طلبی است و می‌خواهد سنت‌ها و اعتقادهای خود را بر مردم سرزمین‌های دیگر تحمیل کند، در مقابل آرمانشهر خود قرار می‌دهد و آن را نفی می‌کند و... .

با وجود این، فارابی نمی‌تواند چهرهٔ دل‌پذیری از شهر آرمانی خود نشان دهد که در آن، مردمی آزاد با امکان‌های برابر و امنیت فکری و مالی زندگی می‌کنند و کسی قدرت زورگویی و ستم و یا تحمیل اعتقاد خود را به دیگران ندارد. فارابی، تحت تأثیر شرایط زمان و تحت تأثیر نوشته‌های افلاطون، حکومت از بالا به پایین را توصیه می‌کند و به امکان‌های بالقوه‌ای که می‌تواند یک جامعهٔ آزاد و «برابر حقوق» را پیش ببرد، توجه نمی‌کند. بنابراین، آثارش نمی‌توانند برای زمان ما، به جز ارزش یک اثر تاریخی، ارزش دیگری داشته باشند.

فارابی که به اعتقاد **جرج سارتون** (مورخ بزرگ دانش) بزرگ‌ترین فیلسوف عصر بود، از نخستین مبلغان و مفسران فلسفهٔ ارسطویی در شرق به‌شمار می‌رود و به همین مناسبت، او را «معلم ثانی» نامیدند (معلم اول خود ارسطوست).

در واقع در سرزمین‌های خاور، به هر دو فیلسوف یونانی، افلاطون و **ارسطو**، اعتقاد داشتند و به هر دوی آنها احترام می‌گذاشتند. در حالی‌که در واقع بسیاری



فارابی

خود را، در رساله‌های متعددی شرح داده است که از آن جمله می‌توان از «فصوص‌الحکم»، «فصول‌المدنی»، «سیاست المدینه» و «آراء اهل المدینه الفاضله» نام برد. به‌خصوص «مدینه فاضله» یا «آرمانشهر» فارابی، می‌تواند معرف نظریه‌های سیاسی و گاه فلسفی او باشد. شک نیست که فارابی، آرمانشهر خود را به تقلید از **افلاطون** و تحت تأثیر او ـ که خود تحت تأثیر شیوهٔ تفکر ایرانی بود ـ نوشته است.

او جامعه‌های انسانی را به سه گروه تقسیم می‌کند: جامعه‌های کوچک (خانواده، کوی، روستا و شهر)، جامعه‌های میانه (یک کشور یا قلمروی حکومتی) و جامعهٔ بزرگ (شامل تمامی مردم روی زمین). سپس، هر جامعه را به یک انسان تشبیه می‌کند: در انسان، قلب رییس و فرمانده تمامی بدن است. بعد از قلب اندام‌هایی وجود دارند که از قلب فرمان می‌برند و به نوبهٔ خود بر اندام‌های دیگری فرمان می‌رانند. این سلسله مراتب خود را به اندام‌هایی می‌رساند که تنها فرمان می‌برند و خود بر جایی فرمان نمی‌رانند. بنابراین (فارابی نتیجه می‌گیرد)، در هر جامعه و هم در جامعهٔ بزرگ انسانی، باید همچون «سلسله مراتب» اندام‌های آدمی، حکومتی هرمی شکل وجود داشته باشد که در رأس آن فرمانده و رییس جامعه، و در سطح قاعدهٔ هرم، مردم عادی فرمان‌بر قرار دارند. افراد بینابینی که در سلسله مراتب بین رأس و قاعده واقع‌اند، از رییس

از دیدگاه‌های فلسفی این دو، متناقض یکدیگرند و کمتر اشتراکی با هم دارند. فارابی بسیار کوشیده است که نظرهای افلاطون و ارسطو را به هم نزدیک کند و در این مورد، تحت تأثیر فیلسوفان و مفسران نوافلاطونی اسکندریه بود که نوشته‌های ارسطو و افلاطون، و به‌خصوص افلاطون را، به میل خود ـ و نه به صورتی که در واقع وجود داشت ـ تفسیر می‌کردند. به هر حال، فارابی را باید پایه‌گذار فلسفهٔ ارسطویی در شرق دانست که بر دیدگاه‌های بسیاری از فیلسوفان و اندیشمندان بعد از خود تأثیری جدی داشت.

فارابی فلسفه و ایمان را مغایر هم نمی‌داند و معتقد است که هر دو به یک هدف خدمت می‌کنند. ولی فلسفه را برتر می‌داند، چرا که بر برهان عقلی و استدلال منطقی تکیه دارد. شاید بتوان گفت که فلسفهٔ فارابی، برایندی از فلسفهٔ افلاطون و ارسطو (و به‌خصوص ارسطو) از یک طرف، و تصوف و عرفان از طرف دیگر است.

فارابی را که ۵۰۰ سال پیش از **گالیله** و **بیکن** زندگی می‌کرد، می‌توان پایه‌گذار روش «مشاهده‌ای ـ تجربی» دانست که البته بیشتر در بحث‌های روش‌شناختی و آموزشی او مطرح می‌شود (بند بعدی را ببینید). او همچنین در بحث‌های فلسفی خود، روش قیاسی و استدلالی را توصیه می‌کند و از این جهت، در مقابل **زکریای رازی** قرار می‌گیرد که بر استقراء و تمثیل تکیه می‌کرد.

اگرچه فارابی ـ بعد از **کندی** و در تکمیل کارهای او ـ در جهت آشتی علم و ایمان تلاش کرده است و با وجود آن که بیشتر فیلسوفان بعد از او، نظر او را پذیرفته‌اند و زیر تأثیر اندیشه‌های او بوده‌اند، اما مورد انتقاد کسانی هم‌چون **ابن‌رشد** (در «تهافت التهافت») و **ابن‌طفیل** قرار گرفته است. با این همه فارابی را باید بزرگ‌ترین و با نفوذترین فیلسوف زمان خود دانست.

فارابی به ساده‌نویسی و تفسیر متن‌های دشوار معروف است. مشهور است که ابن‌سینا با آن‌که بارها «متافیزیک» ارسطو را خوانده بود، تنها وقتی توانست مضمون اصلی کتاب را بفهمد که با شرح فارابی دربارهٔ آن آشنا شد. هم‌چنین، به احتمال زیاد **بیرونی** کتاب «التفهیم» خود را تحت تأثیر ساده‌نویسی فارابی، به زبانی ساده و قابل فهم برای همگان تنظیم کرده است.

دیدگاه‌های آموزشی، روش‌شناختی و علمی

کارهای فارابی در زمینهٔ ریاضیات جالب و فراوان است. او به‌طور جدی دربارهٔ موضوع‌های مهم روش‌شناسی ریاضیات کار کرد، نمونه‌های عالی از کاربرد روش‌ها و نظریه‌های ریاضی را در حل مسئله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی و صنعت (اخترشناسی، نظریهٔ موسیقی، نور، معماری و...) ارائه داد، و بررسی‌های کاملاً تازه‌ای را در ریاضیات نظری دنبال کرد. فارابی به هر سه جنبهٔ ریاضیات (روش‌شناسی و آموزش، کاربرد علمی، و جنبهٔ نظری) که از دیدگاه تاریخی، همیشه در پیوند با هم پیش رفته‌اند، توجه داشت.

جالب‌ترین جنبه‌ها در آثار فارابی از نظر تاریخ ریاضیات نظری، بررسی‌های او در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب «شرح المجسطی» (که در آن به شرح و تفسیر کتاب بزرگ بطلمیوس پرداخته است) «تانژانت» و «کتانژانت» را در دایرهٔ مثلثاتی وارد ساخت و قضیهٔ سینوس‌ها و تانژانت‌ها را برای مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی ثابت کرد. او در این زمینه از نخستین پیشروان است. فارابی در کتابی که دربارهٔ هندسه نوشته است («کتاب الحیل الروحانیه و الاسرار الطبیعیه فی دقایق الاشکال الهندسه»، کتابی که به احتمال زیاد الهام‌بخش ابوالوفای بوزجانی در تنظیم کتاب معروف خود، «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه» بوده است. این کتاب به عمل‌های هندسی لازم برای صنعت‌کاران می‌پردازد)، برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات، به صورتی منظم، مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند. از میان مسئله‌های مزبور، به ویژه مسئله‌های رسم به کمک پرگار ثابت (پرگاری که شعاع آن تغییر نمی‌کند)، رسم سهمی، رسم چندضلعی‌های منتظم و هم‌چنین ترسیم‌های روی کره، جالب هستند.



فارابی در نوشته‌های خود، به بنیان‌های ریاضیات و به روش طرح مفهوم‌های اصلی و پایه‌ای ریاضیات، اهمیت زیادی می‌دهد. وی از نخستین کسانی است که اثر معروف **اقلیدس**، یعنی «مقدمات» را مورد بررسی انتقادی قرار دادند. او در کتاب «شرح المستغلق من مصادرات المقاله الاولی و الخامسه من اقلیدس» به بحث دربارهٔ دو فصل اول و پنجم از کتاب مقدمات اقلیدس پرداخته است: فصل اول کتاب اقلیدس ۴۸ گزاره دارد دربارهٔ مثلث‌ها، خط‌های راست عمود برهم و موازی با هم، متوازی‌الاضلاع، مساحت شکل‌ها، و قضیهٔ فیثاغورث و عکس آن. فصل پنجم مقدمات نیز که یکی از اساسی‌ترین فصل‌های کتاب است، به «نظریهٔ نسبت‌ها» اختصاص دارد.

فارابی در دو اثر مشهور خود، «احصاءالعلوم» و «مراتب‌العلوم»، دانش‌ها را برحسب جنبه‌های آموزشی آنها تقسیم‌بندی می‌کند و ریاضیات را شامل هفت شاخه می‌داند: حساب، هندسه، نور، اخترشناسی، موسیقی، مکانیک و سرانجام، علم استادی و مهارت در کارها. می‌بینیم که فارابی، وقتی از ریاضیات



صحبـت می‌کنـد، به درسـتی دو جنبهٔ نظری و کاربردی آن را با هم و در پیوند با یکدیگـر در نظر می‌گیرد. او در دوره‌ای از تاریخ ریاضیات قرار دارد که ضمن بستگی کامل نظریه و کاربرد با یکدیگر، ریاضیات سمت‌گیری کاربردی داشته است.

اقلیـدس در مقدمـات از «روش ترکیبی» استفاده می‌کند و از مفهوم‌های سـاده‌تر، خـود را به تعریـف مفهوم‌های پیچیده‌تر می‌رسـاند. فارابی از این روش اقلیدس، کـه به روش ترکیبـی بیش از انـدازه اهمیت می‌دهـد، انتقاد می‌کند و برای رسـیدن به نتیجهٔ مطلـوب، روش تجزیـه را هم توصیـه می‌کنـد. از زبان خود فارابی بشنویم: «... پایه‌های هندسه و حسـاب، با دو روش آموخته می‌شوند: روش تجزیه و روش ترکیب. ریاضی‌دانان قدیم در نوشـته‌های خود این دو روش را توأم می‌کردند، ولی اقلیدس کتاب خود را تنها با روش ترکیبی نوشت...»

فارابـی در تألیف کتـاب عظیم خود «الموسیقی الکبیر» (که در دو جلد تنظیم شده بود و دریغ که تنها جلد اول آن به ما رسیده است)، توانست با موفقیت دو روش مذکور را بـا هم به کار گیرد. این موضوع را می‌تـوان از جمله‌های زیر که از مقدمهٔ ایـن کتاب آورده‌ایم، به خوبی فهمید: «... تا اینجا از تجزیه اسـتفاده کرده‌ایم. برای اینکه هنر موسـیقی را بیاموزیم، ترکیب را هم بـه‌کار می‌بریم. تجزیه به این دلیل برای ما لازم است که عنصرها را، به ردیف شناخت شده، منظم کنیم؛ یعنی به همان ردیفی که این عنصرها مورد شناسایی ما قرار گرفته‌اند. برعکس، ترکیب، این عنصرها را به همان ردیفی که در واقع وجود دارند، تنظیم می‌کند... .»

فارابـی، طـرح مفهوم‌هـای بنیانی هندسـه و اصل‌های هندسی را در همان کتاب «بررسی دشـواری‌های مقالهٔ اول و مقالهٔ پنجم اقلیدس» ارائه داده اسـت. در این‌جا، او با اندیشـهٔ فلسفی عمیق دربارهٔ سرچشـمه به وجود آمـدن مفهوم‌های بنیانی هندسـه، از راه انتـزاع تدریجی و گام‌بـه‌گام آنها از دنیـای واقع، گفت‌وگو می‌کند. مثلاً با اشاره به تعریف‌هایی که از اقلیدس در فصل اول مقدمات آورده است، مسـیر جداشـدن مفهوم‌ها را از واقعیت عینی، تجزیه و تحلیل می‌کند.

به این منظـور او دو حالت را بررسـی می‌کند: نخست اینکه آنچه را به احساس مستقیم نزدیک‌تر است، مقدم بدانیم. دوم اینکه آنچه را به عقل نزدیک‌تر اسـت، در جای اول قـرار دهیم. باز هم از زبان خود او بشـنویم: «... جسم از همه به احساس نزدیک‌تر اسـت، سـپس سطح، بعد خط و سـرانجام دورتـر از همهٔ اینهـا، نقطه. ولـی به عقل، چیزی نزدیک‌تر اسـت که از بخش‌هـای کمتری نسـبت بـه دیگر چیزهای مشخص، تشکیل شده باشد؛ هر چیزی که ساده‌تر باشد، به عقل نزدیک‌تر است. و به این ترتیب، به آنجا می‌رسیم که دربارهٔ چیزی بیندیشیم که برای وجود آن هیچ جزئی دخالت نداشته باشد. بنابراین، از لحاظ عقلـی، در ردیفی که به‌دسـت می‌آید، نقطه در جای نخست قرار گرفته است، سـپس خط، بعد سطح و در جای آخر جسم.

با وجود این، وقتی که با یک شـاگرد سـروکار داریم، از آنجا که در سـال‌های نخسـت یادگیری، بیشـتر به جانبی که محسوس باشـد، گرایش دارد، ما ردیفی را انتخاب می‌کنیم که متناظر با احساس است. ولی در تألیف یک اثر علمی، از ردیفی که عقلانی‌تر اسـت، استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، آموزش از جسـم محسوس و قابل لمس آغاز می‌شود. سپس این جسم، از همهٔ آنچه که آن را محسـوس می‌کند، جدا و منتزع می‌شود. بعد به سطح و خط و سـرآخر، به نقطه پرداخته می‌شود. به این ترتیب، بهتر این اسـت کار خود را از **محسوس** و در مسیر تجزیه آغاز کنیم تا به **نقطه** برسیم و سپس دوباره به ردیفی بپردازیم که متناظر با عقل است؛ یعنی به ترکیب...»

می‌بینیم که فارابی در بررسی انتقادی خود از مقدمـات اقلیدس، تأکید می‌کند که ضمن طرح مفهوم‌های بنیانی هندسه، باید فلسـفهٔ پیدایـش آنها را در مسـیر جداشدنشـان از جسـم فیزیکی و دنیای واقع، در نظر بگیریم. اقلیدس در مقدمات از تعریف «انتزاعی‌تریـن» مفهوم‌ها آغاز می‌کند و سپس به تدریج به تعریف‌هایی می‌پردازد کـه در درجهٔ کمتری از انتزاع قرار دارند. فارابی با تجزیه و تحلیل انتقادی روش اقلیـدس، طرح محسـوس و مادی سرچشمه‌های پیدایش مفهوم‌های ریاضی را ارائه می‌دهد. باید به این توصیهٔ فارابی در مورد رعایت عینی بودن نظام آموزش در نخستین گام‌ها توجه کرد، زیرا دانش‌آموز در نخستین سال‌های آموزش «بیشتر به سمتی کشش دارد که محسوس است». **ابوریحـان بیرونـی**، زیر تأثیر مسـتقیم نوشـته‌های فارابی، در کتاب «التفهیم» خود برخلاف اقلیدس مفهوم‌های اساسی هندسه را به ترتیب انتزاعی بودن آنها (از محسوس به طرف تجرید) تعریف می‌کند.

فارابی در نوشته‌های خود اندیشه‌های درست و کاملی دربارهٔ مسئله‌های نظری (و از آن جمله ریاضیات) به صورت قابل فهم و در عین حال علمی و دقیق ارائه می‌دهد. کتاب موسـیقی فارابی را باید نخسـتین کتاب علمی دربارهٔ موسیقی نظری دانست کـه به کلی با آموزش‌هـای فیثاغورس و افلاطون دربارهٔ موسیقی ـ که پر از ابهام و در مسیر بحث‌های «ماوراءالطبیعه» است ـ فرق دارد. با پیروی از فارابی بود که بعد از او دانشـمندان دیگری مثل ابن‌سـینا، **جرجانی** و **قطب‌الدین شیرازی** به بررسی علمی موسیقی پرداختند.

کتاب موسـیقی فارابی، مجموعه‌ای

اســت از بحث‌های دقیــق و جالب دربارهٔ ریاضیات، فیزیک و موسیقی. به یاد داشته باشــیم که فارابی، با گونه‌هــای اندکی از ســازها (که در زمان او معمول بود)، مثل نی، تنبور و عود ســروکار داشت (تنبور ۲ ســیم و عود ۴ یا ۵ ســیم دارد). با وجود این، توانسته است از عهدهٔ بررسی علمی موســیقی برآیــد. او پرده‌هــا (صداها) و گام‌های متفاوت را مورد بحث قرار داده و انواع آنها را در میان قوم‌های مختلف با هم مقایسه کرده است. او به موجی و ارتعاشی بودن صوت، به احتمــال قریب به یقین، برای نخستین بار پی برد. همچنین، برای جمــع و تفریق فاصله‌هــای صوتی، طول تارهای مولد آنهــا را درهم ضرب و برهم تقسیم می‌کرد. یعنی به‌طور ضمنی از این قانون که جمع و تفریق فاصله‌های صوتی از قانون‌هــای لگاریتم پیــروی می‌کنند (بدون اینکه مفهوم «لگاریتم» را بشناسد)، اطلاع داشت.

فارابی نوعی الفبای موسیقی را به‌کار می‌بــرد و «نت‌ها» را با «عدد» مشــخص می‌کرد. او می‌گفت برای شناختن موسیقی باید به سرچشمهٔ آن، یعنی طبیعت روآورد. فارابی معتقد بود که در موسیقی نمی‌توان مبــدأ را تغییر داد و بــه دل‌خواه انتخاب کرد (آن‌طور که مثلاً در گرماسنج و برای تعیین درجهٔ حرارت ممکن اســت). برای پیدا کردن مبدأ موســیقی باید به ســراغ طبیعت رفت. هم‌نوایــی و هم‌آهنگی که بعدها از سدهٔ هجدهم میلادی مورد توجه قرار گرفته است، در بحث‌ها و بررسی‌های فارابی وجود دارد.

روش‌شناســی فارابی بســیار جالب و آموزنــده اســت. او در مقدمــهٔ کتــاب «موســیقی» می‌نویســد: « ... برای اینکه اندیشمند خوبی در تنظیم نظریه‌ها باشیم، بدون توجه به اینکه مربوط به کدام دانش است، باید سه شرط را داشته باشیم:

۱. همهٔ قاعده‌ها را به خوبی بدانیم؛

۲. توانایی نتیجه‌گیری‌های لازم را، از این قاعده‌ها و داده‌هایی که در این دانش وجود دارد، داشته باشیم؛

۳. توانایی پاســخ‌گویی به نظریه‌های نادرســت را داشــته باشــیم و بتوانیــم، اندیشــه‌ها و عقیده‌های دیگران را تجزیه و تحلیل کنیم، درست را از نادرست جدا سازیم، و به اصلاح اشتباه‌ها دست بزنیم...»

فارابــی، توصیه‌هــای مربــوط بــه روش‌شناســی علمی خــود را در کتاب‌ها و رســاله‌های فراوانی کــه در زمینه‌های گوناگون دانش نوشته، به کار بسته است و بهتریــن نمونه‌های مربوط به بررســی بنیان‌هــای دانش زمان خودش را، در این میان، بررسی انتقادی او از «المجسطی» **بطلمیــوس**، جای نمایانی دارد. فارابی، در مقدمهٔ این بررســی، یادآوری می‌کند: « ... تلاش کرده‌ام مضمون این نوشــته را تا حدی که ممکن است قابل فهم کنم...»

بطلمیوس در «المجسطی» همه‌جا می‌کوشــد بــه بررســی‌های مربــوط به پدیده‌های اخترشناسی جنبهٔ محاسبه‌ای بدهد. او سعی می‌کند از روش‌های خالص ریاضــی در مورد داده‌های عــددی که از راه تجزیه به‌دست آمده‌اند، استفاده کند. همچنین، از شــرط‌های هندسی معینی آغاز می‌کند و سپس از آنها به نتیجه‌های عددی می‌رسد.

در بررسی‌های فارابی یا اصلاً داده‌های عــددی وجود ندارد و یا به عنوان بازماندهٔ نادری از روش «المجسطی» پیدا می‌شود. او با به‌کار گرفتن قالب‌های خطی مثلثاتی و گســترش مفهوم عدد تــا عدد حقیقی مثبــت، تا مــرز روش‌هــای جبری پیش می‌رود. به برکت این روش دقیق نظری، نه تنها نوشتهٔ فارابی نسبت به «المجسطی» حجم کمتری دارد، بلکه مهمتر از آن، برای خواننده، ساده‌تر و قابل فهم‌تر شده است.

نتیجه

به این ترتیب می‌بینیم که اگر دیدگاه‌های فارابی دربارهٔ سیاســت، جامعه‌شناســی و فلسفه (فلسفه به معنای خاص خود، یعنی پرداختن به کون و مکان، و لاهوت و ناسوت)، تنها از نظر تاریخی اهمیت دارد، کارهای علمی فارابی در چنان درجه‌ای از اهمیت است که از بسیاری از آنها حتی امروز هم می‌توان استفاده کرد. به‌خصوص بررسی و مطالعهٔ کتاب‌های «موسیقی»، «هندسه»، «شرح مجسطی»، «احصاء العلوم» و «مراتب العلوم» که با کمال تأسف بسیار کم به آنها پرداخته شده است، از نظر روش‌شناسی علمی اهمیت بسیار دارد. کتاب «موسیقی» فارابی نمونهٔ بسیار ارزنده‌ای برای دانشمندان است که نشان می‌دهد چگونه می‌توان مسئله‌های دشوار دانش‌های طبیعی را به کمک ریاضیات حل کرد!

دیدگاه‌های فارابی در زمینهٔ روان‌شناسی آموزشی و روش‌شناسی علمی، مثل بسیاری از دیدگاه‌های دیگر او، تقریباً ناشناخته مانده‌اند و شناخت آنها به بررسی‌های خاص و مجدّانه‌ای نیاز دارد.

کتاب‌های فارابی با همهٔ اهمیتی که دارند، هنوز به زبان فارســی درنیامده‌اند و مشــتاقان ایرانی از مطالعهٔ مســتقیم نوشته‌های این اندیشمند بزرگ محروم‌اند. وزارت‌خانه‌های ارشاد، آموزش عالی و آموزش‌وپرورش، و همچنین دانشگاه‌ها باید ترجمه و چاپ کتاب‌های اندیشمندان ایرانی را از وظیفه‌های درجهٔ اول خود بدانند. بدون تکیه بر گذشتهٔ علمی خود و بدون تجزیه و تحلیل راه گذشته، نمی‌توان مسیر پیشرفت آینده را پیدا کرد.



درس‌هایی از عملیات جبری با رادیکال‌ها

آموزشی

احمد قندهاری



کلیدواژه‌ها: رادیکال، تجزیهٔ رادیکال‌ها، رادیکال مرکب، گویا کردن، مزدوج

الف) تجزیهٔ رادیکال‌ها

می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ را به دو رادیکال جدا از هم تبدیل کنیم. این عمل را «تجزیهٔ رادیکال‌ها» گوییم.

برای ایــن کار فرض می‌کنیم: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ (A، B، x و y مثبت‌اند.)

دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm ۲\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=A\\ ۲\sqrt{xy}=\sqrt{B}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=A\\ ۴xy=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=A\\ xy=\dfrac{B}{۴}\end{cases}$$

حــال برای تعییــن x و y، معادلهٔ درجهٔ دومی تشــکیل می‌دهیم که ریشــه‌هایش x و y باشد و سپس معادلهٔ تشکیل شده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}x+y=A=S\\ x.y=\dfrac{B}{۴}=P\end{cases}$$

$$Z^{۲}-SZ+P=۰\Rightarrow Z^{۲}-AZ+\frac{B}{۴}=۰$$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}=\frac{A\pm\sqrt{A^{۲}-B}}{۲}$$

فرض می‌کنیم: $C=\sqrt{A^{۲}-B}$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$Z=\frac{A\pm C}{۲}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}x=\dfrac{A+C}{۲}\\ y=\dfrac{A-C}{۲}\end{cases}$$

داشتیم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

پس:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

نتیجه:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}},\ C=\sqrt{A^{۲}-B}$$

توجه: اگر رادیکال مرکبی داشــته باشــیم و آن را به دو رادیکال ساده‌تر تبدیل کنیم، این عمل را «تجزیهٔ رادیکال‌ها» گویند. قبل از حل، رادیکال مرکب مسئله را به $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ تبدیل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱. عبارت $\sqrt{۳۷-۲۰\sqrt{۳}}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\sqrt{۳۷-۲۰\sqrt{۳}}=\sqrt{۳۷-\sqrt{۴۰۰\times ۳}}=\sqrt{۳۷-\sqrt{۱۲۰۰}}$$

با مقایسه با فرمول:

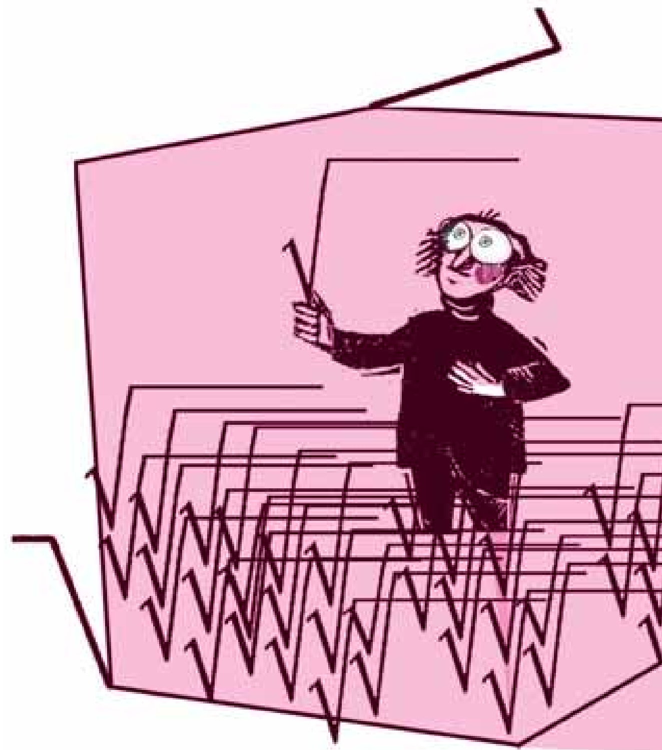
$$\begin{cases}A=۳۷\\ B=۱۲۰۰\end{cases},\ C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۳۷^{۲}-۱۲۰۰}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

بنابر فرمول:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}-\sqrt{\frac{A-C}{۲}},\ C=۱۳$$

$$\sqrt{۳۷-\sqrt{۱۲۰۰}}=\sqrt{\frac{۳۷+۱۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۳۷-۱۳}{۲}}=\sqrt{۲۵}-\sqrt{۱۲}$$

$$=۵-۲\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۳۷-۲۰\sqrt{۳}}=۵-۲\sqrt{۳}$$



مسئلهٔ ۲. حاصل $\sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$ را بیابید.

حل:

$$\sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}=\sqrt{\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}}$$

ابتدا $\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۱۷+\sqrt{۱۴۴\times ۲}}=\sqrt{۱۷+\sqrt{۲۸۸}}\begin{cases}A=۱۷\\ B=۲۸۸\end{cases}$$

$$C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۱۷^{۲}-۲۸۸}=\sqrt{۲۸۹-۲۸۸}=\sqrt{۱}=۱$$

داشتیم:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}\ ,\ C=\sqrt{A^{۲}-B}$$

پس:

$$\sqrt{۱۷+\sqrt{۲۸۸}}=\sqrt{\frac{۱۷+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۱۷-۱}{۲}}=۳+\sqrt{۸}$$

بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{\sqrt{۱۷+\sqrt{۲۸۸}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۸}}$$

حالا $\sqrt{۳+\sqrt{۸}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases}A=۳\\ B=۸\end{cases},\ C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۹-۸}=۱$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}\ ,\ C=۱\ ,\ \begin{cases}A=۳\\ B=۸\end{cases}$$

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{\frac{۳+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۳-۱}{۲}}=\sqrt{۲}+۱$$

بنابراین:

$$\sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}=\sqrt{\sqrt{۱۷+\sqrt{۲۸۸}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{۲}+۱$$

مسئلهٔ ۳. حاصل $P=\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}$ را بیابید.

حل: ابتدا $\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}\ \begin{cases}A=۱۳\\ B=۴۸\end{cases}\ C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۱۶۹-۴۸}$$

$$=\sqrt{۱۲۱}=۱۱$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}\ C=\sqrt{A^{۲}-B}$$

$$\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}=\sqrt{\frac{۱۳+۱۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۱۳-۱۱}{۲}}=\sqrt{۱۲}+۱$$

$$P=\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۲}-۱}}$$

$$=\sqrt{۳+\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}}$$

حال $\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}\ \begin{cases}A=۴\\ B=۱۲\\ C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۱۶-۱۲}=\sqrt{۴}=۲\end{cases}$$

پس:

$$\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}=\sqrt{\frac{۴+۲}{۲}}-\sqrt{\frac{۴-۲}{۲}}=\sqrt{۳}-۱$$

بنابراین:

$$P=\sqrt{۳+\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۳}-۱}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$P=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

$$P=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\ \begin{cases}A=۲\\ B=۳\\ C=\sqrt{A^{۲}-B}=\sqrt{۴-۳}=۱\end{cases}$$

$$P=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}+\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۲+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۲-۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}=$$



ب) گویا کردن ....

گویا کردن مخرج یک کسر، عملی است که رادیکال مخرج کسر را حذف می‌کند.

۱. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{n\sqrt{a}}$، $a>0$، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{15}{7\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{15}{7\sqrt{5}}=\frac{15}{7\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{7\times 5}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

۲. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$، $a>0,\ m,n\in N$، $m>n$، صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}$ را گویا کنید $(a\neq 0)$.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}\times\frac{\sqrt[11]{a^{11-7}}}{\sqrt[11]{a^{11-7}}}=\frac{1}{\sqrt[11]{a^7}}\times\frac{\sqrt[11]{a^4}}{\sqrt[11]{a^4}}=\frac{\sqrt[11]{a^4}}{\sqrt[11]{a^{11}}}=\frac{\sqrt[11]{a^4}}{a}$$

۳. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}$ $(a,c\neq 0\ ,\ b,d>0)$، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج، یعنی $a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}$، ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$ را گویا کنید.

حل: صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}\times\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{4(3)-9(5)}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{-33}$$

۴. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}$، صورت و مخرج را دوبار در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم $(a,b>0)$.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{3}}\times\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}$$
$$=\frac{(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$$

۵. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$، صورت و مخرج را در عبارت $(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{5-2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$$

۶. برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$، صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b})$ ضرب می‌کنیم.

مثال ۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ را گویا کنید.

حل:

$$a^2=9\Rightarrow a=3,\ b^2=4\Rightarrow b=2,\ ab=6$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{\underbrace{3^2}_{a^2}}-\sqrt[3]{\underbrace{3\times 2}_{a.b}}+\sqrt[3]{\underbrace{2^2}_{b^2}}}\times\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\underbrace{3}_{a}}+\sqrt[3]{\underbrace{2}_{b}}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{3+2}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{5}$$

مثال ۲. مخرج کسر $\frac{2}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}$ را گویا کنید.

حل:

$$\frac{2}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}=\frac{2}{\sqrt[3]{\underbrace{16}_{a^2}}+\sqrt[3]{\underbrace{4}_{b^2}}+\sqrt[3]{\underbrace{8}_{ab}}}\qquad\begin{cases}a=4\\ b=2\end{cases}$$
$$=\frac{2}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{8}}\times\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$
$$=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{4-2}=\frac{2(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})}{2}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$$

مسئلهٔ ترکیبی ۱. مخرج کسر $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}$ را گویا کنید.

حل: ابتدا فرجهٔ مشـــترک می‌گیریـــم. یعنی، دو رادیکال مخرج را به فرجهٔ ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}-\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۵^۲}-\sqrt[۶]{۲^۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}$$

حال صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}=\frac{۱}{\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸}}\times\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}=\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۸}}=$$

حال بنابر شـــمارهٔ (۵) همین درس، مخرج کســـر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt[۶]{۲۵}+\sqrt[۶]{۸}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵}_{a}}-\sqrt[۳]{\underbrace{۸}_{b}}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲۵^۲}+\sqrt[۳]{۲۵\times۸}+\sqrt[۳]{۸^۲}}{\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵^۲}_{a^۲}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۲۵\times۸}_{ab}}+\sqrt[۳]{\underbrace{۸^۲}_{b۲}}}$$

$$=\frac{(\sqrt[۶]{۲۵}-\sqrt[۶]{۸})(\sqrt[۳]{۶۲۵}+\sqrt[۳]{۲۰۰}+\sqrt[۳]{۶۴})}{۲۵-۸}=\frac{\text{عبارت صورت}}{۱۷}$$

مسئلهٔ ترکیبی ۲. حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$P=\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$$

حل:

صورت کسر را K فرض می‌کنیم:

$$۰<K=\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt{K^۲}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{(\sqrt{\sqrt{۵}+۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۲})^۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}-۲+۲\sqrt{\underbrace{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}$$

$$K=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵-۴}}=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۲}$$

$$=\sqrt{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+۱)}=\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}$$

$$P=\frac{\sqrt{۲}.\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}{\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}-\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}-\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۲}-(\sqrt{۲}-۱)=P=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}+۱\Rightarrow P=۱$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول مشاهیر ایرانی



در جدول واژه‌های به‌هم ریختهٔ زیر، نام‌های تعدادی از مشاهیر ایران اعم از شاعر، نویسنده، ریاضی‌دان، دانشمند و... آمده است. این نام‌ها ممکن اســت به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشـــته شـــده باشند. به عنوان نمونه نام‌های **فارابی** و **رازی** را مشخص کرده‌ایم. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌ماند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان نامی ایران به‌دست می‌آید. نام و زندگی‌نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

د	ر	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ط	ا
م	چ	ب	ه	ز	ا	د	س	ب	ل
م	و	ل	و	ی	ع	چ	ن	ر	د
ن	م	ن	س	ط	ک	س	ا	ی	ی
ف	ا	ر	ا	ب	ی	ع	ی	د	ب
ر	ی	ر	ب	ن	ی	م	ی	ن	ظ
د	خ	ح	ا	ح	ی	ر	ی	ج	ف
و	ر	ی	م	ز	ر	ا	و	خ	ا
س	م	ک	ا	ی	م	ا	ظ	ن	ح
ی	ع	ر	ا	ی	ش	و	ک	ی	ی

نام‌های مشاهیر:
فارابی، رازی، عمر خیام، ابن‌سینا، خوارزمی، نیریزی، بهزاد، طبری، بیدل، مولوی، حافظ، سنایی، کسایی، فردوسی، کوشیار، بیرونی، نظامی، خجندی، عسجدی، عطار



احسان یارمحمدی





نگاهی به فیلم اتاق فرما

کلیدواژه‌ها: اتاق فرما، لوئیز پیدراهیتا، کریستین گلدباخ، جرج کانتور، کورت گودل، پاسکال، هیلبرت، فیثاغورس

اسم فیلم: اتاق فرما ● **کارگردانان:** لوئیز پیدراهیتا[1] و رودریگو سوپنا[2] ● **تهیه‌کنندگان:** سزار بنیتز[3]، آدولفو بلانکو[4] و خوزه ماریا ایریساری[5] ● **نویسندگان:** لوئیز پیدراهیتا و رودریگو سوپنا ● **بازیگران:** آلخو ساآوراس[6]، النا بالستروس[7]، لوئیز هومَر[8]، سانتی میلان[9] و فدریکو لوپی[10] ● **موسیقی:** فدریکو خوسید[11] ● **فیلم‌برداری:** میگوئل آنخل آموادو[12] ● **تدوین:** خورخه ماکایا[13] ● **تاریخ اکران:** هفتم اکتبر ۲۰۰۷ ● **محصول:** اسپانیا

بدون این اثبات جهان خواهد ماند

فیلم با صحنه‌ای آغاز می‌شود که در آن ریاضی‌دان جوانی در حال توضیح دادن حدسی دربارهٔ نظریهٔ اعداد است که توسط **کریستین گولدباخ**[14] (۱۷۶۴-۱۶۹۰) در سال ۱۷۴۲ به دنیای ریاضیات وارد شد. در این صحنه ریاضی‌دان جوان برای تعدادی از دانشجویان بیان می‌کند که هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول بیان کرد. او برای درک بهتر این موضوع، مثال‌های ۱۱+۷=۱۸، ۱۹+۵=۲۴ و ۳۷+۱۳=۵۰ را ارائه می‌کند. دو دانشجو نیز از او می‌خواهند که برای اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰ نیز حدس گلدباخ را ارائه کند و او در پاسخ این جواب‌ها را به ایشان ارائه می‌کند: ۸۳+۱۷=۱۰۰ و ۵۲۱+۴۷۹=۱۰۰۰.

در نهایت هم به پلاک اتومبیل خود که عددی زوج است، اشاره می‌کند و آن را به صورت ۵۱۱۹+۱۹۹۳=۷۱۱۲ برای آنها تحلیل می‌کند.

در ادامهٔ گفت‌وگو، او به دانشجویان می‌گوید که استفاده از حدس گلدباخ برای اعداد با مقادیر بزرگ کار بسیار دشواری است و نیز بی‌شماری عددها و نبود قانون و قاعده‌ای کلی برای استفاده از این حدس، به دشواری آن می‌افزاید. در واقع، ریاضی‌دان جوان روی اثبات این حدس و ارائهٔ آن به عنوان یک قضیه کار می‌کند و قرار است در تاریخ بسیار نزدیکی از اثبات خود برای این قضیه دفاع کند. اما ناگهان با مراجعه به دفتر کارش درمی‌یابد که اتاقش مورد حمله قرار گرفته و تمام زحماتش برای ارائهٔ عمومی این حدس در قالب قضیه، برباد رفته است. برای اثبات مجدد آن نیز به وقت کافی نیاز دارد و نمی‌تواند آن را در تاریخی که از پیش تعیین شده است، آماده کند.

در صحنهٔ بعدی این فیلم که به چهار ماه بعد اشاره دارد، ریاضی‌دان کهن‌سالی را مشاهده می‌کنیم که در حال بازی شطرنج با یکی از دوستانش است و دوست او اصرار دارد که این ریاضی‌دان ریاضیات را رها کند؛ چون تعداد زیادی از ریاضی‌دانان بااستعداد و نابغه، مانند **جورج کانتور**[15] (۱۹۱۸-۱۸۴۵)، **یوتاکا تانیاما**[16] (۱۹۵۸-۱۹۲۷) و **کورت گودِل**[17] (۱۹۷۸-۱۹۰۶)، سرانجام دیوانه و

شـیدا شـدند. در ادامـه، ریاضی‌دان کهن‌سـال نامـه‌ای را برای دوسـتش می‌خوانـد که دربرگیرنـدهٔ معمایی به امضای شـخصی با نام مستعار **فرما**[18] اسـت. در این نامه اشاره شده است که اگر او بتواند به این معما پاسـخ درست و مناسب بدهد، اجازه دارد در جلسه‌ای که در آخر هفته پیرامون مبتکرانه‌ترین نظریه‌های ریاضی تشـکیل می‌شـود، شرکت کند.

(معمای مطرح شده در نامه به این صورت است: رابطهٔ بین اعداد ۱، ۳، ۷، ۶، ۸، ۹، ۲، ۴، ۵ را پیدا کنید.)

در صحنـه‌ای دیگر از ایـن فیلم، ریاضی‌دان دیگری را مشاهده می‌کنیم که به سبب دریافت نامه‌ای مشابه نامهٔ مزبـور، در حال بررسـی معمـا و ارائهٔ راه‌حـل برای آن اسـت. در این هنگام همکارش به او می‌گوید اگر خواسـتی اتـاق را تـرک کنی، کتاب‌هـای مورد اسـتفاده‌ات را براسـاس حـروف الفبا مرتب کن.

این راهنمایی ناخواسـته جرقه‌ای در ذهن او می‌زند: «این اعداد براساس حروف الفبـا ارائه شـده‌اند و بین آنها فقط همین رابطـه وجود دارد» (چون ایـن فیلم به زبان اسـپانیایی اسـت، ارائهٔ متـرادف لغوی برای اعداد در این معما براسـاس مترادف اسپانیایی برای آنهاست).

در ادامـهٔ فیلم، چهـار ریاضی‌دان را مشـاهده می‌کنیـم کـه توانایـی پاسـخ‌گویی به این معما را داشـته‌اند. آنها در دعوت‌نامه‌ای به امضای فرما به نام‌های مستعار **پاسکال**[19]، **هیلبرت**[20]، **اُلیوا**[21] و **گالویس**[22] نامیده شـده‌اند. در این دعوت‌نامه از آنها خواسـته شـده اسـت، از آوردن تلفن همراه به جلسه و فاش‌کردن هویـت واقعی خود برای سـایر مهمانان جلسه خودداری کنند.

آنان اکنون با قایقی به نام **فیثاغورس**[23] در حال عبور از رودخانه‌ای هسـتند تا به محل تشـکیل جلسه که درون یک انباری است، برسند.

بعد از مـدت کوتاهی که به محل جلسه می‌رسند، شخصی وارد می‌شود و خـود را فرما معرفـی می‌کند و آنها مشغول گفت‌وگو می‌شوند. دقایقی بعد تلفن همراه فرمـا زنگ می‌خورد! فرما بعـد از پاسـخ‌گویی می‌گوید که ناچار است برای رسیدگی به وضعیت دختر بستری شدهٔ خود در بیمارستان، جلسه را ترک کند. لحظاتی پس از رفتن فرما، آنها پیامـی را در قالب یـک پیام‌گیر دریافت می‌کنند که در آن بیان شـده است:

ـ شـما یک دقیقه وقـت دارید به این معما پاسـخ دهید: «فروشـنده‌ای سـه جعبه آبنبات دارد که یکی از آنها حاوی آبنبات نعنایـی، دیگری حاوی آبنبات مغزدار و سومی دارای مخلوطی از آبنبات‌های نعنایی و مغزدار اسـت. روی هر جعبه با برچسـب نوشته شده اسـت: آبنبات نعنایی، آبنبات مغزدار و آبنبـات مخلوط نعنایی و مغزدار. البته فروشنده می‌گوید که جعبه‌ها اشتباهی نام‌گـذاری شـده‌اند. کمتریـن تعداد آبنبات‌هایی را که فروشـنده می‌باید از داخـل جعبه‌ها بیـرون آورد تا بفهمد کـه محتوی هر جعبه شـامل چه نوع آبنباتی است، مشخص کنید.

بعد از مطرح شـدن این معما، آنها متوجـه می‌شـوند که اگـر ظرف یک دقیقـه نتوانند به آن پاسـخ درسـت بدهنـد، اتاقـی که در آن قـرار دارند، کوچـک و کوچک‌تـر می‌شـود و این موضوع با ارائهٔ معماهای بعدی مجدداً نیز تکرار می‌شود. در آخر هم اتاقی که در آن محبوس شده‌اند، به یک قوطی کبریت شـبیه خواهد شد. در حقیقت

آنهـا در مخمصه‌ای قـرار گرفته‌اند که در نهایت به از دسـت رفتن جان آنها می‌انجامد. با به‌وجود آمدن خطر مرگ، آنها به اقداماتی بـرای فرار از اتاق و یا تغییر چیدمـان مبلمان و اثاثهٔ داخل اتاق برای جلوگیری از کوچک‌تر شدن آن دسـت می‌زننـد. ولـی تمامی این کارها بی‌فایده است.

در حیـن رخ دادن ایـن اتفاقات و نیز بحث و گفت‌وگوهای متنوع دربارهٔ علـت و چگونگـی رخداد ایـن ماجرا، پاسـکال با مطالعهٔ کتابـی که از یکی از قفسـه‌های کتاب برداشـته اسـت، متوجه می‌شـود، اختصاص آن نام‌های مسـتعار به آنها دلیل داشـته اسـت: ریاضی‌دانان مشهور، **اِواریسته گالویس** (۱۸۳۲-۱۸۱۱)، **لوئیـس دِ اُلیـوا سـابوکو**[24] و **بلـز پاسـکال**[25] (۱۶۶۲-۱۶۲۳)، در سـنی جان به جان آفرین تسلیم کرده‌اند که هر یک از آنها که در این اتاق با نام گالویس، اُلیوا و پاسکال شناخته می‌شوند، در حال حاضر در آن سـن قرار دارند و قرار است در همین سن و در همین اتاق بمیرند.



سپس با بررسـی کارت شناسایی واقع در کت شـخصی که آن را هنگام ترک اتاق جا گذاشـت و نام مسـتعار «فرما» را با خود به یدک می‌کشـید، متوجه می‌شوند که سن او با سنی که ریاضی‌دان نامی **پیر دِ فرما**[26] (۱۶۶۵-۱۶۰۱) بـه هنگام مرگ داشـته، یکی است.

در اواخر فیلم آنها متوجه می‌شوند کـه تمام این ماجرا و دردسـرهای آن، متوجـه ریاضی‌دانی اسـت کـه با نام مسـتعار هیلبرت در این جلسه حضور دارد. در واقع، او همان کسـی است که نظریهٔ ریاضی‌دان جوان را در ابتدای فیلم نابود کرده اسـت. هیلبرت مدت زیادی برای اثبات حدس گلدباخ کوشیده، اما

متوجه شده است که این ریاضی‌دان جوان نیز روی آن کار می‌کند. به علاوه، تمام روزنامه‌ها و مجلات توجه خود را به این جوان معطوف کرده‌اند و عکس او را به عنوان کسی که قرار است اثباتی برای این حدس ارائه کند، به تصویر کشیده‌اند.

بعد از مرور ماجراها و واقعیات پیرامون این ملاقات، هیلبرت خود را به عنوان اولین کسی معرفی می‌کند که حدس گلدباخ را اثبات کرده است. ریاضی‌دان جوان از این موضوع عصبانی می‌شود و با مشت ضربه‌ای به صورت هیلبرت می‌زند. هیلبرت به زمین می‌افتد و سرش به پایهٔ صندلی می‌خورد و بیهوش می‌شود. پاسکال به ریاضی‌دان جوان می‌گوید که هیلبرت تا همین دقیقهٔ آخر داشت به فرار فکر می‌کرد. علاوه بر این، تمامی ما در سنی خواهیم مرد که ریاضی‌دانان شهیر، پاسکال، اُلیوا و گالویس دارفانی را وداع گفته‌اند. اما **دیوید هیلبرت**[27] ریاضی‌دان در سن ۸۰ سالگی بدرود حیات گفت. این در حالی است که شخص با نام مستعار هیلبرت که در بین ماست، در این سن قرار ندارد. بنابراین او قصد فرار داشته و در این‌جا نیز راهی برای گریز از این تنگنا که توسط وی قبلاً آماده شده است، وجود دارد. سپس آنها متوجه تختهٔ سیاهی می‌شوند که روی آن کلمهٔ «آزادی» نوشته شده است. قهرمانان داستان با شکستن این تخته و فرار از داخل آن اتاق پردردسر، از این ماجرا جان سالم به‌در می‌برند.



در پایان فیلم، هنگامی که پاسکال، اُلیوا و گالویس با قایق در مسیر برگشت هستند، پاسکال اثبات ارائه شده توسط هیلبرت را که به همراه خود دارند، به داخل رودخانه می‌اندازد و خاطرنشان می‌کند که بدون این اثبات نیز جهان همان‌گونه که بوده است، خواهد بود.

پی‌نوشت

1. Luis Piedrahita
2. Rodrigo Sopena
3. Cesar Benitez
4. Adolfo Blanco
5. Jose Maria Irisarri
6. Alejo Sauras
7. Elena Ballestros
8. Lluis Homar
9. Santi Millan
10. Federico Luppi
11. Federico Jusid
12. Miguel Angel Amoedo
13. Jorge Macaya
14. Christian Goldbach
15. George Cantor
16. Yutaka Taniyama
17. Kurt Godel
18. Fermat
19. Pascal
20. Hilbert
21. Oliva
22. Galois
23. Pythagoras
24. Luisa de Oliva Sabuco
25. Balse Pascal
26. Pierre de Fermat
27. David Hilbert

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!



در این‌جا بد نیست با خواندن چند لطیفهٔ ریاضی تغییر ذائقه دهیم! البته حتماً انتظار ندارید که این لطیفه‌ها شبیه لطیفه‌هایی باشند که در بعضی سایت‌های رایانه‌ای و یا در پیامک‌هایتان می‌بینید. ولی ظرایفی در آنها نهفته است که به یک‌بار خواندن آنها حتماً می‌ارزد.

● روزی سه نفر، یک مهندس مکانیک، یک ریاضی‌دان و یک مهندس رایانه، سوار بر خودرو به پیک‌نیک می‌رفتند که خودرویشان در جایی خراب شد و متوقف شدند. مهندس مکانیک گفت: «بهتر است بروم درب موتور را بزنم بالا و نگاهی به موتور بکنم، شاید بتوانم کاری بکنم.»



ریاضی‌دان گفت: «حدود یک کیلومتر مانده به اینجا، یک پمپ بنزین دیدم. بهتر است برگردیم به همان نقطه و دوباره این مسیر را بیاییم تا ببینیم علت خرابی ماشین چه بوده است!»

و مهندس رایانه گفت: «احتیاج به این کارها نیست. بهتر است همگی پیاده شویم و دوباره سوار شویم و درها را باز و بسته کنیم و ماشین را روشن کنیم و برویم!

● روزی دو نفر سوار بر بالن در آسمان پرواز می‌کردند که ناگهان ابری عظیم جلویشان سبز شد. به داخل ابر رفتند و مسیر خود را گم کردند. وقتی از ابر بیرون آمدند، بالای قلهٔ کوهی بودند و از بالا مردی را دیدند که روی قله نشسته و در حال فکر کردن است. یکی از آنها به مرد گفت: «هِی آقا ما الان کجا هستیم؟»

مرد جوابی نداد و دوباره ابر آمد و آنها را در خود فرو برد. مدتی گذشت و آنها از ابر بیرون آمدند و دوباره همان مرد را در حال تفکر دیدند. باز از او پرسیدند: «آقا، ما الان کجا هستیم؟»

مرد سرش را بلند کرد و گفت: «شما در بالن هستید!»

یکی از دو بالن‌سوار به دیگری گفت: «شرط می‌بندم این مرد ریاضی‌دان است!»

دیگری پرسید: چرا؟ و او گفت: «به سه دلیل: اولاً خیلی فکر کرد تا جواب بدهد، ثانیاً ساده‌ترین جواب ممکن را داد، ثالثاً اصلاً به کاربرد جوابی که داد فکر نکرد!»

ویژهٔ دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم ریاضی



آموزشی

هوشنگ شرقی



دنباله‌ها

دنباله‌های حسابی و هندسی

کلیدواژه‌ها: دنباله حسابی، دنبالهٔ هندسی، قانون دنباله، جملهٔ عمومی، دنبالهٔ بازگشتی، قدرنسبت، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی

تعریف دنباله

مفهوم دنباله، یک تعریف دقیق ریاضی و یک تعریف ساده و نادقیق دارد. در این‌جا ترجیح داده‌ایم که با تعریف ساده شروع کنیم: «از به دنبال هم قرار دادن تعدادی (متناهی یا نامتناهی) شیء در یک ردیف، یک دنباله از اشیا به‌دست می‌آید»؛ مانند دنبالهٔ زیر که شامل ۱۰ حرف الفبای انگلیسی است:

$a, b, a, c, d, f, e, f, g, i$

چنان‌چه ملاحظه می‌شود، اعضای دنباله می‌توانند تکراری هم باشند و هیچ نظم و قاعده‌ای هم در چینش آنها وجود نداشته باشد. حتی ممکن است همهٔ اعضای دنباله یکسان باشند. چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ ثابت می‌نامیم؛ مانند دنبالهٔ ثابت و نامتناهی زیر که همهٔ اعضای آن عدد ثابت ۲ هستند:

$۲, ۲, ۲, ۲, ...$

اگر اعضای دنباله عددهای حقیقی باشند، دنباله را «دنباله عددی» می‌نامیم؛ مانند دنبالهٔ عددی زیر:

$-۱, ۱, \sqrt{۲}, ۵, ۳, ۱, ۳, ۳, ۲, ۰, ۳, ۵, \sqrt{۳}, -۲, \frac{۱}{۵}$

که ۱۵ عضو (جمله) دارد. جملات دنباله را با نماد a_n یا b_n یا t_n و... نمایش می‌دهیم که n شمارهٔ جمله‌هاست. مثلاً در دنبالهٔ فوق داریم:

$a_۱ = -۱ , a_۲ = ۱ , a_۷ = ۳, ...$

قانون یا ضابطهٔ دنباله

هرگاه اعضای دنباله با قانون یا ضابطهٔ خاصی، از روی شمارهٔ جمله‌ها یا از روی جملات قبلی به‌دست آیند، دنباله دارای ضابطه است. مثلاً به دنبالهٔ متناهی زیر که ۱۰ جمله دارد، دقت کنید:

$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱, ۱۰۰$

با کمی دقت روشن می‌شود که هر جملهٔ دنباله، مربع شمارهٔ جمله است. یعنی جمله اول $۱^۲$، جملهٔ دوم $۲^۲$، جملهٔ سوم $۳^۲$ و... است. پس جملهٔ nام دنباله، $n^۲$ است: $a_n = n^۲$. تساوی یاد شده را ضابطه یا قانون دنباله می‌نامیم و به a_n جملهٔ عمومی دنباله می‌گوییم.

مثال ۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ نامتناهی زیر $\frac{۱}{n}$ است:

$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, ...$

مثال ۲. جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید:

الف) $۱, ۸, ۲۷, ۶۴, ...$

ب) $۱, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۱۶}, ...$

ج) $۰, ۶, ۲۴, ۶۰, ۱۲۰, ...$

د) $۱, ۲, ۵, ۱۲, ۲۷, ۵۸, ...$

هـ) $\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{-۱}{۳۲}, ...$

جواب:

الف) $a_n = n^۳$ ب) $a_n = \frac{۱}{n^۲}$ ج) $a_n = n^۳ - n$

د) $a_n = ۲^n - n$ هـ) $a_n = \frac{(-۱)^n}{۲^n}$



مثال ۳. جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر داده شده است. پنج جملهٔ نخست هر دنباله را بنویسید و دنباله را تشکیل دهید.

الف) $a_n=\frac{n}{n+1}$ ب) $a_n=\frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

ج) n^2-2n

حل:

الف) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},...$

ب) $0,\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{5}{17},\frac{2}{13},...$

ج) $-1,0,3,8,15,...$

مثال ۴. دنبالهٔ $a_n=\frac{n^2}{2n-3}$ مفروض است. اولاً، جملات دهم و بیستم این دنباله را مشخص کنید. ثانیاً، چندمین جمله از این دنباله مساوی ۴ است؟ ثالثاً، آیا این دنباله جمله‌ای مساوی ۲- دارد؟

حل:

اولاً: $a_{10}=\frac{10^2}{2\times10-3}=\frac{100}{17},\ a_{20}=\frac{20^2}{2\times20-3}=\frac{400}{37}$

ثانیاً: $a_n=4\Rightarrow\frac{n^2}{2n-3}=4\Rightarrow n^2=8n-12$

$\Rightarrow n^2-8n+12=0\Rightarrow(n-6)(n-2)=0\Rightarrow n=6$

یا $n=2$

یعنی دو جمله از این دنباله مساوی ۴ هستند.

$a_6=a_2=4$

ثالثاً:

$a_n=-2\Rightarrow\frac{n^2}{2n-3}=-2$

$\Rightarrow n^2=-4n+6\Rightarrow n^2+4n-6=0$

$\Delta=16-4(1)(-6)=40$

$\Rightarrow n=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{2}=-2\pm\sqrt{10}\notin N$

ولی روشن است که باید $n\in N$. بنابراین هیچ جمله‌ای از دنباله مساوی ۲- نیست.



مثال ۵. دنبالهٔ $a_n=\frac{2n+3}{n+1}$ مفروض است. اولاً، پنج جملهٔ نخست این دنباله را بنویسید و دنباله را با اعضای آن نمایش دهید. ثانیاً، نشان دهید که این دنباله یک دنبالهٔ نزولی است (یعنی جملات آن مرتباً کوچک‌تر می‌شوند) و حدس بزنید که این جملات به چه عددی نزدیک می‌شوند. ثالثاً، حداقل چند جمله از این دنباله را بنویسیم تا فاصلهٔ جملات این دنباله از ۲، کمتر از ۰/۰۱ شود.

حل:

اولاً: $\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{9}{4},\frac{11}{5},\frac{13}{6},...$

ثانیاً، برای اینکه نشان دهیم دنبالهٔ فوق نزولی است، کافی است نشان دهیم که هر جمله، از جملهٔ ماقبل خود کوچک‌تر است؛ یعنی $a_{n+1}<a_n$.

و یا اینکه:

$\frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1}<\frac{2n+3}{n+1}$

که معادل است با نامساوی $\frac{2n+5}{n+2}<\frac{2n+3}{n+1}$ و آن هم معادل است با نامساوی $(2n+5)(n+1)<(2n+3)(n+2)$ و یا $2n^2+7n+5<2n^2+7n+6$ که واضح است. با ملاحظهٔ جملات دنباله درمی‌یابیم که این جمله‌ها به عدد ۲ نزدیک می‌شوند.

ثالثاً، برای آنکه فاصلهٔ جملات دنباله از عدد ۲ کمتر از ۰/۰۱ باشد، با توجه به اینکه جملات دنباله همگی بزرگ‌تر از ۲ هستند (چرا؟) باید داشته باشیم: $2<a_n<2/01$. بنابراین:

$2<\frac{2n+3}{n+1}<2/01\Rightarrow2n+2<2n+3<2/01n+2/01$

$\Rightarrow0/01n>0/99\Rightarrow n>99$

یعنی باید حداقل ۱۰۰ جمله بنویسیم تا به جمله‌ای برسیم که فاصلهٔ آن تا ۲ کمتر از ۰/۰۱ شود:

$a_{100}=\frac{203}{101}\approx2/0099<2/01$

دنباله‌های بازگشتی

گاهی ضابطهٔ یک دنباله از روی جملات قبلی نوشته می‌شود. یعنی هر جمله، با قانونی مشخص برحسب جمله (یا جملات قبل) به‌دست می‌آید. مثلاً به دنبالهٔ زیر توجه کنید:

$1,3,7,15,31,63,...$

با کمی دقت درمی‌یابید که هر جمله برابر است با دو برابر جملهٔ قبل به اضافهٔ ۱؛ یعنی: $a_n=2a_{n-1}+1$ و $a_1=1$. چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ بازگشتی می‌نامیم. با کمی



دقت می‌بینیم که دنبالهٔ فوق دستور مستقیمی برحسب n نیز دارد: $a_n = ۲^n - ۱$. یعنی دنباله‌های بازگشتی ممکن است به صورت مستقیم هم برحسب n دارای جملهٔ عمومی باشند.

مثال ۱. دنبالهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-1} + ۲^n$ و $a_۱ = ۲$ مفروض است. پنج جملهٔ نخست دنباله را بنویسید.

حل:

$a_۲ = a_۱ + ۲^۲ = ۲ + ۴ = ۶$

$a_۳ = a_۲ + ۲^۳ = ۶ + ۸ = ۱۴$

$a_۴ = a_۳ + ۲^۴ = ۱۴ + ۱۶ = ۳۰$

$a_۵ = a_۴ + ۲^۵ = ۳۰ + ۳۲ = ۶۲$

$۲, ۶, ۱۴, ۳۰, ۶۲, ...$

مثال ۲. دنبالهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-1}.a_{n-2} + ۱$ و $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ مفروض است. این دنباله را تشکیل دهید.

حل:

$a_۳ = a_۱a_۲ + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$

$a_۴ = a_۲a_۳ + ۱ = ۲ \times ۳ + ۱ = ۷$

$a_۵ = a_۳a_۴ + ۱ = ۲۲$

$۱, ۲, ۳, ۷, ۲۲, ۱۵۵, ...$

دنبالهٔ فیبوناچی

یکی از معروف‌ترین دنباله‌ها، دنبالهٔ بازگشتی منسوب به **لئوناردو فیبوناچی** (ریاضی‌دان ایتالیایی قرن سیزدهم) است. در این دنباله، جملات اول و دوم مساوی ۱ و هر جمله مساوی مجموع دو جملهٔ ماقبل است: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ و $a_۱ = a_۲ = ۱$

$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...$

این دنباله ویژگی‌های بسیاری دارد که در این مقالهٔ مختصر نمی‌توان به آنها پرداخت. علاقه‌مندان را به کتاب‌ها و مقالات متعددی که در این‌باره وجود دارد، رجوع می‌دهیم. در اینترنت و سایت‌های ریاضی هم مطالب بسیاری دربارهٔ این دنباله وجود دارد.

دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای را که هر جملهٔ آن با افزودن مقداری ثابت به جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید، یعنی $a_n = a_{n-1} + d$، «دنبالهٔ حسابی» می‌نامیم؛ مانند این دنباله:

$۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...$

که هر جملهٔ آن مساوی جملهٔ قبل به اضافهٔ ۳ واحد است؛ یعنی $d = ۳$. مقدار ثابت (d) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. اگر $d = ۰$ باشد، دنبالهٔ ما، دنباله‌ای ثابت است. اما اگر $d > ۰$ باشد، دنباله صعودی و اگر $d < ۰$ باشد، دنباله نزولی خواهد بود.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی

اگر $a_۱$ جملهٔ نخست و d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، بدیهی است که داریم:

$$a_۲ = a_۱ + d\ ,\ a_۳ = a_۲ + d = a_۱ + ۲d\ ,\ a_۴ = a_۱ + ۳d, ...$$

و به طریق استقرایی حدس می‌زنیم که:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

براساس این دستور مسائل زیادی را در زمینهٔ دنباله‌های حسابی می‌توان مطرح و حل کرد.

مثال ۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر و جملهٔ هزار و سیصد و نود و یکم آن را بنویسید:

$۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ...$

حل:

$$a_۱ = ۲, d = ۴ \Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۲ + (n-۱)۴$$

$$\Rightarrow a_n = ۴n - ۲, a_{۱۳۹۱} = ۴ \times ۱۳۹۱ - ۲ = ۵۵۶۲$$

مثال ۲. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که جملهٔ هفتم آن ۲۳ و جملهٔ دوازدهم آن ۳۸ باشد.

حل:

$$\begin{cases} a_۷ = a_۱ + ۶d = ۲۳ \\ a_{۱۲} = a_۱ + ۱۱d = ۳۸ \end{cases} \Rightarrow ۵d = ۱۵\ , d = ۳,\ a_۱ = ۵$$

$۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...$

مثال ۳. لااقل چند جمله از دنبالهٔ زیر بنویسیم تا مطمئن شویم به جمله‌ای بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ می‌رسیم؟

$-۲, ۳, ۸, ۱۳, ...$

حل: $a_۱ = -۲$ و $d = ۵$. در نتیجه:

$$a_n = -۲ + (n-۱)۵ = ۵n - ۷\ ,\ a_n > ۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۵n - ۷ > ۱۰۰۰ \Rightarrow n > \frac{۱۰۰۷}{۵} \Rightarrow \min(n) = ۲۰۲$$

یعنی از جملهٔ دویست و دوم به بعد، جملات بزرگ‌تر از هزار هستند.



مثال ۴. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که جملهٔ هفتم آن سه برابر جملهٔ چهارم آن و حاصل‌ضرب جملات سوم و چهارم آن دو واحد بیشتر از جملهٔ پنجم آن باشد.

حل:
$$a_۷=a_۱+۶d,\ a_۴=a_۱+۳d,\ a_۳=a_۱+۲d,$$
$$a_۵=a_۱+۴d,\ a_۷=۳a_۴,\ a_۳.a_۴=a_۵+۲$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a_۱+۶d=۳(a_۱+۳d)\Rightarrow a_۱+۶d=۳a_۱+۹d\\ \qquad\Rightarrow ۲a_۱=-۳d\\ (a_۱+۲d)(a_۱+۳d)=a_۱+۴d+۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow(-\frac{۳d}{۲}+۲d)(-\frac{۳d}{۲}+۳d)=-\frac{۳d}{۲}+۴d+۲$$
$$\Rightarrow\frac{d}{۲}\times\frac{۳d}{۲}=\frac{۵d+۴}{۲}\Rightarrow ۳d^۲=۱۰d+۸\Rightarrow ۳d^۲-۱۰d-۸=۰$$
$$\Rightarrow d=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰+۹۶}}{۶}\Rightarrow d=۴ \text{ یا } d=-\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow(d=۴,\ a_۱=-۶)\text{ یا }(d=-\frac{۲}{۳},a_۱=۱)$$

بنابراین دو دنبالهٔ حسابی با ویژگی فوق می‌توان نوشت:
$$\begin{cases}-۶,-۲,۲,۶,...\\ ۱,\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۳},-۱,...\end{cases}$$

واسطه‌های حسابی

اگر a، b و c به ترتیب جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، طبق تعریف داریم:
$$b-a=c-b=d\ \text{(قدرنسبت)}$$
$$\Rightarrow ۲b=a+c,\ b=\frac{a+c}{۲}$$

پس رابطهٔ $۲b=a+c$ همان شرط آن است که a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند و $b=\frac{a+c}{۲}$ نیز واسطهٔ حسابی بین a و c نامیده می‌شود؛ یعنی عددی که اگر بین دو عدد دیگر قرار گیرد، سه عدد دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. پس واسطهٔ حسابی بین دو عدد، همان میانگین آنهاست.

مثال ۵. m را طوری به‌دست آورید که سه عدد $۲m-۱$، $۳m+۱$ و ۷m دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

حل: مطابق دستور گفته شده می‌توان نوشت:
$$۲(۳m+۱)=۲m-۱+۷m\Rightarrow ۶m+۲=۹m-۱$$
$$\Rightarrow ۳m=۳,\ m=۱$$

واسطه‌های حسابی بین دو عدد

هرگاه بین دو عدد a و b بتوان m عدد قرار داد که همهٔ این عددها (همراه با a و b) یک دنبالهٔ حسابی را تشکیل دهند، این m عدد را واسطه‌های حسابی بین a و b می‌نامیم. در این صورت به سادگی می‌توان ثابت کرد که قدرنسبت این دنباله از دستور $d=\frac{b-a}{m+۱}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۶. بین دو عدد ۳ و ۳۱، شش واسطهٔ حسابی پیدا کنید.

حل:
$$d=\frac{۳۱-۳}{۶+۱}=\frac{۲۸}{۷}=۴$$

در نتیجه:
$$۳,\underbrace{۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,۲۷}_{\text{واسطه‌های حسابی}},۳۱$$

مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی

برای یافتن مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ نخست $a_۱$ و قدرنسبت d، از روش زیر که نخستین بار توسط **گاوس**، ریاضی‌دان آلمانی، به‌کار گرفته شد استفاده می‌کنیم:
$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+...+a_n$$
$$\Rightarrow\begin{cases}S_n=a_۱+(a_۱+d)+(a_۱+۲d)+...+a_۱+(n-۱)d\\ S_n=a_۱+(n-۱)d+a_۱+(n-۲)d+a_۱+(n-۳)d\\ \qquad+...+a_۱\end{cases}$$

و از جمع جمله به جملهٔ دو تساوی بالا نتیجه می‌شود:
$$۲S_n=[۲a_۱+(n-۱)d]+[۲a_۱+(n-۱)d]+...+[۲a_۱+(n-۱)d]$$
$$\Rightarrow ۲S_n=n[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$$

و با توجه به تساوی $a_n=a_۱+(n-۱)d$ می‌توان این دستور را به صورت $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ نیز نوشت.

مثال ۷. مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:
$$۱,۴,۷,۱۰,...\qquad a_۱=۱,\ d=۳$$

حل:
$$S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}[۲+۹۹\times۳]=۵۰\times۲۹۹=۱۴۹۵۰$$

مثال ۸. یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهید که مجموع ۸ جملهٔ نخست آن ۵۰ و مجموع ۸ جملهٔ بعدی آن ۱۴۶ باشد.

حل:
$$S_۸=۵۰,\ S_{۱۶}-S_۸=۱۴۶\Rightarrow S_{۱۶}=۱۹۶$$
$$\frac{۸}{۲}[۲a_۱+۷d]=۵۰\Rightarrow ۴a_۱+۱۴d=۲۵$$
$$\frac{۱۶}{۲}[۲a_۱+۱۵d]=۱۹۶\Rightarrow ۴a_۱+۳۰d=۴۹$$
$$-\begin{cases}۴a_۱+۱۴d=۲۵\\ ۴a_۱+۳۰d=۴۹\end{cases}\Rightarrow d=\frac{۳}{۲},a_۱=۱\Rightarrow ۱,\frac{۵}{۲},۴,...$$

مثال ۹. مجموع چند جمله از دنبالهٔ زیر برابر ۱۵۵ است؟
۲, ۵, ۸, ...

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2\times 2+(n-1)3\right]=155$$

$$\Rightarrow n(3n+1)=310 \Rightarrow 3n^2+n-310=0$$

$$\Rightarrow n=\frac{-1\pm\sqrt{3721}}{6}=\frac{-1\pm 61}{6}\Rightarrow n=10 \text{ یا } n=\frac{-31}{3}\notin N$$

بنابراین، مجموع ۱۰ جملهٔ نخست از این دنباله مساوی ۱۵۵ است.

مثال ۱۰. حداقل چند عدد از نخستین عددهای طبیعی را باید جمع کنیم تا مجموع آنها از ۱۰۰۰ تجاوز کند؟

حل:

$$S_n = 1+2+3+...+n=\frac{n}{2}\left[2\times 1+(n-1)\times 1\right]=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}>1000 \Rightarrow n^2+n>2000$$

$$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>2000$$

$$\Rightarrow (n+\frac{1}{2})^2>2000+\frac{1}{4}\Rightarrow n+\frac{1}{2}>\sqrt{2000+\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow n>\sqrt{2000+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

و بـا توجه به مقـدار تقریبـی $\sqrt{2000+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$ نتیجه می‌گیریـم که حداقل مقدار طبیعی n بـرای آنکه از این عدد بزرگ‌تر شود، $n=45$ اسـت. یعنی باید لااقل ۴۵ جمله را با هم جمع کنیم. با توجه به مقادیر S_{44} و S_{45} درسـتی عمل ما مشخص می‌شود:

$$S_{44}=\frac{44\times 45}{2}=22\times 45=990$$

$$S_{45}=\frac{45\times 46}{2}=45\times 23=1035$$

تمرین

۱. اگر a و b و c یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، ثابت کنید.

الف) $a^2+8bc=(2b+c)^2$ ب) $3(a^2+b^2+c^2)=6(a-b)^2+(a+b+c)^2$

۲. یک دنبالهٔ حسابی بنویسید که جملهٔ اول آن ۱ و مجموع ۵ جملهٔ اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی باشد (جواب: $1, -2, -5, ...$).

۳. بین دو عدد ۳ و ۲۰ ، پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی



ادامهٔ ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی!

● روزی گروهی از مهندسـان تـلاش می‌کردند که ارتفاع یـک میلهٔ پرچـم را اندازه بگیرنـد. آنها برای ایـن کار فقط یک متر پارچه‌ای بلند داشـتند که نمی‌توانسـتند آن را به بالای میله برسـانند. ریاضی‌دانی از آن‌جا می‌گذشت. از او خواستند به آن‌ها کمک کند. او گفت: «این‌که خیلی ساده است!»
و میله را از زمین درآورد و روی زمین گذاشت و به سادگی با آن متر پارچه‌ای طول آن را اندازه‌گیری کرد. یکی از مهندسان گفت: «این ریاضی‌دان‌ها عجب موجوداتی هسـتند! ما گفتیـم ارتفاع میله را اندازه بگیرد، او طول آن را اندازه گرفت!»



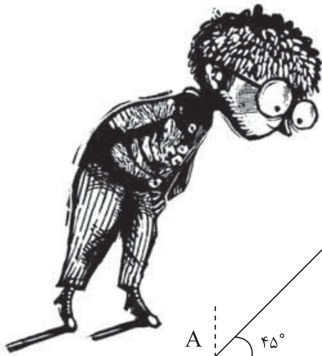
ریاضیات هنر دادن نام‌های یکسان به اشیای متفاوت است!

هنری پوآنکاره
(ریاضی‌دان فرانسوی
۱۹۱۲-۱۸۵۴)

محمدهاشم رستمی

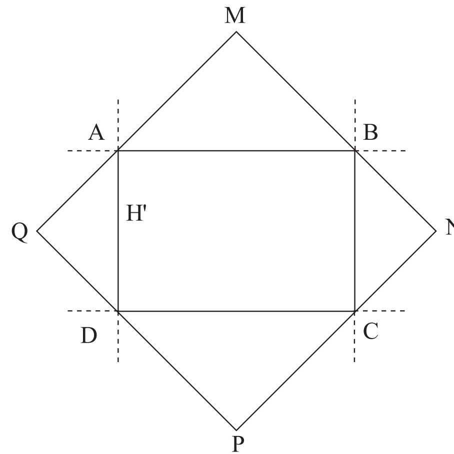


رویکرد هندسی و جبری در آموزش هندسه



کلیدواژه‌ها: رویکرد هندسی، رویکرد جبری، مختصاتی، مثلث‌قائم‌الزاویه

مسئله: مستطیل ABCD به ضلع‌های a و b داده شده است. نیم‌سازهای زاویه‌های برونی این مستطیل را رسم می‌کنیم و چهارضلعی حاصل را MNPQ می‌نامیم.



۱. ثابت کنید که چهارضلعی MNPQ مربع است.

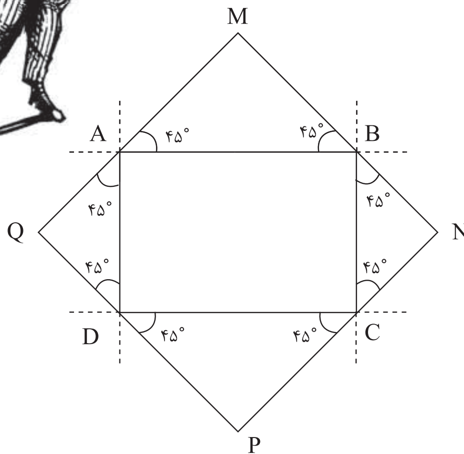
۲. اندازهٔ ضلع مربع MNPQ را برحسب a و b تعیین کنید.

مسئله را با دو رویکرد هندسی و جبری مختصاتی حل می‌کنیم:

الف) حل به روش هندسی

۱. می‌دانیم که زاویه‌های درونی مستطیل ۹۰° هستند. پس زاویه‌های برونی آن نیز ۹۰°اند و در نتیجه نیم‌سازهای این زاویه‌ها آنها را به زاویه‌های مساوی ۴۵° تقسیم می‌کند؛ یعنی داریم:

$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ = \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ = ۴۵^\circ$$



از آنجا در مثلث‌های MAB، NBC، PCD و QAD داریم: $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$. یعنی این مثلث‌ها در رأس‌های M، N، P و Q قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین چهارضلعی MNPQ به دلیل قائمه بودن چهار زاویه‌اش، مستطیل است.

اکنون برای اثبات مربع بودن این چهار ضلعی کافی است ثابت کنیم که دو ضلع مجاور آن برابرند؛ یعنی برای مثال $MQ = MN$ است. به این منظور توجه می‌کنیم که دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و PCD به حالت برابری وتر و زاویه‌های حاده هم‌نهشت هستند؛ زیرا:

$$\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ \quad \text{و} \quad AB = CD = a$$

پس داریم:

$$MA = MB = PC = PD \quad (۱)$$

همچنین، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین NBC و QAD به دلیل برابری وترهایشان، یعنی $BC = AD = b$، هم‌نهشت هستند. بنابراین:

$$BN = NC = AQ = QD \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

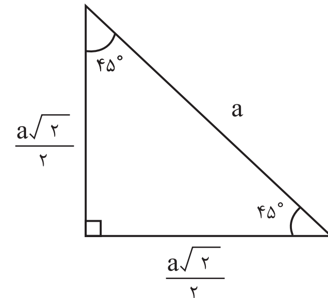
$$MA + AQ = MB + BN \Rightarrow MQ = MN$$

و به‌طور کلی‌تر:

$$MN = NP = PQ = QM$$

پس چهار ضلعی MNPQ مربع است.

۲. برای محاسبهٔ اندازهٔ ضلع مربع MNPQ برحسب اندازهٔ ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی برحسب a و b، می‌دانیم که اگر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی مساوی a باشد، اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه‌اش مساوی $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ یا $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.



بنابراین، در مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین MAB و NBC، چون $AB = a$ و $BC = b$ است، خواهیم داشت:

$$MB = MA = \frac{AB\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \quad (۱)$$

$$NB = NC = \frac{BC\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow NB = \frac{b\sqrt{۲}}{۲} \quad (۲)$$

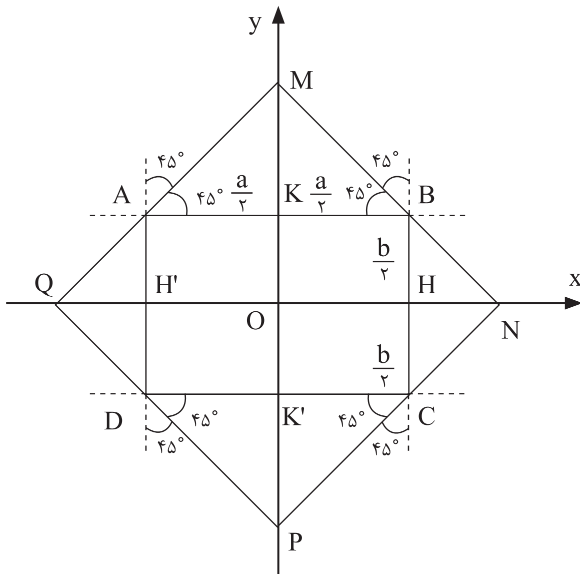
$$(۱)+(۲) \Rightarrow MB + NB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} + \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$$

و این اندازهٔ ضلع مربع MNPQ برحسب اندازهٔ ضلع‌های مستطیل ABCD، یعنی برحسب a و b است.

ب) حل به روش جبری ـ مختصاتی

۱. قطرهای مستطیل ABCD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را که مرکز تقارن مستطیل است، o می‌نامیم.



دستگاه مختصات قائم xoy را چنان اختیار می‌کنیم که محور $x'ox$ از نقطهٔ o بگذرد و با ضلع‌های AB و CD موازی باشد و محور yها از نقطهٔ o بگذرد و با ضلع‌های BC و DA موازی باشد. مبدأ این دستگاه مختصات قائم را همان نقطهٔ o، مرکز تقارن مستطیل، اختیار می‌کنیم.

با فرض این‌که $AB = CD = a$ و $BC = DA = b$ باشد، اگر نقطه‌های برخورد محور xها با BC و DA را به ترتیب H و H' و نقطه‌های برخورد محور yها با AB و CD را به‌ترتیب K و K' بنامیم، خواهیم داشت:

$$BH = HC = AH' = H'D = \frac{b}{۲}$$

$$AK = KB = DK' = K'C = \frac{a}{۲}$$

و از آنجا، معادلهٔ خط‌های AB و CD به‌صورت:

$$AB: y = \frac{b}{۲},\ CD: y = -\frac{b}{۲}$$

و معادلهٔ خط‌های BC و DA نیز به صورت:

$$BC: x = \frac{a}{۲},\ AD: x = -\frac{a}{۲}$$

خواهد بود. واضح است که مختصات رأس‌های مستطیل در این



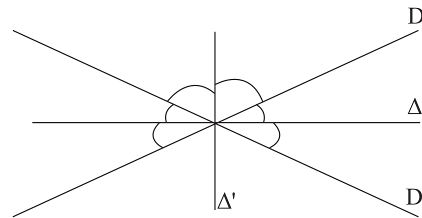




دستگاه مختصات قائم به صورت زیر است:

$$A=(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}),\ B=(\frac{a}{2},\frac{b}{2}),$$
$$C=(\frac{a}{2},-\frac{b}{2}),\ D=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$$

اکنون با توجه به این‌که معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های بیـــن دو خط $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$ به صورت $\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است، معادله‌های نیم‌ســازهای زاویه‌های درونی و برونی مســـتطیل ABCD را می‌نویسیم. داریم:



$$AB: y-\frac{b}{2}=0,\ BC: x=\frac{a}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{y-\frac{b}{2}}{\sqrt{1+0}}=\pm\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow y-\frac{b}{2}=\pm(x-\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی B

$$\Rightarrow y-\frac{b}{2}=x-\frac{a}{2} \Rightarrow y-x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی B

$$\Rightarrow y-\frac{b}{2}=-x+\frac{a}{2} \Rightarrow y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$
$$\Rightarrow MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$
$$AB: y-\frac{b}{2}=0,\ AD: x+\frac{a}{2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{y-\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}}=\pm\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow y-\frac{b}{2}=\pm(x+\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی A

$$\Rightarrow y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \Rightarrow MQ: y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی A

$$y+x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$$

به همین ترتیب، معادلات نیم‌ساز زاویه‌های درونی و برونی C و D را به‌دست می‌آوریم.

داریم:

$$BC: x=\frac{a}{2} \text{ و یا } x-\frac{a}{2}=0 \text{ و } CD: y=-\frac{b}{2} \Rightarrow y+\frac{b}{2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}}=\pm\frac{y+\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}} \Rightarrow x-\frac{a}{2}=\pm(y+\frac{b}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز NP: $\Rightarrow x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی C: $x+y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

$$DC: y=-\frac{b}{2} \Rightarrow y+\frac{b}{2}+0 \text{ و } DA: x+\frac{a}{2}=0$$
$$\Rightarrow \frac{y+\frac{b}{2}}{\sqrt{0+1}}=\pm\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{1+0}} \Rightarrow y+\frac{b}{2}=\pm(x+\frac{a}{2})$$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ درونی D: $\Rightarrow y-x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

معادلهٔ نیم‌ساز زاویهٔ برونی D یا PQ، $y+x=-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ و

به‌طوری که دیده می‌شود، نیم‌سازهای زاویه‌های مجاور و برونی مستطیل دوبه‌دو برهم عمودند، زیرا داریم:

$$m_{NP}=m_{MQ}=1$$
$$\Rightarrow m_{MN}\times m_{MQ}=(-1)(1)=-1$$
$$m_{MN}=m_{PQ}=-1$$
$$\Rightarrow MN\perp MQ \Rightarrow \hat{M}=90^\circ$$

و بــه همین ترتیــب داریــم: $\hat{N}=\hat{P}=Q=90^\circ$. پس MNPQ مستطیل است.

برای اینکه ثابت کنیم این مستطیل مربع است، طول دو ضلع مجاور آن را به‌دست می‌آوریم که باید با هم مساوی باشند.

داریم:

$$\begin{cases} MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ MQ: y-x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow M=(0,\frac{a+b}{2})$$

$$\begin{cases} MN: y+x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ NP: x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow N=(\frac{a+b}{2},0)$$

$$\begin{cases} NP: x-y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2} \\ PQ: y+x=-\frac{a}{2}-\frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow P=(0,-\frac{a}{2}-\frac{b}{2})$$

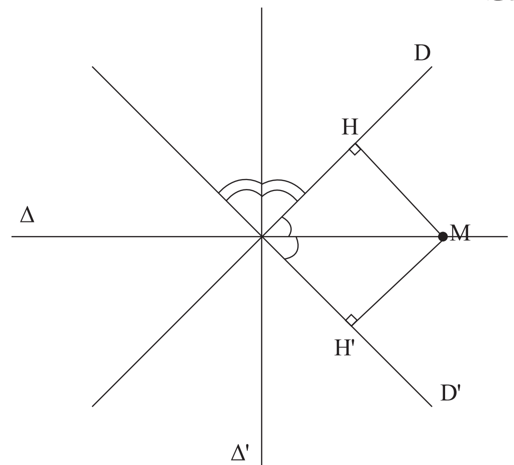
$$\Rightarrow MN = \sqrt{(۰-\frac{a+b}{۲})^۲ + (\frac{a+b-۰}{۲})^۲} = \sqrt{۲}\times\frac{a+b}{۲}$$

$$\Rightarrow NP = \sqrt{(۰-\frac{a+b}{۲})^۲ + (-\frac{a+b}{۲}-۰)^۲} = \sqrt{۲}\,\frac{a+b}{۲}$$

$\Rightarrow MN = NP \Rightarrow$ چهار ضلعی MNPQ مربع است.
و طول ضلع مربع نیز برحسب a و b بدست آمده است.

نکتهٔ ۱. می‌توانستیم مختصات رأس Q را نیز به دست آوریم و ثابت کنیم که: $MN = NP = PQ = QA$؛ یعنی MNPQ لوزی است. سپس ثابت کنیم یک زاویهٔ قائمه دارد که در آن صورت، هر چهار زاویه‌اش قائمه و MNPQ مربع خواهد بود.

نکتهٔ ۲. معادلهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط $D: ax+by+c=۰$ و $D': a'x+b'y+c'=۰$ به‌صورت زیر است:



$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$

زیرا اگر $M=(x,y)$ یک نقطهٔ دل‌خواه متعلق به نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط و MH و MH′ فاصلهٔ این نقطه از این دو خط باشد، داریم:

$$MH = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad و \quad MH' = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$

MG نیم‌ساز زاویه $\Rightarrow MH = MH'$

$$\Rightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$

و این دو معادله، معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های بین دو خط D و D′ هستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: معادله‌های نیم‌سازهای زاویه‌های حاصل از برخورد دو خط $D: ۳x-۴y+۱۲=۰$ و $D': ۵x+۱۲y-۳۰=۰$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$\frac{۳x-۴y+۱۲}{\sqrt{۹+۱۶}} = \pm\frac{۵x+۱۲y-۳۰}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x-۴y+۱۲}{۵} = \pm\frac{۵x+۱۲y-۳۰}{۱۳}$$

$$\Rightarrow ۱۳(۳x-۴y+۱۲) = ۵(۵x+۱۲y-۳۰)$$

$$\Rightarrow ۱۴x-۱۱۲y+۳۰۶=۰$$

$$۱۳(۳x-۴y+۱۲) = -۵(۵x+۱۲y-۳۰)$$

$$\Rightarrow ۶۴x+۸y+۶=۰$$

نکتهٔ ۳. در این مسئله با توجه به موازی‌بودن ضلع‌های مستطیل با محورهای مختصات، نتیجه می‌شود که نیم‌سازهای زاویه‌های برونی B و D با نیم‌ساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات، و نیم‌سازهای زاویه‌های برونی C و A با نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات موازی‌اند. بنابراین داریم:

$$m_{MN} = m_{PQ} = -۱$$

$$m_{NP} = m_{MQ} = ۱$$

پس با داشتن مختصات رأس‌های A، B، C و D می‌توان معادلهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های برونی A، B، C و D را نوشت.

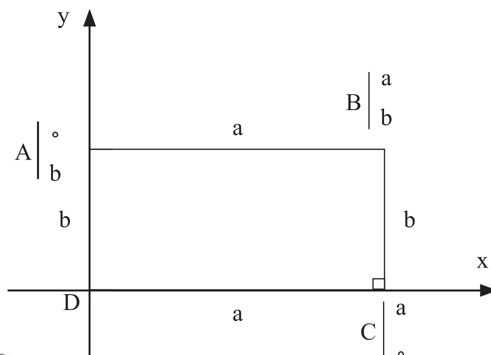
برای مثال داریم:

$$B = (\frac{a}{۲},\frac{b}{۲}) \quad و \quad m_{MN} = -۱ \Rightarrow y-\frac{b}{۲} = -۱(x-\frac{a}{۲})$$

$$\Rightarrow y+x = \frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}$$

این همان معادلهٔ MN است که با روش قبلی به‌دست آوردیم.

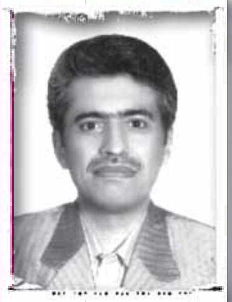
نکتهٔ ۴. دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را می‌توان به صورت‌های دیگری نیز در نظر گرفت. مثلاً می‌توان محورxها را روی خط CD و محور yها را روی خط AD اختیار کرد.



محاسبه‌ها را خودتان انجام دهید.



دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
دانشیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی





بستهٔ نرم‌افزاری متمتیکا



کلیدواژه‌ها: مجموع ریمان، محاسبهٔ سطح و حجم، فاکتوریل، عدد اول، مقسوم علیه، خارج‌قسمت، باقی‌مانده، ب‌م‌م، ک‌م‌م

اشاره

در این قسمت ابتدا مثال‌هایی از کاربرد انتگرال معین را با استفاده از «متمتیکا» حل می‌کنیم. در ادامه به معرفی دستورالعمل‌هایی از متمتیکا می‌پردازیم که در نظریهٔ اعداد و حساب مقدماتی کاربرد زیادی دارند.

۱. محاسبهٔ مجموع ریمان بالا و پایین

فرض کنیم $I=[a,b]$ یک بازه مفروض باشد. اگر این بازه به گردایه‌ای از زیر بازه‌ها به صورت $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$، ... و $[x_{n-1},x_n]$ افراز شود، به‌طوری که $x_0=a$ و $x_n=b$ و x_i^* یک نقطه در زیر بازهٔ iام، $1\le i\le n$، باشد و $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ طول زیر بازهٔ iام باشد، آن‌گاه مجموع ریمان f روی I نسبت به افراز فوق به صورت $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ تعریف می‌شود. مجموع ریمان یک تقریبی از مساحت زیر نمودار تابع f با محور xها در بازهٔ I را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت وقتی طول هر یک از زیر بازه‌ها به صفر میل کند، انتگرال معین f در [a,b] تقریباً با مجموع ریمان برابر است. در حالتی که طول همهٔ زیر بازه‌ها برابر با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

برای مثال، می‌دانیم: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Sin}x\,dx=1$. حال یک مجموع ریمان پایینی و یک مجموع ریمان بالایی را برای f روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ در حالتی‌که $n=100$ و طول زیربازه‌ها برابر باشد، می‌یابیم. برای مجموع ریمان پایینی x_i^* را طوری در نظر می‌گیریم که نقاط انتهایی سمت چپ هر زیربازه باشند. برای مجموع ریمان بالایی نیز x_i^* را طوری انتخاب می‌کنیم که نقاط انتهایی سمت راست هر زیربازه باشند. در حالت اول یک تقریب نقصانی و در حالت دوم یک تقریب اضافی را برای انتگرال معین فوق به‌دست می‌آوریم. نتایج با اجرا در متمتیکا به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$f[x_]=\operatorname{Sin}[x];$

$a=0;\ b=\pi/2;n=100;$

$\Delta x=(b-a)/n;$

$\text{xstar}[i_]=a+(i-1)\Delta x;$

$\sum_{i=1}^{n} f[\text{xstar}[i]]\Delta x\,//N$

۰/۹۹۲۱۲۵

$\text{xstar}[i_]=a+i\Delta x;$

$\sum_{i=1}^{n} f[\text{xstar}[i]]\Delta x\,//N$

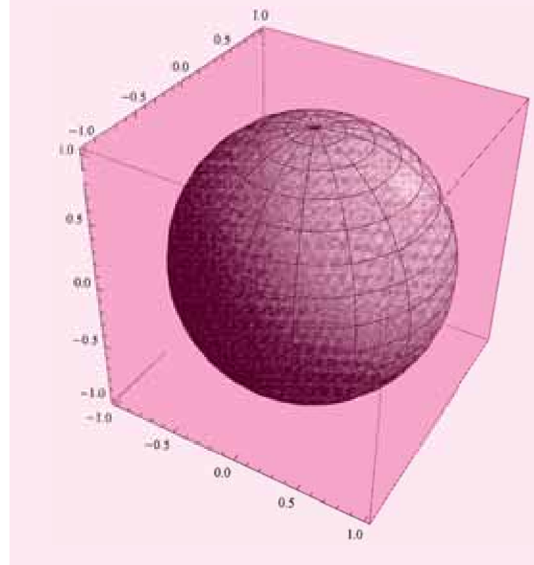
۱/۰۰۷۸۳

برای بهبود دقت تقریب حاصل می‌توان نقاط وسط هر زیربازه را به عنوان x_i^* در نظر گرفت. در این حالت $x_i^*=a+(i-\frac{1}{2})\Delta x$. نتیجه در این حالت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\text{xstar}[i_]=a+(i-0/5)\Delta x;$

$\sum_{i=1}^{n} f[\text{xstar}[i]]\Delta x\,//N$

۱/۰۰۰۰۱



توجه کنید که هر یک از دستورهای موجود در هر خط باید با علامت ; جدا و با فشار دکمه‌های Shift+Enter اجرا شود.

۲. محاسبهٔ سطح محصور

فرض کنید بخواهیم حاصل $F(x)=\int_{۱}^{x}\frac{۱}{t}dt$ را به ازای $x=۲$ در متمتیکا به‌دست آوریم. در این حالت سطح زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(t)=\frac{۱}{t}$ و محور افقی در بازهٔ $[۱,x]$ موردنظر است که برابر است با: $(x>۰)\mathrm{Ln}x$. بنابراین: $F(۲)=\mathrm{Ln}۲$. این امر در متمتیکا به‌صورت زیر قابل محاسبه است. دستور «Assumptions»، فرض $x>۰$ را در محاسبهٔ این انتگرال منظور می‌کند:

```
f[x_] = ۱/x;
F[x_] = Integrate[f[t], {t, ۱, x}, Assumptions → x > ۰];
F[۲]
Log[۲]
```

۳. محاسبهٔ سطح بین دو منحنی

فرض کنید بخواهیم سطح محصور بین دو منحنی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}$ را محاسبه کنیم. بـه این منظور باید محل تلاقی این دو منحنی را پیدا کنیم و حاصل انتگرال معین اختلاف این دو تابع را از حیث قدرمطلق در بازهٔ تلاقی آنها بیابیم. نتیجه به صورت زیر محاسبه می‌شود. یادآوری می‌شود هر سلول ورودی با فشار هم‌زمان دکمه‌های Shift+Enter باید اجرا شود:

$f[x_]=\sqrt{x};$

$g[x_]=x^{۲};$

Solve[f[x] == g[x], x]

{{x → ۰}, {x → ۱}}

$\int_{۰}^{۱}\mathrm{Abs}[f[x]-g[x]]dx$

$\frac{۱}{۳}$

۴. محاسبهٔ حجم

می‌دانیم حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی تابع f و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور xها از رابطهٔ $V=\pi\int_{a}^{b}f^{۲}(x)dx$ به‌دست می‌آید. فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$ و $-۳\le x\le ۳$. در این حالت نمودار f یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است که اگر این نمودار حول محور xها دوران یابد، کره‌ای به شعاع ۳ را مشخص می‌کند که حجم آن برابر با ۳۶π به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$f[x_]=\mathrm{Sqrt}[۹-x^{۲}];$

$\pi\int_{-۳}^{۳}f[x]^{۲}dx$

۳۶π

در حالت کلی، اگر $f(x)=\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}$، نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r باشد، حجم کرهٔ حاصل از دوران f حول محور xها در $[-r,r]$ برابر است با: $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$.

$Y=\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}$

$\pi\int_{-r}^{r}Y^{۲}dx$

$\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}$

$\frac{۴\pi r^{۳}}{۳}$

در ادامه چند دستورالعمل پایه‌ای را در محیط متمتیکا که پرکاربرد هستند، معرفی می‌کنیم.

۱. دستور مجموع

صورت کلی دستورالعمل مجموع برای محاسبهٔ $\sum_{i=m}^{n}a_i$ به صورت زیر است:

Sum[a[i], {i, m, n}]

مثال: حاصل $\sum_{i=۱}^{۱۰۰}i^{۲}$ برابر است با:

Sum[i ^ ۲, [i, ۱, ۱۰۰}]

۳۳۸۳۵۰

محاسبهٔ فوق با استفاده از نماد سیگما در پنجرهٔ «Basic Math Input» به‌صورت $\sum_{□=□}^{□}□$ نیز قابل انجام است. در این حالت، پس از کلیک کردن روی این نماد و قرارگرفتن آن در صفحهٔ متمتیکا، داخل هر مربع خالی را پر می‌کنیم. با فشار دکمهٔ «Tab» به‌راحتی می‌توان به مربع بعدی وارد شد.

$\sum_{i=۱}^{۱۰۰}i^{۲}$

۳۳۸۳۵۰

مثال: حاصل $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$ برابر است با:

$\text{Sum}[\frac{1}{k(k+1)},\{k,1,9\}]$

$\frac{9}{10}$

توجه شود که حرف اول «Sum» باید بزرگ تایپ شود.

مثال: حاصل $\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=i}^{100}\frac{i}{j}$ برابر است با:

$\sum_{i=1}^{100}\sum_{j=i}^{100}\frac{i}{j}$

$\frac{65}{2}$

در این حالت سیگمای دوم را باید داخل مربع خالی جلوی سیگمای اول تایپ کنیم و در واقع دوبار روی نماد سیگما کلیک کنیم.

می‌توان با ارائهٔ یک نمو به دستور مجموع، حاصل جمع تعدادی از اعداد را با یک نمو مشخص محاسبه کرد. برای مثال، برای محاسبهٔ $\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+...+\frac{1}{51}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\text{Sum}\{\frac{1}{i},\{i,15,51,2\}]$

با اجرای دستور فوق نتیجه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\frac{6350139147580604193}{9684514075768739705}$

عدد ۲ در دستور Sum همان نمو است که اختلاف بین هر دو اندیس متوالی در این مجموع را مشخص می‌کند.

اگر بخواهیم مقدار خروجی به شکل عددی مشخص شود، از دستور «NSum» به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$\text{NSum}\{\frac{1}{i},\{i,15,51,2\}]$

که نتیجه برابر می‌شود با:

$0/6557$

۲. دستور حاصل‌ضرب

صورت کلی دستورالعمل حاصل‌ضرب برای محاسبهٔ $a_m\times a_{m+1}\times...\times a_n$ عبارت است از:

$\text{Product}[a[i],\{i,m,n\}]$

دستور فوق برابر با $\prod_{i=m}^{n}a_i$ است $(n\geq m)$. نماد حاصل‌ضرب در پنجرهٔ «Basic Math Input» به‌صورت $\prod_{\square=\square}^{\square}\square$ است که با کلیک‌کردن روی آن و پرکردن مربع‌های خالی و اجرای سلول مربوطه، حاصل‌ضرب موردنظر به‌دست می‌آید.

مثال: حاصل !۷ با استفاده از دسته فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$\text{Product}[i,\{i,1,7\}]$

5040

این دستور معادل با $\prod_{i=1}^{7}i$ است.

مثال: حاصل $7^2\times...\times 2^2\times 1^2$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$\prod_{i=1}^{7}i^2$

25401600

۳. دستور حلقه

دو دستور «While» و «For» به صورت کلی زیر از جمله دستورالعمل‌های حلقه در متمتیکا هستند:

While [عبارت و شرط]

در این حالت، عبارت داده شده به صورت مکرر تا وقتی شرط مفروض برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

For [عبارت و نمو و تست و آغازدهی]

در این حالت با اجرای این دستور، عبارت مفروض با آغازدهی و نمودار داده شده تا زمانی که دستور تست برقرار باشد، محاسبه می‌شود.

فرض کنید می‌خواهید اعداد ۱ تا ۵ را چاپ کنیم. با استفاده از هر دو دستور فوق به شکل زیر این کار قابل انجام است. منظور از ++n یا ++i در این دستورها آن است که مقادیر n یا i یکی یکی زیاد می‌شود.

```
n = 1;
While[n < 6, Print[n]; n++]
1
2
3
4
5
For[i = 1, i ≤ 5, i++, Print[i]]
1
2
3
4
5
```

حال فرض کنید می‌خواهید مقدار !۱۰ را با استفاده از دستور حلقهٔ While محاسبه کنیم. به این منظور به صورت زیر می‌توان عمل کرد. در این حالت با فرض $n=10$ و $nfact=1$ و به‌کارگیری دستور nfact=nfact*n در حلقهٔ While و استفاده از نماد --n، مقدار n یکی‌یکی کاهش می‌یابد تا در نهایت !۱۰ به صورت $10\times9\times8\times...\times1$ محاسبه و مشخص شود.

```
n = 10;
nfact = 1;
While[n > 0, nfact = nfact * n; n--]
nfact
3628800
```

۴. دستورهای Prime و PrimeQ

برای مشـــخص کردن n امین عدد اول بزرگ‌تر از یک، از دستور Prime به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Prime[n]

مثال:

Prime[۷]

۱۷

Prime[۱۰۰۰]

۷۹۱۹

مثال: دســـتور زیرمجموع ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت ۲۲۹+...+۷+۵+۳+۲ را مشخص می‌کند:

Sum[Prime[k], {k,۱,۵۰}]

۵۱۱۷

هم‌چنین، دستور زیر حاصل‌ضرب ۵۰ عدد اول طبیعی به صورت ۲۲۹×...×۵×۳×۲ را مشخص می‌کند:

Product[Prime[k]{k,۱,۱۰}]

۶۴۶۹۶۹۳۲۳۰

برای مشخص کردن این‌که یک عدد مفروض طبیعی اول هســـت یا خیر، از دستور PrimeQ استفاده می‌کنیم. خروجی این دستور «True» یا «False» است که در حالت اول عدد اول است و در حالت دوم عدد غیراول است.

مثال: در این مثال اول بودن عدد ۱۷۹ و غیراول بودن عدد ۲۴۹ مشخص شده است.

PrimeQ[۱۷۹]

True

PrimeQ[۲۴۹]

False

۵. دستور Factorial

به منظور محاســـبهٔ فاکتوریل عـــدد طبیعی مفروض n از دستورهای زیر می‌توان استفاده کرد:

Factorial [n] یا n!

مثال: مقادیر !۱۰ و $\frac{۱۰!}{۴!\times ۶!} = \binom{۱۰}{۴}$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱۰!

۳۶۲۸۸۰۰

Factorical[۱۰]

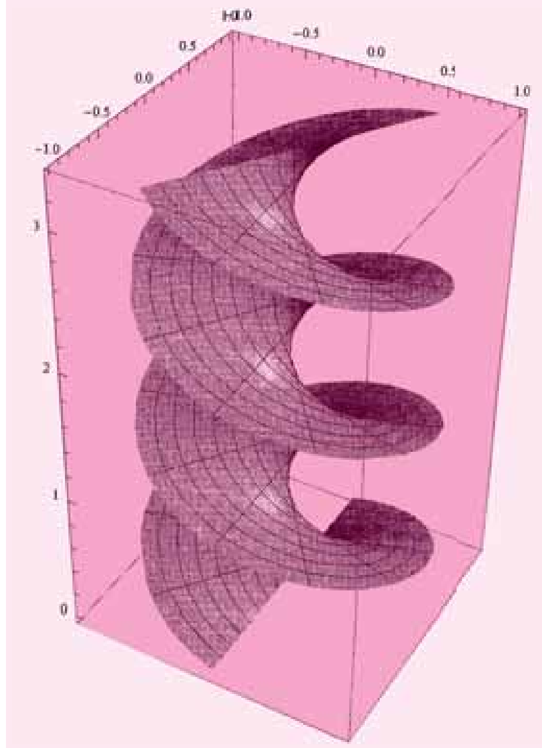
۳۶۲۸۸۰۰

$\frac{۱۰!}{۴!\times ۶!}$

۲۱۰

۶. دستور Factor Integer

به منظور مشـــخص کردن عوامـــل اول یک عدد طبیعی مفروض از دســـتور «Factor Integer» به صورت زیر استفاده



می‌شود:

Factor Integer [n]

توجه کنید حروف F و I حتماً به صورت بزرگ تایپ شوند. با اجرای این دستور عامل‌های اول n به همراه تعداد آنها داخل آکلاد اعلام می‌شود.

مثال: دستورهای زیر عوامل اول اعداد ۸۱۰ و ۲۴۳۴۵۰۰ را مشخص می‌کنند.

FactorInteger[۸۱۰]

{{۲,۱},{۳,۴},{۵,۱}}

FactorInteger[۲۴۳۴۵۰۰]

{{۲,۲},{۳,۲},{۵,۳},{۵۴۱,۱}}

بنابراین:

$۸۱۰ = ۲\times ۳^{۴} \times ۵$ و $۲۴۳۴۵۰۰ = ۲^{۲} \times ۳^{۲} \times ۵^{۳} \times ۵۴۱$

۷. دستور Quotient

به منظور محاسبهٔ خارج‌قسمت تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دســـتور «Quotient» به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Quotient [m,n]

مثال: خارج‌قسمت تقسیم ۱۵۷ بر ۴ برابر است با ۳۹:

Quotient[۱۵۷, ۴]

۳۹

۸. دستور Mod

به منظور محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی m بر عدد طبیعی n از دستور Mod به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

Mod [m,n]

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۵۷ بر ۴، یک، ۴۵ بر ۹، صفر و $۳^{۱۲۲}$ بر ۷، دو است:

Mod[۱۵۷, ۴]

۱

Mod[۴۵, ۹]

۰

Mod[$۳^{۱۲۲}$, ۷]

۲

۹. دستور Divisors

به منظور مشـــخص‌کردن همهٔ شمارنده‌های طبیعی یک عدد طبیعی مفروض از دستور «Divisors» استفاده می‌کنیم.

مثال: دستورهای زیر همهٔ شمارنده‌های طبیعی اعداد ۴۱، ۸۵۴ و ۱۷۲۹ را مشخص می‌کنند.

Divisors[۱۷۲۹]

{۱, ۷, ۱۳, ۱۹, ۹۱, ۱۳۳, ۲۴۷, ۱۷۲۹}

Divisors[۸۵۴]

{۱, ۲, ۷, ۱۴, ۶۱, ۱۲۲, ۴۲۷, ۸۵۴}

Divisors[۴۱]

{۱, ۴۱}

۱۰. دستورالعمل‌های GCD و LCM

به منظور محاسبهٔ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) و کوچک‌تریـــن مضرب مشـــترک (ک‌م‌م) دو عـــدد طبیعی مفروض، به ترتیب از دستورهای «GCD» و «LCM» استفاده می‌کنیم. از این دســـتورها برای محاســـبهٔ ب‌م‌م و ک‌م‌م چند عدد طبیعی مفروض هم می‌توان استفاده کرد. به این منظور کافی است این اعداد را داخل کروشه در مقابل هر یک از این دستورها تایپ کنید.

مثال: ب‌م‌م اعداد ۵۳۵۵ و ۴۰۴۲۵ برابر ۱۰۵، ب‌م‌م اعداد ۱۲۵، ۵۰۵ و ۶۳۰ برابر با ۵، ک‌م‌م اعداد ۴۸ و ۳۶ برابر با ۱۴۴ و ک‌م‌م اعـــداد ۱۷۰، ۲۲۵، ۸۹ و ۳۴۲ برابـــر بـــا ۱۲۹۳۶۱۵۰ هستند

GCD[۵۳۵۵, ۴۰۴۲۵]

۱۰۵

GCD[۱۲۵, ۵۰۵, ۶۳۰]

۵

LCM[۴۸, ۳۶]

۱۴۴

LCM[۱۷۰, ۲۲۵, ۸۹, ۳۴۲]

۱۲۹۳۶۱۵۰

منبع

Mathematica, Eugene Don, Schaum's outline Series, McGraw Hill Comp, 2009.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و سه جواب!



یک فروشـــندهٔ ابزارهای دســـت دوم و کارکرده، وســـیلهٔ کارکرده‌ای را به قیمت ده هـــزار تومان به فروشـــندهٔ دیگری فروخت. کمی بعد فروشندهٔ دوم، چون نیازی به آن وسیله نداشـــت، آن را به فروشـــندهٔ اول به قیمت هشـــت هزار تومان دوبـــاره فروخت. سپس فروشندهٔ دیگری آمد و آن را از همان فروشـــنده، به قیمت نه هـــزار تومان خرید. فروشندهٔ اول چه‌قدر سود برد؟



جـــواب اول: فروشـــندهٔ اول، از فروش اول خود دو هزار تومان ســـود برد، چون آن را ده هزار تومان فروخت و هشت هزار تومان خرید. اما پـــس از بازپس‌گیری آن به هشـــت هزار تومان، دوباره آن را بـــه نه هزار تومان فروخت. پـــس هزار تومان دیگر سود برد و در مجموع سه هزار تومان سود برد.

جواب دوم: در ابتدا این وسیله ده هزار تومان ارزش دارد. ســـپس فروشندهٔ اول در فروش نخست آن و خرید مجدد، دو هزار تومان سود برده است. اما پس او جنسی را که ده هزار تومان ارزش دارد، به نه هزار تومان می‌فروشد. سپس در معاملهٔ بعدی یک هزار تومان ضرر کرده است. لذا در مجموع سود خالص او هزار تومان است.

جواب سوم: فروشندهٔ اول از فروش نخست خود دو هزار تومان سود می‌برد. اما وقتی آن را به نفر دوم به قیمت نه هزار تومان می‌فروشد، او فقط آن را با نه هزار تومانی که می‌ارزد عوض می‌کند. لذا در معامله با فروشندهٔ بعدی نه سود کرده است و نه زیان. بنابراین سود نهایی او دو هزار تومان است!

به نظر شما کدام جواب درست است!

نظرتان را در این مورد حتماً برای ما بفرستـــید. این زمینهٔ خوبی برای یک بحث ســـازندهٔ ریاضی اســـت. این نظرات و تحلیلمان را از آنها، در شمارهٔ بعد می‌آوریم.

قضیه:
همهٔ عددهای صحیح جالب هستند!

اثبات بـــا برهان خلـــف: فرض کنیـــم چنیـــن نباشـــد و بعضی عددهـــای صحیـــح غیرجالـــب باشـــند. پس کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و غیرجالب وجود دارد. اوه چـــه جالـــب! پس این عدد جالب است! (تناقض!)

هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در بلژیک

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، بلژیک، اصل لانهٔ کبوتر، هفت ضلعی



مسابقه‌های ریاضی در بلژیک از دههٔ ۱۹۶۰ میلادی آغاز شده است. ابتدا همان پرسش‌های مسابقه‌های ریاضی دبیرستان‌های آمریکا در آنها مطرح می‌شد، اما از سال ۱۹۷۶، کشور بلژیک المپیاد ریاضی خاص خودش را سازمان‌دهی کرد و از سال ۱۹۸۲، این مسابقات در سه مرحله (دبیرستان، نیمه نهایی و نهایی) برگزار شده‌اند. مرحلهٔ نخست آزمون با پرسش‌های چندگزینه‌ای برگزار می‌شود که به نسبت سؤال‌های المپیادی رایج، آسان هستند، ولی گاهی هم پرسش‌های قابل تأمل و نسبتاً خوبی مانند این نمونه در آنها مطرح می‌شود:

- در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، هر یک از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به طول ثابت L هستند. مساحت این ذوزنقه آن‌گاه ماکزیمم است که اندازهٔ زاویهٔ بین قاعدهٔ بزرگ و یک ساق آن برحسب رادیان برابر باشد با:

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{5}$ د) $\frac{\pi}{6}$

اما پرسش‌های مرحلهٔ نهایی، مسائل قابل اعتنایی هستند و ما در اینجا تعدادی از آنها را همراه با راه‌حل‌هایشان می‌آوریم. لازم به ذکر است که همهٔ این مسائل از کتاب «المپیادهای ریاضی بلژیک»، ترجمهٔ استاد گران‌قدر، آقای **عبدالحسین مصحفی** ـ انتشارات فاطمی ـ برگرفته شده‌اند، اما راه‌حل مسائل در کتاب نیامده و همهٔ راه‌حل‌ها از نگارنده است.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی x داریم:
$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ (۱۹۷۶).

۲. ساکنان دهکدهٔ کوچک «دوران پون» را دو خانواده تشکیل می‌دهند: دوران‌ها و دوپون‌ها. دوران‌ها همواره راست می‌گویند و دوپون‌ها همواره دروغ. مسافری در خیابان اصلی این دهکده چهار نفر از ساکنان را ملاقات می‌کند و از آنها می‌پرسد که آیا دوران هستند یا دوپون.

اولین نفر پاسخ می‌دهد: «همهٔ ما دوپون هستیم.»

دومین نفر می‌گوید: «نه این‌طور نیست، فقط یکی از ما دوپون است.»

آنگاه سومین نفر اظهار می‌دارد: «گفته‌های آنها را باور نکنید. بین ما دقیقاً دو دوپون وجود دارد.»

اما نفر چهارم فقط می‌گوید: «من دوران هستم.»

آیا این نفر چهارم واقعاً یک دوران است؟ (۱۹۷۷)

۳. a، b و c سه عدد طبیعی هستند. اگر به ازای هر عدد طبیعی n، مثلثی وجود داشته باشد که a^n، b^n و c^n اندازه‌های ضلع‌های آن باشند، ثابت کنید که همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند (۱۹۷۷).

۴. کدام عددهای طبیعی هستند که در تقسیم آنها بر ۲، ۳ و ۵، باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۱، ۲ و ۴ می‌شوند؟ (۱۹۷۸)

۵. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، چند جمله‌ای $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است (۱۹۸۱).

۶. فرض کنید هر نقطهٔ صفحه به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز باشد. آیا الزاماً مثلثی متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود خواهد داشت که سه رأس آن از یک رنگ باشند؟ (۱۹۸۴)

۷. نقطه‌های A، B، C و D چهار رأس متوالی یک چندضلعی منتظم هستند. هرگاه $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ باشد، تعداد ضلع‌های این چندضلعی را مشخص کنید (۱۹۸۷).



حل مسائل

۱. مسئله را به روش استدلال بازگشتی حل می‌کنیم. با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ می‌نویسیم:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

حال اگر انتهای کمان x در ناحیه‌های دوم و سوم باشد، $\cos x<0$ و در نتیجه: $\sin(\cos x)<0$. ولی چون $\sin x\le 1$، پس: $\frac{\pi}{2}-\sin x>0$ و در نتیجه: $\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>0$ و لذا:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$$

اما اگر انتهای کمان x در نواحی اول و چهارم باشد، در این نواحی $\cos x>0$ و تابع سینوس یک تابع صعودی است. پس از نابرابری فوق نتیجه می‌شود: $\frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x$ و در نتیجه

$$\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$$

اما می‌دانیم:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$
$$\Rightarrow -\sqrt{2}\le\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$$

و بنابراین: $\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه حکم قابل اثبات است. استدلال اصلی را خودتان انجام دهید.

۲. بله او واقعاً دوران است، زیرا:

- اولین نفر به یقین دروغ می‌گوید، چون اگر راست‌گو باشد، طبق گفتهٔ خودش باید هر چهار نفر دوپون باشند و دروغ بگویند و این تناقض به‌وجود می‌آورد.
- نفر سوم یا راست می‌گوید یا دروغ. اگر او راست بگوید، آن‌گاه دقیقاً دو نفر دوپون هستند. در نتیجه نفر دوم دروغ‌گو (و دوپون) است و لذا نفرات سوم و چهارم هر دو راست‌گو هستند. اما اگر او دروغ بگوید، آن‌گاه جملهٔ او دروغ است. در نتیجه در آن جمع بیشتر از دو نفر دروغ‌گویند و لذا نفر دوم هم دروغ‌گوست. پس نفرات اول، دوم و سوم هر سه دوپون هستند. و چون نفر اول دروغ‌گوست، پس همهٔ آنها دوپون نیستند و در نتیجه نفر چهارم دوران است. پس در هر صورت نفر چهارم دوران است.

۳. بدون آنکه به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم: $a\ge b\ge c$. اگر یکی از این مثلث‌ها متساوی‌الساقین نباشد، به ازای این یک مثلث خواهیم داشت: $a>b>c$ و در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی n هم خواهیم داشت: $a^n>b^n>c^n$. اما اگر $a\ge 2b$ باشد، چون $b+c>a$ است، پس: $b+c\ge 2b$ و یا: $c\ge b$ که تناقض است (زیرا $b>c$). پس باید $a<2b$ و از آنجا که به ازای هر عدد طبیعی n، a^n، b^n و c^n اضلاع مثلثی هستند، پس با همین استدلال خواهیم داشت:

$$b^n<a^n<2b^n$$

و در نتیجه:

$$b<a<\sqrt[n]{2}.b$$

اما چون a و b عددهای طبیعی هستند و $\sqrt[n]{2}$ با زیادشدن n مرتباً کوچک‌تر می‌شود، پس ممکن نیست که نابرابری فوق به ازای هر عدد طبیعی n برقرار باشد (زیرا بین b و $\sqrt[n]{2}.b$ هیچ عدد طبیعی وجود نخواهد داشت). پس لازم است که لااقل دو تا از این عددها با هم مساوی باشند و در نتیجه همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.

۴. اگر این عدد را a بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a=2m+1=3n+2=5p+4$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{3n+1}{2}=n+\frac{n+1}{2}\Rightarrow n+1=2k\Rightarrow n=2k-1$$
$$\Rightarrow 5p+4=3(2k-1)+2=6k-3+2=6k-1$$
$$\Rightarrow 5p=6k-5\Rightarrow p=\frac{6k}{5}-1\Rightarrow k=5k'$$
$$\Rightarrow p=6k'-1\Rightarrow a=5(6k'-1)+4\Rightarrow a=30k'-1$$

یعنی این عددها به فرم $30k'-1$ هستند (عددهایی که در تقسیم بر ۳۰، باقی‌ماندهٔ ۲۹ دارند)؛ مانند ۲۹، ۵۹ و...

۵. از قضیهٔ استقرای ریاضی کمک می‌گیریم:

$$n=1:(x+1)^3+x^3=2x^3+3x^2+3x+1$$
$$=2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1=2x(x^2+x+1)$$
$$+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(2x+1)$$

فرض:

$$n = k : (x+1)^{2k+1} + x^{k+2} = P(x).(x^2+x+1)$$

حکم:

$$n = k+1 : (x+1)^{2k+3} + x^{k+3} = Q(x).(x^2+x+1)$$

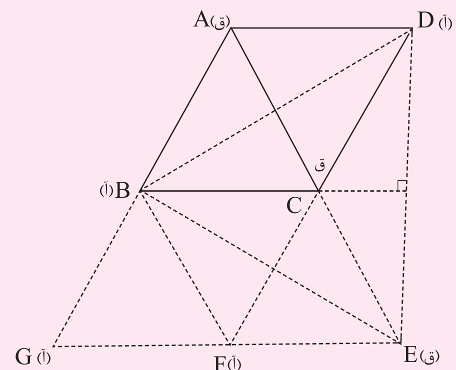
با توجه به فرض استقرا داریم:

$$(x+1)^{2k+1} = P(x)(x^2+x+1) - x^{k+2}$$

و با جای‌گذاری در حکم خواهیم داشت:

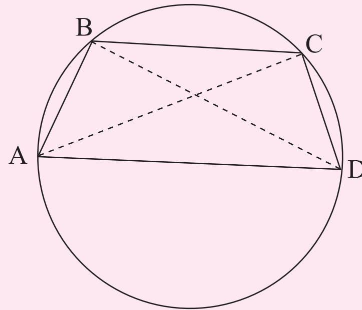
$$(x+1)^{2k+3} + x^{k+3} = [P(x)(x^2+x+1) - x^{k+2}](x+1)^2$$
$$+x^{k+3} = P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2 - x^{k+2}((x+1)^2 - x)$$
$$= P(x)(x^2+x+1)(x+1)^2 - x^{k+2}(x^2+x+1)$$
$$= (x^2+x+1)[(x+1)^2P(x) - x^{k+2}] = Q(x)(x^2+x+1)$$

۶. این مسئلهٔ جالبی است. بدیهی است که طبق اصل لانهٔ کبوتر، لااقل دو رأس از رئوس هر مثلث متساوی‌الاضلاع هم‌رنگ خواهند بود. فرض می‌کنیم دو رأس از رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرمز رنگ باشند؛ مثلاً رئوس A و C از مثلث ABC در شکل که با حرف ق مشخص شده‌اند. اگر رأس B هم قرمز باشد، مثلثی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند. پس فرض می‌کنیم این رأس آبی رنگ باشد. حال مثلث متساوی‌الاضلاع ACD را بنا می‌کنیم و با همان استدلال رأس D هم باید آبی باشد.



از D بر امتداد BC عمودی رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا امتداد AC را در E قطع کند. مثلث CDE متساوی‌الساقین است (چرا؟) و داریم: $CF = CE = CD$. چون زوایای مثلث DBE °۶۰ هستند، پس این مثلث هم متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه E نمی‌تواند آبی باشد و قرمز است. بنابراین در مثلث متساوی‌الاضلاع CEF، F هم نمی‌تواند قرمز باشد و آبی است. با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع AEG، G هم باید آبی باشد و از آنجا در مثلث متساوی‌الاضلاع BFG هر سه رأس آبی هستند. پس در هر حال مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود دارد که سه رأس آن هم‌رنگ هستند.

۷. اگر AB ضلع یک n ضلعی باشد، به کمک دستور محاسبهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R داریم:



$AB = 2R\sin\frac{180}{n}$. همچنین، طول قطر AC را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{B} = 180 - (B\hat{A}C + B\hat{C}A) = 180 - 2B\hat{A}C$$
$$= 180 - \widehat{BC} = 180 - \frac{360}{n}$$
$$\Rightarrow AC = 2R\sin B = 2R\sin\frac{360}{n}$$

و به همین ترتیب داریم: $AD = 2R\sin\frac{540}{n}$ و با فرض $\frac{180}{n} = \alpha$ و فرض مسئله داریم:

$$\frac{1}{2R\sin\alpha} = \frac{1}{2R\sin 2\alpha} + \frac{1}{2R\sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin 3\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\cos 5\alpha - \cos\alpha}{-2\sin\alpha}$$
$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos\alpha = -2\sin\alpha\sin 3\alpha - 2\sin\alpha\sin 2\alpha$$
$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos\alpha = \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \cos$$
$$\Rightarrow \cos 5\alpha - \cos 4\alpha = \cos 3\alpha - \cos 2\alpha$$
$$\Rightarrow -2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = -2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\Rightarrow \sin\frac{9\alpha}{2} = \sin\frac{5\alpha}{2} \Rightarrow \frac{9\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$$ و (غ ق ق)
$$\frac{9\alpha}{2} = \pi - \frac{5\alpha}{2} \Rightarrow 7\alpha = \pi, \alpha = \frac{\pi}{7}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow n = 7$$

یعنی چندضلعی فوق باید هفت ضلعی منتظم باشد.



آموزشی

ابراهیم ریحانی ـ فهیمه کلاهدوز
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دهاقان

فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

قسمت اول





کلیدواژه‌ها: اثبات، استدلال، استدلال ریاضی، شهود، خلاقیت، ریاضیات مدرسه‌ای، استدلال تجربی ـ دیداری، استدلال صوری

مقدمه

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام «اثبات» نشئت می‌گیرد. بسیاری از محققان آموزش ریاضی بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعهٔ تفکر منطقی ضروری و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات است. برخی از آنان معتقدند یکی از وظایف اصلی تعلیم و تربیت، پرورش افرادی است که بتوانند به خوبی استدلال کنند و برای تصمیم‌گیری در مسائل زندگی و شرکت در بحث‌های منطقی آماده شوند.

«شورای ملی معلمین ریاضی» (NCTM، ۲۰۰۰) نیز در کتاب «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» بیان می‌دارد که استدلال و اثبات ریاضی، درک و بینش افراد را در پدیده‌های گوناگون توسعه می‌دهد. همچنین، افرادی که استدلال می‌کنند و دارای تفکر تحلیلی هستند، قادرند که الگوها، ساختارها و نظم موجود در جهان واقعی را به خوبی درک کنند. این شورا اظهار می‌دارد که استدلال و اثبات نباید به عنوان فعالیت‌های ویژه و مخصوصی که به صورت یک موضوع جداگانه و خاص در برنامهٔ درسی است، در نظر گرفته شوند، بلکه این مفاهیم باید به‌طور طبیعی و مداوم در همهٔ بحث‌های کلاسی حضور داشته باشند.

علی‌رغم تأکید فراوان بر اهمیت و نقش استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در همهٔ سطوح تحصیلی در درک و فهم، و ساخت اثبات و استدلال‌های منطقی با مشکل مواجه می‌شوند. همچنین، پژوهشگران در تحقیقات خود به این نتیجه رسیده‌اند که برخی از دانش‌آموزان، ضرورت اثبات را درک نکرده و فقط در حد قبول شدن در امتحانات ریاضی برای آن اهمیت قائل‌اند.

با توجه به اهمیت موضوع، درک و فهم تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان از استدلال و اثبات ریاضی و همچنین توانایی آنها در ساخت اثبات، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. بدین منظور پرسش‌نامه‌ای تهیه شد و تعدادی از دانش‌آموزان دختر و پسر که در رشته‌های ریاضی و تجربی مشغول به تحصیل بودند، آن را تکمیل کردند. در مقالهٔ حاضر نتایج این بررسی مطرح می‌شود. در ادامه، پس از بیان ضرورت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، نمونه‌هایی از استدلال دانش‌آموزان را در فرایند اثبات یک گزارهٔ ریاضی، ارائه خواهیم کرد.

ضرورت و اهمیت استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

محققان اهمیت استدلال و اثبات را در ریاضیات مدرسه‌ای مورد بحث قرار داده‌اند و در تحقیقات خود نشان می دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال و اثبات غیرممکن است. برخی از آنها معتقدند که بدون استدلال، فهم ریاضی تنها جنبهٔ ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. همچنین، آنها در تحقیقات خود نشان می‌دهند، دانشی که فاقد توجیه کردن است، به راحتی می‌تواند غیرمنطقی و غیرمستدل باشد. هنگامی که ریاضیات به عنوان علمی مستدل به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها

یاد گرفته می‌شود، دانش به‌دست آمده به راحتی می‌تواند بازسازی شود؛ حتی وقتی که حافظه، رویه‌ها را فراموش می‌کند. استدلال ریاضی به یادگیرندگان اجازه می‌دهد که بین دانش جدید و دانش قبلی اتصال برقرار کنند. در واقع، استدلال ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند، فعالیت‌های ریاضی را به عنوان یک مجموعهٔ منسجم و پیوسته ببینند و مفاهیمشان را به موقعیت‌های دیگر ارتباط دهند.

به‌طور کلی، اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. برای آماردان، اثبات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. در زندگی روزانه نیز افراد به‌طور طبیعی از استدلال‌های غیررسمی استفاده می‌کنند که لزوماً درست نیستند؛ زیرا دقت و منطق لازم را ندارند. برای مثال، گاهی در روابط اجتماعی و زندگی روزمره از مثال‌هایی استفاده می‌کنیم که به راحتی ما را در مورد صحت یک رویداد متقاعد می‌کنند، اما ریاضی‌دان با این شواهد و مدارک قانع نمی‌شود.

در واقع ریاضی‌دانان معتقدند که اثبات ریاضی دارای شرایط و ملاک‌های دقیق‌تری است. آنها بر این باورند که استدلال از طریق مشاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشم‌ها می‌توانند ما را منحرف کنند. اندازه‌گیری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری، به دقت ابزار اندازه‌گیری بستگی دارد. آزمایش نیز به‌طور قطع ثابت نمی‌کند، زیرا نتایج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست. البته در برخی موارد، بین ریاضی‌دانان نیز نظرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقش و اهداف اثبات و آن‌چه که یک اثبات را می‌سازد، مشاهده می‌شود. همان‌گونه که اهمیت اثبات و استدلال‌های منطقی برای ریاضی‌دانان مشخص شده است، دانش‌آموزان و معلمان نیز باید اهمیت و معنای استدلال و اثبات ریاضی را در آموزش درک کنند.

از جمع‌بندی مباحث موجود در تحقیقات مرتبط با استدلال و اثبات می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که به‌طور کلی، اثبات به معنای ارائهٔ استدلال با استفاده از شواهد و مدارک موجود برای تأیید یا رد یک گزاره به منظور متقاعدکردن خود و یا دیگران است.

هارل و **ساودر** (۲۰۰۷) معتقدند معنای اثبات و نقش آن و هر آن‌چه که اثبات را می‌سازد و همچنین ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات، از شخصی به شخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعهٔ دیگر متفاوت است. بسیاری از محققان در زمینهٔ آموزش ریاضی نیز معتقدند که برای ارائهٔ اثبات باید به مخاطبان و جامعهٔ موردنظر توجه داشت. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند. یا آن‌چه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد.

در بحث استدلال و اثبات ریاضی، تنها جنبهٔ منطقی مطرح نیست، بلکه کشف، شهود، خلاقیت، تحلیل، توضیح و ارتباطات، همه نقش اساسی دارند. اهمیت اثبات در آموزش چیزی فراتر از تأیید و تصدیق است. اهمیت آن نیز بدین دلیل است که اثبات می‌تواند روش‌ها، مفاهیم و مسیرهای جدیدی را که در ریاضیات کاربرد وسیعی دارند، نشان دهد، اما نتایج ریاضی در نهایت باید به صورت دقیق اثبات شوند.

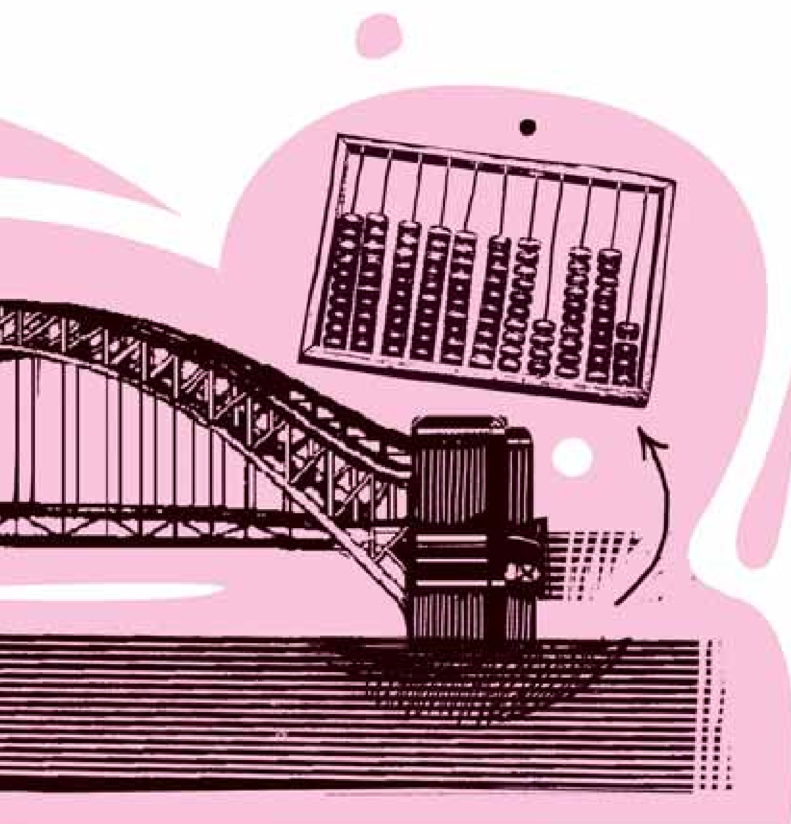
لازم به ذکر است که استفاده از مثال‌های عددی و شکل‌ها یا ابزار دیگر ریاضی در توضیح مفاهیم پیچیده در همهٔ علوم و به‌خصوص در ریاضیات، بسیار مفید است، اما در مواردی که می‌خواهیم درستی یک گزارهٔ ریاضی را به‌طور کلی نشان دهیم و یا به عبارت دیگر، ثابت کنیم، آن‌گاه باید محدودیت مثال‌ها و شکل‌های ریاضی را در نظر بگیریم. برای مثال، ممکن است که با بررسی چند عدد صحیح و یا اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ نتیجه بگیریم که مربع هر عدد حقیقی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. در صورتی که اگر به اعداد بین ۰ و ۱ توجه کنیم (اعدادی که در بیشتر مثال‌ها نادیده گرفته می‌شوند)، آن‌گاه محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.

بنابر ضرورت و اهمیت فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای، در این مطالعه نیز عملکرد تعدادی از دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان در این فرایند، از طریق توزیع و جمع‌آوری یک پرسش‌نامه بین آنها، مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه، نمونه‌هایی از استدلال آنها برای اثبات درستی یک گزارهٔ ریاضی ارائه خواهد شد.



دانش‌آموزان چگونه استدلال می‌کنند؟

در پرسش‌نامه از دانش‌آموزان خواسته شد که درستی گزارهٔ زیر را ثابت کنند:



حاصل جمع هر دو عدد فرد، برابر عددی زوج می‌شود.

استدلال برخی از دانش‌آموزان برای اثبات گزارهٔ موردنظر، به شکل تجربی بود؛ یعنی استدلال‌هایی که براساس شکل (ارائهٔ تصویر) و یا ارائهٔ تعدادی مثال، درستی گزارهٔ موردنظر را تأیید می‌کردند. نمونه‌ای از این استدلال‌ها در نمونه‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

۱. نمونه‌ای از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

در مثال‌های زیر مشاهده می‌کنیم که جمع دو عدد فرد، عددی زوج است. هرچه مثال بیشتری بزنیم، باز هم نتیجه تغییری نمی‌کند:

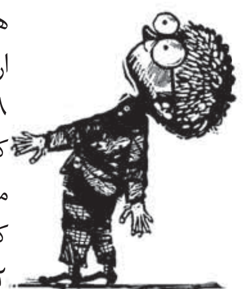
۱۲=۵+۷، ۶=۳+۳، ۸=۳+۵

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جمع دو عدد فرد یک عدد زوج می‌شود.

نظر شما در مورد این استدلال چیست؟ آیا شما آن را به عنوان یک اثبات می‌پذیرید؟

همان‌گونه که می‌دانیم، استفادهٔ درست از مثال‌ها برای درک بهتر مطالب، روشی بسیار مؤثر و مفید است، اما آیا با ارائهٔ چند مثال محدود می‌توانیم به یک نتیجه‌گیری کلی دست یابیم؟! حتی گاهی در زندگی روزمره نیز با ارائهٔ چند مثال، از درستی یک موضوع، به‌طور کامل اطمینان پیدا نمی‌کنیم.

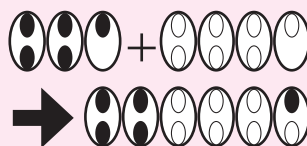
فرض کنید که ما ادعا کنیم، جمع هر دو عدد اول، عددی زوج است و با ارائهٔ سه مثال ۸=۵+۳، ۱۲=۷+۵ و ۱۸=۷+۱۱، درستی این ادعا را تأیید کنیم. آیا شما هم درستی آن‌را تأیید می‌کنید؟ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در این مثال‌ها، وجود عدد اول ۲ را فراموش کرده‌ایم. این‌جاست که محدودیت مثال‌ها مشخص می‌شود.



به عنوان مثالی دیگر، حاصل عبارت n^2+n+41 را به ازای اعداد طبیعی n=۱,۲,۳,۴,۵ به‌دست آورید. مقادیر به‌دست آمده اعدادی اول هستند. آیا می‌توان گفت که مقدار عبارت داده شده به ازای هر عدد طبیعی، عددی اول است؟ برای روشن شدن موضوع عدد ۴۱ را آزمایش کنید.

۲. نمونه‌ای دیگر از استدلال تجربی ارائه شده توسط دانش‌آموزان

اگر مانند شکل زیر، اعداد فرد را دسته‌بندی کنیم، حاصل جمع به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.



این نوع استدلال که آن‌را به عنوان استدلال «تجربی ـ دیداری» مشخص می‌کنیم منطقی است، زیرا دانش‌آموز از شکلی استفاده کرده است که ویژگی بارز و کلی همهٔ اعداد فرد و اعداد زوج را نشان می‌دهد. اما به نظر می‌رسد ارائهٔ چنین استدلالی در دورهٔ متوسطه از طرف دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی و تجربی که با زبان ریاضی و شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا شده‌اند و ضرورت و اهمیت استفاده از زبان ریاضی برای آن‌ها مشخص شده است، کافی نیست.

نمونهٔ دیگری از پاسخ دانش‌آموزان را که به عنوان استدلال‌های صوری مشخص می‌کنیم، در نمونه‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌کنید. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی بیان شده‌اند، استدلال صوری می‌نامیم.

۳. نمونه‌ای از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم a عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a+a=2a$. یعنی حاصل جمع بر ۲ بخش‌پذیر است. پس حاصل جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.



۴. نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط دانش‌آموزان

فرض می‌کنیم که a عددی زوج باشد. پس (a-۱) و (a+۱) اعدادی فرد هستند و داریم: ۲a=(a-۱)+(a+۱). همان‌گونه که نشان داده شد، جواب بر ۲ بخش‌پذیر است، پس زوج است.

شما چه فکر می‌کنید؟ آیا استدلال‌های فوق را به عنوان اثبات گزارهٔ موردنظر می‌پذیرید؟ آیا این استدلال‌ها برای همهٔ اعداد فرد برقرارند؟

با کمی دقت در نمونهٔ ۳ متوجه می‌شویم که دانش‌آموز درستی این گزاره را ثابت می‌کند که: «حاصل جمع هر عدد فرد با خودش، عددی زوج است.» پس هنوز گزاره به‌طور کلی برای هر دو عدد فرد دل‌خواه ثابت نشده است.

در نمونهٔ ۴ نیز، وقتی (a-۱) و (a+۱) به عنوان دو عدد فرد با هم جمع می‌شوند، توجه داشته باشیم که این دو عدد فرد، متوالی (پشت سر هم) هستند. در واقع دانش‌آموز با ارائهٔ چنین استدلالی، درستی این گزاره را نشان می‌دهد که: «حاصل جمع دو عدد فرد متوالی، عددی زوج است.» پس این استدلال را نیز نمی‌توان به عنوان یک اثبات کلی و صحیح برای گزارهٔ ارائه شده در نظر گرفت. این استدلال تنها برای یک موقعیت خاص درست است.

گاهی دانش‌آموزان فکر می‌کنند که نمادهای ریاضی فقط جنبهٔ تشریفاتی دارند. شاید این نوع نگاه و باور را بتوان در استدلال یکی از دانش‌آموزان مشاهده کرد (نمونهٔ ۵).

۵. باز هم نمونه‌ای دیگر از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که تنها جنبهٔ نمادین دارد

اگر x و y دو عدد فرد باشند و: $z=x+y$، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} x=z-y \\ y=z-x \end{cases} \Rightarrow x+y=z-y+z-x$$

در نتیجه: $2z=2x+2y$. پس حاصل بر ۲ بخش‌پذیر است. پس جمع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود.

شاید شما هم به این نتیجه رسیده باشید که استدلال فوق کمی با فرایند دور زدن ارتباط دارد. (البته با عرض معذرت!) باید یک نکته را یادآوری کنیم که وقتی می‌گوییم استدلال‌های تجربی و استفاده از مثال‌های عددی برای اثبات گزاره‌های ریاضی کافی نیست و محدودیت دارد، منظورمان دست و پنجه نرم‌کردن با نمادهای ریاضی و حروف انگلیسی نیست تا شاید به جواب برسیم!

همان‌طور که می‌دانیم، هدف استفاده از زبان ریاضی و نمادها در اثبات گزاره‌های ریاضی، خلاصه‌نویسی و عمومیت بخشیدن به مطلب موردنظر است.

برای مثال، وقتی بیان می‌کنیم که: ۴=۲+۲ و ۸=۴+۴، تنها نشان داده‌ایم که جمع عدد ۲ با خودش برابر ۴ و جمع عدد ۴ با خودش برابر ۸ است. اما وقتی فرض می‌کنیم که a یک عدد زوج است و نشان می‌دهیم که: a+a=۲a. آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم: «حاصل جمع هر عدد زوج دل‌خواه با خودش، عددی زوج می‌شود»، چون بر ۲ بخش‌پذیر است.

در نمونهٔ ۶ نیز نمونه‌ای از استدلال دانش‌آموزان را که به شکل صوری ارائه شده و از لحاظ منطقی درست است مشاهده می‌کنید.

۶. و آخرین نمونه از استدلال صوری ارائه شده توسط یکی از دانش‌آموزان که صحیح است

فرض می‌کنیم $2a+1$ و $2b+1$ دو عدد فرد باشند، به‌طوری‌که: $a,b \in Z$ و داریم:

$$2a+1+2b+1=2a+2b+2=2(a+b+1)$$

پس حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است، (چون بر ۲ بخش‌پذیر است) و بدین‌گونه درستی گزاره ثابت می‌شود.

در استدلال یاد شده، دانش‌آموز



به‌طور صحیح از نمادهای ریاضی استفاده کرده است؛ به‌گونه‌ای که ۲a+۱ و ۲b+۱ نماینده‌ای از دو عدد فرد دل‌خواه هستند و در حالت کلی، درستی گزارهٔ موردنظر ثابت می‌شود. البته بجاست که همانند شروع استدلال، در پایان آن نیز اشاره شود که: $(a+b+1)\in Z$.

گاه حتی می‌توان بدون استفاده از نمادهای ریاضی، درستی یک گزاره را به‌طور منطقی ثابت کرد. در این مطالعه، استدلال‌هایی را که دانش‌آموزان صرف‌نظر از درستی یا نادرستی آنها برای تأیید گزارهٔ موردنظر به صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی بیان کرده‌اند، تحت عنوان استدلال‌های روایت‌گونه مشخص کرده‌ایم. در نمونهٔ ۷، نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یک دانش‌آموز را مشاهده می‌کنید.

۷. نمونه‌ای از استدلال روایت‌گونهٔ یکی از دانش‌آموزان

منظور از عدد فرد، عددی است که دارای چند جفت و یک تکه باشد.

مثلاً عدد ۳، *از جمع ۲ و ۱ ساخته می‌شود و عدد ۵ هم برابرست با جمع ۴ و ۱. وقتی ۳ و ۵ را با هم جمع می‌کنیم، تکه‌ها کنار هم و جفت‌ها هم کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و داریم، ۲=۱+۱ و جمع دو عدد زوج هم زوج می‌شود، یعنی:* ۶=۴+۲. عددهای ۳ و ۵ *را برای مثال گفتم، وگرنه این قانون برای جمع هر دو عدد فرد برقرار است.*

همان‌گونه که در نمونهٔ ۷ مشاهده می‌کنید، دانش‌آموز به شکل توضیحی و بدون استفاده از نمادهای ریاضی درستی گزارهٔ موردنظر را ثابت می‌کند. تعداد کمی از دانش‌آموزان با استفاده از زبان ریاضی و یا به صورت روایت‌گونه، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه را به درستی اثبات کرده‌اند. در صورتی‌که به نظر می‌رسید، گزارهٔ ارائه شده در پرسش‌نامه برای دانش‌آموزان این مقطع، گزارهٔ آشنایی باشد. علاوه بر این، دانش‌آموزان در کتاب‌های ریاضی سال اول و دوم دبیرستان با شکل نمادین اعداد زوج و فرد آشنا می‌شوند، لذا انتظار می‌رفت که عملکرد آنها در فرایند اثبات، عملکرد مناسبی باشد؛ اما نتایج به گونه‌ای دیگر بود.

شما چگونه می‌اندیشید و دلیل عملکرد دانش‌آموزان را چگونه ارزیابی می‌کنید؟ آیا برای توسعهٔ درک و فهم دانش‌آموزان و بهبود توانایی آنها در همهٔ دوره‌های تحصیلی در زمینهٔ استدلال و اثبات ریاضی پیشنهادی دارید؟

لازم به ذکر است که باور و دیدگاه افراد نسبت به مفاهیم استدلال و اثبات، می‌تواند بر توانایی آنها در اثبات درستی یا نادرستی یک ادعا تأثیرگذار باشد. همچنین، آشنایی درست با فرایند استدلال و اثبات و آگاهی از اهداف و کارکردهای آن در ریاضیات مدرسه‌ای نیز می‌تواند ما را در یادگیری بهتر این فرایند یاری رساند. در شماره‌های بعدی این مجله قصد داریم که با مفهوم استدلال و اثبات ریاضی و جایگاه آنها در ریاضیات مدرسه‌ای بیشتر آشنا شویم. تا آن هنگام از شما می‌خواهیم که روی این دو سؤال نیز فکر کنید:

۱. استدلال و اثبات ریاضی را چگونه تعریف می‌کنید؟

۲. با رعایت چه شرایطی می‌توانیم بگوییم که درستی یا نادرستی یک گزارهٔ ریاضی را ثابت کرده‌ایم؟

منابع

۱. تال، دیوید (۱۳۸۵). **ماهیت اثبات ریاضی**. ترجمهٔ عرفان صفر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۱۷-۱۱.

۲. جهانشاهی، محمد (۱۳۸۰). **اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی**. انتشارات مدرسه. چاپ دوم. تهران.

۳. کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). **بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی**. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، (دانشکدهٔ علوم پایه). تهران.

4. Ball, D. L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5. Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms.* Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University, University Park.

6. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5-23.

7. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

8. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education,* 31(4), 396-428.

9. NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

10. Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.



غلامرضا یاسی‌پور



تاریخچه مجلات ریاضی ایران

کلیدواژه‌ها: تاریخچهٔ مجله برهان، تقی فاطمی، مشاهیر ریاضی جهان، ادموند هالی، در باغ تجربه‌ها، ذهن ریاضی، نظریهٔ فاجعه

اشاره

شمارهٔ ۲۱ برهان متوسطه در تابستان ۱۳۷۶ انتشار یافت. این شماره در سال هفتم نشر مجله منتشر شد.

در مقالهٔ «**تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**» این شماره شرح حال **پروفسور تقی فاطمی**، استاد ارجمند دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تهران را می‌خوانیم. در این شرح حال چنین آمده است:

*قبل از تحصیلات عالیه، در یزد به عنوان **مفتش معارف** خدمت می‌کردم و ضمن آن در مدارس آن‌جا به تدریس اشتغال داشتم. بعد که در اصفهان مدرسهٔ متوسطه دایر شد، به آنجا رفتم و دو سال اخر تحصیلات متوسطه را در مدرسهٔ صارمیه گذراندم. مدیر این مدرسه آقای **ضیاءالدین جناب** بودند که هنوز هم مشغول به خدمت فرهنگ می‌باشند و اگر در کار خود توفیقی داشته‌ام، آن را مرهون تشویق‌های ایشان می‌دانم. از جمله معلمان مرحوم، **مهندس علی ریاضی** و **مرحوم غلامحسین زیرک‌زاده** بودند و دیگری **استاد جلال [الدین] همایی** که نه تنها حق تعالیم بر بسیاری از اشخاص را دارد، بلکه با تبحری که در بیشتر علوم و فنون دارد و با تحقیقات و تتبعاتی که در آثار گذشتگان از علمای ایرانی به‌عمل آورده است، فردی ممتاز می‌باشد.*

در سال ۱۳۰۶ با اولین دستهٔ محصلین که از طرف وزارت جنگ به فرانسه اعزام می‌شد، به این کشور رفتم. با وجود این‌که در امتحان مسابقهٔ اعزام رتبهٔ اول شده بودم و می‌توانستم رشتهٔ پزشکی را که آن موقع داوطلب زیاد داشت و از نظر مادی هم دورنمای خوبی داشت انتخاب کنم، اما به علت شوق باطنی، رشتهٔ معلمی را انتخاب کردم و داوطلب ورود به «دانش‌سرای عالی» (Ecole Normale Superieure) پاریس شدم. در فرانسه هنوز دیپلم ایران را نمی‌شناختند. مرا در کلاس پایان تحصیلات متوسطه قبول کردند. اما بعد از یکی دو هفته که معلومات مرا سنجیدند، به کلاس تهیهٔ «Mathematiques speciales» دانشگاه منتقل شدم. به علاوه همین موضوع باعث شد از آن تاریخ به بعد در فرانسه دیپلم ایران را بشناسند.

سه سال در کلاس تهیه ماندم و بعد در امتحان مسابقهٔ ورودی مدارس بزرگ شرکت کردم. در امتحان کتبی پذیرفته شدم، اما فقط در امتحان شفاهی «اکل نرمال سوپریور» شرکت کردم و پذیرفته شدم. طبق معمول در سال اول، دروس دورهٔ لیسانس ریاضی را تهیه کردم و گذراندم و در دو سال آخر دورهٔ مدرسه برای تعلیم و تدریس مهیا شدم. ضمناً دیپلم هندسهٔ عالی را گرفتم. بالاخره در آخرین مرحله، امتحان «آگرگاسیون» را گذراندم و قبول شدم. در این موقع، سال ۱۳۱۲، به ایران برگشتم. ابتدا دو سه ماهی منحصراً در مدارس نظام مشغول بودم. بعد با اقداماتی که از طرف وزارت فرهنگ به عمل آمد، به آن وزارت منتقل شدم و در دانشکدهٔ علوم و دانش‌سرای عالی به تدریس مشغول شدم. علاوه بر آن، در دانشکدهٔ فنی هم تدریس داشتم. در ابتدای ورود، در چند رشته تدریس می‌کردم؛ علاوه بر مکانیک استدلالی که هنوز هم درس می‌دهم، مادامی که استاد به قدر کافی نبود، در دانشکدهٔ علوم، ریاضیات عمومی و آنالیز را نیز تدریس می‌کردم.

غیر از تدریس، فقط چند ماهی در وزارت فرهنگ به عنوان مدیرکل فنی خدمت کرده‌ام. بعد آن را کنار گذاشتم؛ شغل معلمی را به هر کار دیگر ترجیح می‌دهم.

در مقالـهٔ «**آموزش ریاضی بـا تأکید بـر کاربردها**» از **محســن صدیقی** در مورد «**رفع خودنابـاوری**» این مطلب آمده اســت: «یکی از مسائلی که بین دانشجویان ریاضی (و در کل علوم)، به‌خصوص در مقایسه با دانشجویان مهندسی و پزشــکی، کاملاً محســوس اســت، این نکته می‌باشد که دانشجوی کارشناسی ریاضی مشخص‌ترین جایگاه خود در اجتماع را تدریس می‌بیند. و علی‌رغم این که برای شأن معلم صحبت‌های بســیاری مطرح می‌شود، در عمل یک مهندس یا پزشــک از جایگاه اجتماعی بالاتری برخوردار اســت. این موضوع تا آن‌جا پیش می‌رود که چه بســا دانشجوی ریاضی خود را از مرتبهٔ پایین‌تری نســبت به دانشجوی مهندسی و پزشــکی احســاس می‌کند. به نظر من این‌که دانشجو بداند چه جایگاهی در شاخه‌های متفاوت علوم و فناوری می‌تواند داشته باشد، در خودباوری او کاملاً مؤثر است.»

مقالهٔ «**مشــاهیر ریاضی جهان**» نیز شرحی دارد دربارهٔ زندگــی **نیوتن**، از فرهنــگ ریاضیات آکســفورد که در آن چنین آمده اســت: «**نیوتن، ایزاک** (۱۶۴۲–۱۷۲۷). نیوتن به عنوان پسر کشاورزی در **لینکلن شایر** تولد و رشد یافت، تا بر ریاضیات و فیزیک قرن هفدهم حکومت کند و در آنها انقلابی به‌وجود آورد. اســاس حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریهٔ مکانیک، قانون جاذبه، نظریهٔ حرکت سیاره‌ای، نظریهٔ رنگ‌ها، **ســری دو جمله‌ای** و نتایج مهم بســیاری در نظریهٔ معــادلات را به او مدیونیــم. کار آنالیز عــددی بدون **روش نیوتن** لنگ می‌ماند. اظهارات در خور شایستگی‌های نسبی ریاضی‌دان‌هایی با این درجه اســتعداد، همواره بحث‌برانگیز بوده است، اما در مورد نیوتن، از آن‌جا که به نظر می‌رسد که هم **گاوس** هم **اینشــتین** مقام برتر را به نیوتن داده‌اند، نیاز به مجادله نیست. تنفری بیمارگونه از انتقاد، نیوتن را از نشر بسیاری از آثارش بازداشت.



در ســال ۱۶۸۴، **ادمونــد هالــی**[1] که ســتارهٔ دنباله‌داری به نام اوســت، به نیوتن پیشــنهاد کرد در مورد قانون جاذبه‌ای که قوانین حرکت ســیاره‌ای **کپلر** را به‌دســت می‌دهد، تحقیق کند. نیوتن که قبلاً در مورد این موضوع کار کرده بود، بلافاصله پاسخ داد که قانون مربع معکوس است. هالی که از این واقعه تقریباً تکان‌خورده بود، بر آن شد که نیوتن را به چاپ نتایجش وادارد و نیوتن ســرانجام این کار را انجــام داد. نیوتن هنــگام تصدی امور ضراب‌خانه مدیر بسیار قابلی بود و اصلاحات عمیقی در پول رایج بریتانیا انجام داد. مقبره و بنای یادبودش در کلیســای **وست مینستر** واقع است. **ولتر** در مورد نیوتن چنین گفت: مدفون چونان سلطانی.»

در مقالهٔ «ترکیبیّات» از **سیمین اکبری‌زاده** در مورد این شــاخهٔ مهم ریاضیات معاصر چنین می‌خوانیم: «ترکیبیات شاخه‌ای بســیار قدیمی از ریاضیات است که بیشتر هنگام مطالعهٔ جایگشــت‌ها و ترکیب‌ها با آن آشــنا شــده‌ایم. در ســال‌های اخیر، هم به دلیل آن‌که رایانه‌ها امکان محاسبات ترکیباتی را که پیش از این ممکن نبود، فراهم ساخته‌اند، و هم به این دلیل که بسیاری از مسائل ریاضی که در تحقیقات علوم رایانه‌ای مطرح شــده‌اند، به روش‌های ترکیبیاتی نیاز دارند، رشدی انفجارآمیز در این زمینه به‌وجود آمده است.»

در مقالـهٔ «**در باغ تجربه‌ها**» پای صحبت **اســتاد احمد بیرشک** می‌نشینیم. در آن چنین آمده است:

○ استاد به نظر شما فلسفهٔ ریاضیات چیست؟ آیا فلسفهٔ ریاضی بخشی از ریاضیات است یا بخشی از فلسفه؟

● تعداد رشــته‌های ریاضی در حال حاضر آن‌قدر زیاد است که هیچ‌کس نمی‌تواند در همهٔ رشــته‌های ریاضی تخصص داشــته باشد. حتی در بعضی از رشته‌ها یک عمر لازم است تا آدم تخصص پیدا کند. فلســفهٔ ریاضی به معنی فلســفه نیســت، بلکه روش‌هایی که برای آسان کردن درک ریاضی و ثمربخش‌بودن آن است، مجموعاً فلسفهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهند. کتاب‌های فلســفهٔ ریاضــی مرتب روی روش‌های متفاوت ریاضی بحث می‌کنند.

○ در این مرحله خوش‌حال می‌شویم از خاطرات خودتان برایمان بگویید.

● من دربارهٔ خاطراتم نمی‌توانم زیاد صحبت کنم، به دلیل این‌که عمرم دراز بوده و سراسر خاطره است. انتخاب کردن و گلچین کردن هم مشکل است. دیگر این‌که خاطرات افراد خیلــی به درد دیگران نمی‌خورد. بنابراین من فقط می‌توانم دربــارهٔ یک خاطــرهٔ ریاضی که به قول یکی از دوســتان به داستان می‌ماند، صحبت کنم: من تحصیلاتم بسیار نامرتب بــود، برای این‌که در خدمت پدر بودم. پدر عضو گمرک بود و مجبــور بود در مرزهــا خدمت کند. آن وقت‌ها هم که من نوجوان بودم، در مرزهایمان هیچ وســیلهٔ تحصیل نبود. در نتیجه مقدمات را پیش پدر آموختم و بعد هم خودم شــروع کردم پیش خودم کار کردم. بنابراین خیلی جنبهٔ خودآموخته دارم. چیزهایی که یاد گرفتم خودم یاد گرفتم. باری در دورهٔ















ابتدایی فقط شش ماه مدرسه رفتم و دورهٔ متوسطهٔ شش ساله را در دو سال طی کردم. یعنی سال‌های اول و دوم متوسطه را تابستان پیش معلمی خواندم، سال سوم را در مدرسه خواندم، سال چهارم را پیش خودم خواندم، سال پنجم را در مدرسه خواندم، و سال ششم را پیش خودم خواندم تا دورهٔ متوسطه تمام شد.

خاطره‌ای که دارم دربارهٔ سال چهارم است. من سال سوم را که امتحان دادم، کتاب‌ها را زدم زیر بغل و رفتم خدمت پدر که تابستان را با هم باشیم. در آن‌جا تا توانستم تلاش کردم و یاد گرفتم. آمدم تهران که کلاس چهارم را امتحان بدهم و بروم کلاس پنجم. وقتی که آمدم شهریور گذشته بود و امتحانات تمام شده بود. به هر مدرسه‌ای که برای امتحان تجدیدی رفتم، گفتند امتحاناتمان تمام شده، کاری نمی‌توانیم بکنیم. اما من هم نمی‌خواستم یک سال عمرم تلف بشود. بعد از این‌که از همه جا ناامید شدم، به من خبر دادند که در خیابان امیریه، خیابان منیریه، مدرسه‌ای هست به نام «شرف مظفری». آخرین امید بود.

رفتم به مدرسه. مدیر مدرسه مردی بود خیلی جدی و با هیبت و وسط اتاق ایستاده بود. سلامی کردم و گفتم ماجرا این است. می‌خواهم امتحان بدهم. گفت: «امتحاناتمان تمام شده، نمی‌توانیم امتحان بگیریم، پسر برو.»

اصرار کردم، به دلیل این‌که آخرین امید بود. گفت: «بهت می‌گویم نمی‌توانیم. پسر اسمت چیست؟»

گفتم: «اسمم احمد بیرشک است.»

گفت: «احمد بیرشک تویی؟!»

گفتم: «بله.»

گفت: «خوب برو به آن آقای ناظم که کنار استخر راه می‌روند بگو برایت یک فکری بکنند.»

من با خوش‌حالی رفتم سراغ آقای ناظم. سلام کردم. آقای ناظم همان کسی بود که بعدها در وزارت آموزش‌وپرورش به وزارت رسید؛ **دکتر مهران**. آن وقت اسمش **صادقی** بود. رفتم سلام کردم و مطلبم را گفتم. ایشان خیلی مؤدب، نه این‌که بگویند پسر برو، گفت: «خیلی معذرت می‌خواهم. خیلی دلم می‌خواست کاری انجام بدهم، ولی امتحاناتمان تمام شده و کاری نمی‌توانیم بکنیم.»

گفتم: «آقای ناظم! آقای مدیر به من گفتند که بیایم خدمت شما برایم کاری انجام بدهید، نه این‌که بگویید نمی‌شود.»

گفت: «آقای مدیر فرمودند؟»

گفتم: «بله.»

گفت: «خوب، اسم شما چیست؟»

گفتم: «اسم بنده احمد بیرشک است.»

گفت: «آقای احمدخان بیرشک جناب‌عالی هستید؟!»

گفتم: «بله بنده هستم.»

گفت: «خوب فردا صبح بیایید امتحان بدهید.»

روز بعد رفتم امتحان دادم و بالاخره رفتم کلاس پنجم.

این مطلب برای من معما شده بود که چه‌طور آدمی که تهران را بلد نیست، دو تا آدم بزرگ مثل رییس و ناظم یک مدرسه با اسمش آشنا هستند و اسمش مشکل‌گشا می‌شود؟! تحقیق کردم و معلوم شد، مدرسهٔ شرف شاگردی داشت در کلاس سوم، هم‌کلاس من که می‌خواست امتحان بدهد. این‌ها دنبال آن بودند که شاگرد اول ایران را بیرون بدهند. **عبدالرسول دبیر** که شاگردشان بود، امتحانات را داده بود و بعد که رفته بودند نتیجه را بگیرند، دیده بودند عبدالرسول دبیر با معدل ۱۵/۸۷ شده شاگرد اول ایران. اما دو نفر معدل ۱۵/۸۷ دارند: یکی همین عبدالرسول دبیر است و یکی هم احمد بیرشک. اسم من به خاطرشان مانده بود. پس وقتی من آمدم به ایشان گفتم اسمم احمد بیرشک است، دیدند این همان کسی است که با شاگرد اولشان هم نمره است.

در مقالهٔ **«مقالات کوتاه از مجلات ریاضی معتبر جهان»** زیر عنوان **«یک ذهن ریاضی حیرت‌انگیز»** در شرح حال **گاوس**، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی، چنین می‌خوانیم: **«کارل فردریش گاوس** در سال ۱۷۷۷ در **برونسویک** که اکنون در آلمان غربی است، متولد شد. پدرش بنا بود و امید داشت که

پســرش بتواند در کارها به او کمک کند. هنگامی که گاوس در ســه سالگی توانست محاسبات پرداخت حقوق پدرش را تصحیح کند، چنین معلوم شــد که شغل اخیر شغلی است که گاوس کوچک بسیار مناســب آن است. خوش‌بختانه از لحاظ آیندهٔ ریاضیات (اگر از فیزیک و نجوم چیزی نگوییم) حاکم آن ناحیه از نبوغ کودک خردســال آگاه شــد و تعلیم مرتب او را برقرار ســاخت. گاوس در ســن ۱۵ ســالگی، در حالی که بسیار جلوتر از توانایی‌های معلمان خود بود، به کالج **کارولین** رفت. طی ســه سال اســتادان این کالج هم مجبور شدند بپذیرند که آنها را نیز پشت‌سر نهاده است.»

«**ادب ریاضی**» این شــماره دربارهٔ روش اصل موضوعی چنیــن می‌گوید: «روش **اصل موضوعــی** در ریاضیات امروز گســترش و توفیق زیادی پیدا کرده اســت. سرچشمهٔ این روش را باید کشــف هندسهٔ نااقلیدسی **لباچفسکی** دانست. این روش، در تماس و برخوردی که با دیگر اندیشه‌ها داشت، نه تنها روش‌های تازه‌ای را به‌وجود آورده، بلکه ضمناً موجب پیدایش شاخه‌های تازه‌ای در اندیشهٔ فیزیک و ریاضی شده است. یکی از نمونه‌های حاصل از این روش، **فضای هیلبرتی** است که در مکانیک کوانتایی مورد استفاده قرار گرفته است.

پیشــرفت روش اصل موضوعی را می‌توان به دو مرحله تقســیم کرد: مرحلهٔ نخست از لباچفسکی آغاز می‌شود و با کوشــش‌های هیلبرت دربارهٔ اصل موضوعی کردن ریاضیات پایــان می‌یابد و مرحلهٔ دوم از زمــان هیلبرت تا امروز ادامه دارد. مرحلهٔ دوم عبارت اســت از تلفیق مضامین هندسی با آموزشــی که همراه بــا آن تکامل‌یافته و به **منطق صوری** یا **منطق ریاضی** مشهور شده است.»

بعضی دیگر از مقالات این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری
- رســم نمــودار تابــع f/ ۱ روی نمودار تابــع f/ احمد قندهاری
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- رادیکال/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- نامساوی‌ها در احتمال/ سیامک جعفری
- منطق خود را بیازمایید/ حسن نصیرنیا
- مکان هندسی/ محمدهاشم رستمی

بیســت و دومین شــمارهٔ برهان در پاییز ۱۳۷۶ انتشار یافت. در «**ادب ریاضی**» این شــماره دربارهٔ اولین شــاخه و انشــعاب علمی از کتاب «**تاریخ علومِ**» **پی یر روسو** چنین آمده اســت: «اولین شاخه و انشعاب علمی، آن شعبه‌ای بود که مطلقاً به تجربه احتیاج نداشت و برای پیدایش آن حداقل توجــه و علاقه‌منــدی لازم بود. اما چه کســی برای این کار علاقه‌مندتر از چوپانی اســت که چون گلهٔ خود را به چراگاه می‌برد، شبانگاه هنگام مراجعت می‌خواهد بداند که همهٔ آنها به جای خود هستند یا نه؟ خواهید گفت که برای اطمینان از این مطلب کافی بود که چوپان گوسفندان خود را بشمارد. اما چوپان عهد حجر هنوز شمردن نمی‌دانست و با این حال طبعاً جهل او مانع آن نمی‌گردید که وی تعداد واقعی آنها را معین کند. زیرا مرغ خانگی نیز که حســاب و حساب کردن نمی‌داند، هنگامی که یکی از جوجگان او غایب باشند، ناله و فریاد می‌کند و او را می‌طلبد.

اما به زودی، چه چوپان و چه آن کشــاورزی که احتیاج داشت تا وسعت مزرعهٔ خود را تعیین کند و چه بسیار کسان دیگر، در نتیجهٔ احتیاج مجبور شــدند نوعی وسیلهٔ شمارش دقیق‌تــر ـ غیر از غریزهٔ طبیعی خود ـ به‌وجود آورند و برای این کار انگشتان دست، دستگاه حساب‌کردن آماده و مهیایی بود.»

در مقالــهٔ «**رســم منحنی‌هــای توابــع سینوســی و کسینوسی**» از **میرشهرام صدر** دربارهٔ حرکت تناوبی چنین می‌خوانیم: «هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شــود، حرکت تناوبی اســت. جهان پر از حرکت‌های تناوبی اســت که از آن جمله می‌توان از نوسان‌های رقاصک ساعت مچی، ســیم تار مرتعش، جرم آویزان متصل به فنر در حال نوسان، عقربهٔ کوچک ساعت که بعد از طی ۱۲ ساعت دوباره مســیر اولیه را تکرار می‌کند و پاندول ساعت که هر رفت و برگشــت را در مدت یک ثانیه طی می‌کند و دوباره مســیر رفت و برگشت اولیه را تکرار می‌کند.»

در مقالــهٔ «**مقالات کوتــاه از مجله‌هــای ریاضی معتبر جهان**» در مورد قضایای «**سِــوا**» و «**مِنِلائوس**» آمده است: «قضایای **سِوا** و **مِنِلائوس** که به‌زودی از آنها سخن خواهیم گفت، از جذاب‌ترین و پربارترین قضایای هندســهٔ مسطحهٔ مقدماتی هســتند. بیان این قضایا آسان، و خود قضایا کاملاً عمومی‌انــد. مثلاً قضیهٔ منلائوس، در مــورد هر مثلث و هر خــط قاطع ناگذرنده از رأس آن بــه‌کار می‌رود. این قضایا و اثبات آنها، چنان که از نامش پیداست، قضایایی کلاسیک‌اند. منلائوس یونانی در قرن اول میلادی می‌زیست، و **جیووانی ســوای ایتالیایی**[۲] قضیهٔ خود (و قضیهٔ دوباره کشــف کردهٔ منلائوس) را در قرن هفدهم میلادی انتشار داد.»

در مقالهٔ **مشــاهیر ریاضی جهــان** دربارهٔ **رنه توم**، واضع

«**نظریـهٔ فاجعـه**» ایـن مطلـب را می‌خوانیم: «**تـوم، رنه** (۱۹۲۳-). توم ریاضی‌دانی فرانسـوی اسـت که بیشـتر به‌خاطر نظریهٔ سـاخت تکوینی معروف است. این نظریه که به نظریهٔ فاجعه مشـهور اسـت، یکی از کوشش‌های جدی و معـدود در به‌کار گرفتن ریاضیـات در قالب‌ها و جریانات موجودات زنده است. اغلب کوشش‌های قبلی به‌طور طبیعی در مسـیر کمّی‌بودن در سـنت ریاضیات کاربـردی انجام گرفته‌انـد، و توسـط پیچیدگی محض طبیعت با شکسـت مواجه شده‌اند. نظریهٔ توم از این توان برخوردار است که هم کیفی و هم دقیق است.»

در **ادب ریاضـی** این شـماره، در مطلبـی دربارهٔ تاریخ ریاضـی آمده اسـت: «این‌قدر می‌دانیم که در حدود سـال ۴۵۰ قبل از میلاد مسـیح یونانیان دارای هندسه‌ای بدوی و مقدماتی بوده‌اند. موضوع این هندسه فقط طریقه‌های عملی و دسـتورهای قابل اسـتفاده در اندازه‌گیری طول پارچه یا میزان محصول زیتون نبوده است، بلکه استدلال‌ها و براهین منطقی متصل به یکدیگر در آن دیده می‌شـد که در حدود هندسـهٔ مقدماتی ما بوده‌اند. بدون شـک این اسـتدلال‌ها چندان دقیق نبوده‌اند و بیشـتر از الهام و مکاشـفه استفاده می‌کردند تا از منطق و بیشـتر آنها مربوط به ساختمان‌های هندسی بوده‌اند.»

بعضی دیگر از مقاله‌ای این شماره عبارت‌اند از:

- شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید/ پرویز شهریاری
- چند نکته دربارهٔ f(x)ها/ احمد قندهاری
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- ریاضیات گسسته/ غلامرضا یاسی‌پور
- هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو/ محمدصادق عسگری
- روش‌هـای عـددی برای محاسـبهٔ مقـدار تقریبی انتگرال‌های معین/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
- میانگین همساز/ پرویز شهریاری
- تئوری زوج خط/ سیامک جعفری
- کامپیوتر و شغل آینده/ محسن صادقی مشکنانی

مجلـه با حـل مسـئلهٔ مسـابقه‌ای برهـان ۲۰ و حل مسئله‌های برهان شمارهٔ ۲۱ پایان می‌پذیرد.

پی‌نوشت

1. Edmond Halley
2. Giovanni Ceva

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

چند معمای خواندنی



- این معما را برای هر کس که نقل کنید و برای نخستین بار پاسخ صحیح بدهد، به راستی انسان باهوشی است! اول خودتـان امتحـان کنید، بعد حتماً برای دیگران هم آن را مطرح خواهید کرد. برای حل آن اطلاعات زیادی هم نیاز ندارید، کافی است با چهار عمل اصلی و شمارش اعداد آشنا باشید. این شما و این هم معمای ویژهٔ اول:

اتوبوسـی از مبدأ حرکت خود با ده مسـافر به راه می‌افتد. در ایسـتگاه اول سه مسـافر پیاده و دو مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد دو مسافر پیاده و سه مسافر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد چهار مسافر سوار و دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد دو نفر پیاده می‌شوند، در ایستگاه بعد پنج نفر پیاده و دو نفر سوار می‌شوند، در ایستگاه بعد تنها سـه نفر سوار می‌شـوند و بالاخره در ایستگاه آخر دو نفر پیاده می‌شوند. پس از آن هم اتوبوس به مقصد نهایی می‌رسد. حالا بگویید در این مسیر چند ایستگاه وجود داشت!



- این یکی کمی جدی اسـت و به قشـنگی معمای اول نیسـت! کاوه و شهریار دو برادر دوقلو و کاملاً شـبیه به هم بودند. من سـال‌ها پیش با آنها آشنا بودم و می‌دانستم که یکی از آنها همیشه دروغ و دیگری همیشه راست می‌گوید. ولی حالا یادم نیست کدام دروغ‌گو و کدام راست‌گو بود. حالا بعد از سال‌ها آنها را پیدا کرده‌ام و می‌خواهم کاوه را بشناسم، چون با او کار واجبی دارم! چه‌طور می‌توانم با یک سؤال ـ بله فقط یک سؤال، آن هم سؤالی که پاسخ آن فقط بله یا خیر باشد ـ کاوه را بشناسم؟! توجه داشته باشید فقط می‌توانم یک سؤال از یکی از آنها بپرسم. پاسخ را در شمارهٔ آینده ببینید.

یک نابرابری مرتبط با نقطهٔ ویژه‌ای در مثلث

ترجمه: عباس روح‌الامینی

آموزشی

کلیدواژه‌ها: نقطهٔ داخلی مثلث، نقطهٔ فرمایی، نقطهٔ بروکارد، نابرابری کوشی، قضیهٔ سینوس‌ها، قضیهٔ کسینوس‌ها

مقدمه

F را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه F «نقطهٔ فرمایی» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{AFB}=\widehat{BFC}=\widehat{CFA}=120^\circ$$

همچنین، Ω را یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC در نظر بگیرید. آن‌گاه Ω «نقطهٔ بروکارد» مثلث نامیده می‌شود اگر:

$$\widehat{\Omega AB}=\widehat{\Omega BC}=\widehat{\Omega CA}$$

در مورد نقطهٔ فِرما و نقطهٔ بروکارد مثلث تعدادی مقاله وجود دارد که این مقاله نتیجهٔ جدیدی به آنها افزوده است.

نتیجهٔ مهم

قضیهٔ ۱: فرض کنید F نقطهٔ فرمایی مثلث ABC باشد که: $\widehat{BCA}<120^\circ$، $\widehat{ABC}<120^\circ$ و $\widehat{CAB}<120^\circ$.

و نیز فرض کنید Ω_a، Ω_b و Ω_c به ترتیب نقطه‌های بروکارد مثلث‌های FCA، FBC و FAB را مشخص کنند و بتوانید بنویسید:

$$\widehat{\Omega_a FB}=\widehat{\Omega_a BC}=\widehat{\Omega_a CF}=\alpha$$
$$\widehat{\Omega_b FC}=\widehat{\Omega_b CA}=\widehat{\Omega_b AF}=\beta$$
$$\widehat{\Omega_c AB}=\widehat{\Omega_c BF}=\widehat{\Omega_c FA}=\gamma$$

آن‌گاه داریم:

$$\cot g\alpha+\cot g\beta+\cot g\gamma\geq 5\sqrt{3}$$

لم ۱: اگر F نقطهٔ فرمایی مثلث ABC باشد و: $\widehat{BCA}<120^\circ$ و $\widehat{ABC}<120^\circ$ و $\widehat{CAB}<120^\circ$ و اگر طول اضلاع BC، CA و AB را به‌ترتیب با a، b و c مشخص کنیم و مساحت مثلث ABC را با Δ نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

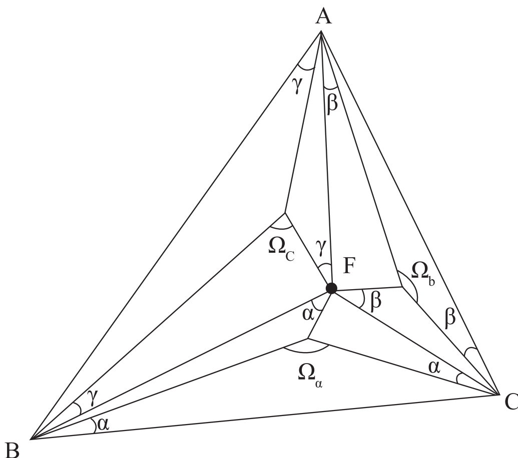
$$(AF+BF+CF)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta$$

اثبات: به کار بردن قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BCF نتیجه می‌دهد:

$$a^2=BF^2+CF^2-2BF\times CF\cos\widehat{BFC}$$
$$=BF^2+CF^2+BF\times CF$$

به‌طور مشابه:

$$b^2=CF^2+AF^2+CF\times AF$$
$$c^2=AF^2+BF^2+AF\times BF$$



بنابراین:

$$a^2+b^2+c^2=2(AF^2+BF^2+CF^2)+AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF=2(AF+BF+CF)^2-3(AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF)$$

و از آنجا:

$$(AF+BF+CF)^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\frac{3}{2}(AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF)$$



چون:

$$\Delta=\frac{۱}{۲}AF\times BF Sin\widehat{AFB}+\frac{۱}{۲}BF\times CF Sin\widehat{BFC}$$
$$+\frac{۱}{۲}CF\times AF Sin\widehat{CFA}=\frac{۱}{۲}AF\times BF\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}BF$$
$$\times CF\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}CF\times AF\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ما داریم:

$$AF\times BF+BF\times CF+CF\times AF=\frac{۴\Delta}{\sqrt{۳}}$$

و بنابراین:

$$(AF+BF+CF)^{۲}=\frac{۱}{۲}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})+۲\sqrt{۳}\Delta$$



لِم ۲: فرض کنید Ω نقطهٔ بروکارد مثلث ABC باشد و: $\widehat{\Omega AB}=\widehat{\Omega BC}=\widehat{\Omega CA}=\omega$.
طول اضلاع BC، CA و AB را به ترتیب با a و b و c مشخص کنید و مساحت مثلث ABC را Δ بنامید. آن‌گاه داریم:

$$cot\omega=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۴\Delta}$$

اثبات: به‌کار بردن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ΩAC نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\Omega A}{Sin\omega}=\frac{b}{Sin(۱۸۰^{\circ}-\omega-(A-\omega))}=\frac{b}{SinA}$$

بنابراین:

$$\Omega A=\frac{b}{SinA}Sin\omega$$

به‌طور مشابه:

$$\Omega B=\frac{c}{SinB}Sin\omega \quad \Omega C=\frac{a}{SinC}Sin\omega$$

داریم:

$$\Delta=\frac{۱}{۲}\Omega A\times\Omega B Sin\widehat{A\Omega B}+\frac{۱}{۲}\Omega B\times\Omega C Sin\widehat{B\Omega C}$$
$$+\frac{۱}{۲}\Omega C\times\Omega A\times Sin\widehat{C\Omega A}=\frac{۱}{۲}\frac{b}{SinA}Sin\omega\frac{c}{SinB}Sin\omega SinB$$
$$+\frac{۱}{۲}\frac{c}{SinB}Sin\omega\frac{a}{SinC}Sin\omega SinC$$
$$+\frac{۱}{۲}\frac{a}{SinC}Sin\omega\frac{b}{SinA}Sin\omega SinA$$
$$=\frac{۱}{۲}Sin^{۲}\omega(\frac{bc}{SinA}+\frac{ca}{SinB}+\frac{ab}{SinC})$$

همچنین:

$$\Delta=\frac{۱}{۲}bcSinA=\frac{۱}{۲}caSinB=\frac{۱}{۲}abSinC$$

بنابراین:

$$\Delta=\frac{۱}{۲}Sin^{۲}\omega(bc\frac{bc}{۲\Delta}+ca\frac{ca}{۲\Delta}+ab\frac{ab}{۲\Delta})$$
$$=\frac{Sin^{۲}\omega}{۴\Delta}(a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+a^{۲}c^{۲})$$

و در نتیجه:

$$Sin^{۲}\omega=\frac{۴\Delta^{۲}}{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}$$

پس:

$$cos^{۲}\omega=۱-\frac{۴\Delta^{۲}}{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}$$
$$=\frac{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}-۴\Delta^{۲}}{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}}$$

بنابراین:

$$cot\omega=\frac{\sqrt{a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+c^{۲}a^{۲}-۴\Delta^{۲}}}{۲\Delta}$$

چون:

$$\Delta^{۲}=(\frac{۱}{۲}abSinC)^{۲}=\frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}(۱-cos^{۲}C)$$

داریم:

$$۴\Delta^{۲}=a^{۲}b^{۲}(۱-(\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab})^{۲})$$
$$=a^{۲}b^{۲}\frac{۴a^{۲}b^{۲}-(a^{۲}+b^{۲}-c^{۲})^{۲}}{۴a^{۲}b^{۲}}$$
$$=-\frac{۱}{۴}(a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}-۲a^{۲}b^{۲}-۲b^{۲}c^{۲}-۲a^{۲}c^{۲})$$

و از آنجا:

$$a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+a^{۲}c^{۲}-۴\Delta^{۲}=a^{۲}b^{۲}+b^{۲}c^{۲}+a^{۲}c^{۲}$$
$$+\frac{۱}{۴}(a^{۴}+b^{۴}-c^{۴}-۲a^{۲}b^{۲}-۲b^{۲}c^{۲}-۲c^{۲}a^{۲})$$
$$=(\frac{۱}{۲}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}))^{۲}$$

بنابراین:

$$cot\omega=\frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۴\Delta}$$

لِم ۳: اگر x_i اعداد حقیقی و y_i اعداد حقیقی مثبت باشند

$(i=1,2,3,\ldots,n,\ n\geq 2, n\in N)$، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\geq\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}$$

اثبات: فرض می‌گیریم: $b_i=\sqrt{y_i}$ و $a_i=\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$

$i=1,2,3,\ldots,n$ و آنها را در نابرابری «کوشی»[1] قرار می‌دهیم:

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\geq(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$$

به‌دست می‌آید:

$$(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i})(\sum_{i=1}^{n}y_i)\geq(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

اثبات قضیهٔ ۱: اگر Δ_a، Δ_b و Δ_c مساحت‌های مثلث‌های FBC، FCA و FAB را به‌ترتیب مشخص کنند، چون Ω نقطهٔ بروکارد مثلث FBC است، بنا بر لم ۲ داریم:

$$\cot\alpha=\frac{1}{4\Delta_a}(FB^2+BC^2+FC^2)$$

به‌طور مشابه:

$$\cot\beta=\frac{1}{4\Delta_b}(FC^2+CA^2+FA^2)$$

$$\cot\gamma=\frac{1}{4\Delta_c}(FA^2+AB^2+FB^2)$$

و از آنجا:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{1}{4}(\frac{FB^2}{\Delta_a}+\frac{FC^2}{\Delta_b}+\frac{FA^2}{\Delta_c})$$

$$+\frac{1}{4}(\frac{FC^2}{\Delta_a}+\frac{FA^2}{\Delta_b}+\frac{FB^2}{\Delta_c})+\frac{1}{4}(\frac{a^2}{\Delta_a}+\frac{b^2}{\Delta_b}+\frac{c^2}{\Delta_c})$$

بنابراین، بنا بر لم ۳:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\frac{1}{4}\frac{(FB+FC+FA)^2}{\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c}$$

$$\frac{1}{4}\frac{(FC+FA+FB)^2}{\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c}+\frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c}$$

بنا بر لم ۱ و اینکه $\Delta=\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c$، داریم:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\Delta)$$

$$\times 2+\frac{1}{4}\frac{1}{\Delta}(a+b+c)^2=\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\sqrt{3}+\frac{1}{4\Delta}(a+b+c)^2=\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)+\sqrt{3}$$

چون:

$$a^2+b^2\geq 2ab,\ b^2+c^2\geq 2bc,\ c^2+a^2\geq 2ac$$

داریم:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

فرض می‌کنیم $P=\frac{1}{2}(a+b+c)$ و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geq 16r^2P^2=16\Delta^2$$

زیرا:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geq ab.bc+bc.ac+ac.ab$$
$$=abc(a+b+c)$$

اما می‌دانیم که: $abc=4R\Delta$

بنابراین:

$$abc(a+b+c)=4R\Delta(2P)=8(RP\Delta)\geq 8(2rP\Delta)$$

زیرا: $R\geq 2r$، ولی: $\Delta=rp$. بنابراین:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geq 16\Delta^2$$

از آنجا:

$$(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)\geq 16\Delta^2$$

و:

$$(ab+ac+bc)^2\geq 2\times 4RrP\times 2P+16\Delta^2$$
$$=16RrP^2+16\Delta^2$$

با استفاده از نابرابری اولر $R\geq 2r$ داریم:

$$(ab+ac+bc)^2\geq 32r^2P^2+16\Delta^2=32\Delta^2+16\Delta^2$$
$$=48\Delta^2$$

و یا:

$$ab+bc+ac\geq 4\sqrt{3}\Delta$$

و:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2)$$

$$+\frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)+\sqrt{3}$$

$$\geq\frac{1}{4\Delta}(ab+ac+bc)+\frac{3}{4\Delta}(ab+ac+bc)+\sqrt{3}$$

پس:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\frac{1}{\Delta}(ab+bc+ac)+\sqrt{3}$$
$$\geq 4\sqrt{3}+\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

یعنی:

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq 5\sqrt{3}$$

بنابراین نابرابری (۱) ثابت شد.

پی‌نوشت

1. Cauchy

منبع

مقاله‌ای از مجله Math. Spectrum (Volume 40 Number1)



نوشته: Tran Quang Hung
ترجمه: محمدرضا نوری

چند نامساوی هندسی

کلیدواژه‌ها: نامساوی هندسی، نامساوی کُشی ـ شوارتز، دایرهٔ محیطی، دایره محاطی

پیشگفتار

در مقاله‌ای که به تازگی توسط **فام هودوک**[1] و با عنوان «یک نابرابری مفید غیرمنتظره»[2] منتشر شد، اثبات نامساوی زیر به همراه برخی از کاربردهای جبری آن ارائه شده است:

$$\forall a,b,c,x,y,z\geq 0:(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\quad (*)$$

آن‌چه بر اهمیت نامساوی (*) می‌افزاید، آن است که نامساوی مذکور نه تنها دارای کاربردهایی در جبر است، بلکه کاربردهای هندسی گوناگونی نیز دارد. اکنون گفتار خود را در این زمینه با ارائهٔ اثبات زیبایی برای نامساوی فوق براساس آن‌چه که در سایت «math links» (منبع شمارهٔ ۲) ارائه شده است، آغاز می‌کنیم:

گزارهٔ ۱: نامساوی زیر برای تمام اعداد حقیقی a، b، c، x، y و z که برای آنها داریم: $ab+bc+ca\geq 0$ و $xy+yz+zx\geq 0$، برقرار است:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

برهان:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$$
$$=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)$$
$$=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]}$$
$$-(ax+by+cz)$$



می‌توان دید که هرگاه، A_1، B_1، A_2 و B_2 عددهای حقیقی مثبتی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt{(A_1+B_1)(A_2+B_2)} \ge \sqrt{A_1A_2}+\sqrt{B_1B_2} \quad (1)$$

با به‌کار بستن نامساوی (۱) در مورد $A_1=a^2+b^2+c^2$، $B_1=2(ab+bc+ca)$، $A_2=x^2+y^2+z^2$ و $B_2=2(xy+yz+zx)$ خواهیم داشت:

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z$$
$$\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$
$$+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}-(ax+by+cz)$$

از آن‌جا که بنابر نامساوی «کُشی ـ شوارتز» داریم: $ax+by+cz\le\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$، اثبات حکم گزارهٔ ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد.

نامساوی زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از گزارهٔ ۱ ارائه کرد:

نتیجهٔ ۱: برای تمام اعداد حقیقی مثبت a، b، c، x، y و z داریم:

$$\frac{a+b}{y+z}x+\frac{b+c}{z+x}y+\frac{c+a}{x+y}z\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

برهان: حکم از جایگزین نمودن (x, y, z) با $(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y})$ در گزارهٔ ۱ و با توجه به نامساوی

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)}\ge\frac{3}{4}$$

به‌دست می‌آید.

گزارهٔ ۲: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab}\ge 1$$

که در آن a و b و c طول ضلع‌های مثلث می‌باشند.

$(AB=c,\ BC=a,\ AC=b)$

برهان: در میان راه‌های گوناگونی که برای اثبات نامساوی موردنظر وجود دارد، روش اثبات با استفاده از اعداد مختلط را برمی‌گزینیم. فرض کنید عددهای مختلط متناظر با نقاط A, B, C, P در صفحهٔ مختلط به ترتیب برابر z_1 و z_2 و z_3 و w باشند. با استفاده از اتحاد

$$(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)$$
$$+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)$$

داریم:

$$BC.PB.PC+CA.PC.PA+AB.PA.PB$$
$$=|(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)|$$
$$+|(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)|$$
$$+|(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)| \ge \text{(بنابر نامساوی مثلثی)}$$
$$\left|\begin{matrix}(z_2-z_3)(w-z_2)(w-z_3)+(z_3-z_1)(w-z_3)(w-z_1)\\+(z_1-z_2)(w-z_1)(w-z_2)\end{matrix}\right|$$
$$=|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_1-z_3)|=AB.BC.CA$$

با تقسیم نمودن دو طرف نابرابری بر AB.BC.CA به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab}\ge 1$$

یادداشت: می‌توان دید که نابرابری گزاره ۲ تبدیل به برابری می‌شود اگر و تنها اگر P=H، که در آن H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

اکنون می‌توانیم با ترکیب دو گزارهٔ پیشین، گزارهٔ زیر را به‌دست آوریم:

گزارهٔ ۳: فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC و x و y و z عددهایی حقیقی باشند به‌قسمی که $xy+yz+zx\ge 0$. آن‌گاه:

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

برهان: با به‌کار بستن گزارهٔ ۱ برای $(\frac{PA}{a},\frac{PB}{b},\frac{PC}{c})$ و (x, y, z) به‌دست می‌آوریم:

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}$$
$$\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)(\frac{PB.PC}{bc}+\frac{PC.PA}{ca}+\frac{PA.PB}{ab})}$$
$$\ge 2\sqrt{xy+yz+zx} \quad \text{(بنابر گزاره ۲)}$$

که نتیجهٔ موردنظر می‌باشد.

بحث را با اثبات چند مسئله کلاسیک در نابرابری‌های هندسی، با استفاده از نتایج اثبات شده در بالا، پی می‌گیریم:

کاربردها

مسئلهٔ ۱. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geq\sqrt{3}$$

پاسخ: با قراردادن $x=y=z=1$ در گزارهٔ ۳، به‌دست می‌آوریم:

$$2\left(\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\right)\geq 2\sqrt{3}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

مسئلهٔ ۲. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a.PA+b.PB+c.PC\geq 4S_{ABC}$$

که در آن S_{ABC} مساحت مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ:

قرار دهید:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\ y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2},\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

در این‌صورت داریم:

$$xy+yz+zx=\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4}$$
$$=4S_{ABC}^2$$

از این‌رو و با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ در مورد (x,y,z) به‌دست می‌آوریم:

$$a^2.\frac{PA}{a}+b^2.\frac{PB}{b}+c^2.\frac{PC}{c}=a.PA+b.PB+c.PC\geq 4S_{ABC}$$

مسئلهٔ ۳. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد. ثابت کنید:

$$PA+PB+PC\geq 6r$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌باشد.

پاسخ: قرار دهید: $x=s-a$ و $y=s-b$ و $z=s-c$؛ که در آن a و b و c ضلع‌های مثلث ABC بوده و s برابر نصف محیط می‌باشد. در این‌صورت با به‌کار بستن گزارهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم:

$$PA+PB+PC$$
$$\geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}$$

از طرفی می‌توان دید:

$$(2)\ (s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=r^2+4Rr$$

که در آن r و R به ترتیب شعاع دایره محاطی و شعاع دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند.

بنابراین: $PA+PB+PC\geq 2\sqrt{r^2+4Rr}$.

از آنجایی که در هر مثلث $R\geq 2r$، نتیجه می‌شود[3]: $PA+PB+PC\geq 6r$.



پی‌نوشت

1. Pham Huu Duc
2. An Unexpected Useful inequality

۲. این تساوی از روابط $\frac{abc}{s}=4Rr$ و $r=\frac{\text{مساحت}\ ABC}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$ (ن. ک به صفحات ۲۴ و ۲۶ کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه» ترجمه عبدالحسین مصحفی) به‌دست می‌آید.

۳. برای اثبات نامساوی $R\geq 2r$ روش‌های گوناگونی وجود دارد که در اینجا یکی از آنها را می‌آوریم: بنابر قضیه‌ای از هندسه می‌دانیم که «هرگاه O مرکز دایره محیطی (به شعاع R)، I مرکز دایره محاطی (به شعاع r) و d فاصله بین این دو مرکز باشد آنگاه $d^2=R(R-2r)$». (ن. ک به کتاب «بازآموزی و بازشناخت هندسه»، صفحهٔ ۴۳). نامساوی $R\geq 2r$، با توجه به مثبت بودن d^2 به‌دست می‌آید.

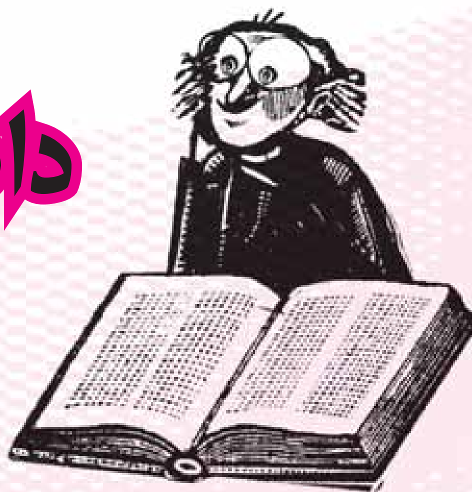
منابع

1. Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, Mathematical Reflections 2008, Issue 1.
2. Manlio, Blackmouse, Canhang, Mathlinks Forum 2007, http://www.mathlinks.ro/ viewtopic.php?t=187355.
3. Dragoslav S. Mitrinovic, J. Pecaric, V. Volenec, Recent Advances is Geometric Inequalities.
4. Bottema, Oene; Djordjevic, R. Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D. S.; and Vasic, P.M., Geometric Inequalities.

۵. مقاله‌ای که مطالعه کردید، ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

Tran Quang Hung; On Some geometric inequalities, Mathematical Reflections, 3, 2008.

دانش‌نامهٔ ریاضی



نویسندگان: پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، یدالله ایلخانی‌پور، علاءالدین میرحبیب‌اللهی، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرزی عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور
ناشر: کانون فرهنگی آموزش

۱. دانش‌نامه یا دایرةالمعارف‌نویسی، آن هم به صورت جدید، به‌خصوص در مورد ریاضیات، سابقهٔ چندانی در ایران ندارد. از لغت‌نامه‌های ریاضی می‌گذریم، چرا که مورد بحث ما نیستند. از دانش‌نامه‌های عمومی، نظیر اثر ممتاز **دکتر مصاحب** هم ذکری به میان نمی‌آوریم؛ گرچه در آنها نیز مطالبی از ریاضیات می‌توان یافت. تنها به ذکر نام و نشان بعضی از دانش‌نامه‌ها اشاره می‌کنیم و آن‌گاه به معرفی مفصل‌تر دانش‌نامهٔ مورد نظرمان، با این تذکر می‌پردازیم که این سخن تنها یک معرفی است و منظور نقد و بررسی آن نبوده است.

۲. یکی از دانش‌نامه‌هایی که در حد دورهٔ ریاضی دبیرستان و سال‌های اولیهٔ دوره‌های کارشناسی است، دایرةالمعارف آکسفورد است، که تحت نام «فرهنگ ریاضیات آکسفورد» در سال ۱۳۷۶ در ایران به چاپ رسیده است. نام و نشان این دانش‌نامه به صورت زیر است:

- فرهنگ ریاضیات آکسفورد. کریستوفر کلافام. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدبّر. چاپ اول، ۱۳۷۶.

۳. دانش‌نامهٔ ریاضی دبیرستانی دیگری با نام و نشان زیر داریم:

- فرهنگ ریاضیات. ویگودسکی. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور، مؤسسهٔ انتشارات بهینه. چاپ اول، زمستان ۱۳۷۱.

۴. سایر دانش‌نامه‌های ریاضی موجود عبارت‌اند از:

- دایرةالمعارف ریاضیات (در سه جلد). گروهی از استادان دانشگاه‌های آلمان. ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور. ناشر مهاجر. چاپ اول، ۱۳۷۸ و چاپ دوم، ۱۳۷۹.
- فرهنگ ریاضیات، عین‌الله پاشا، محمدهاشم رستمی، پرویز شهریاری، میرشهرام صدر، محمد عابدی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، غلامرضا یاسی‌پور و حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول، ۱۳۷۹ و چاپ دوم، ۱۳۸۱.
- دانش‌نامهٔ ریاضی. ترجمهٔ گروهی از استادان ریاضی. سر ویراستار دکتر علیرضامدقالچی. بنیاد دانش‌نامه‌نگاری ایران. چاپ اول، ۱۳۸۹.



۵. از اینها که بگذریم می‌رسیم به دانش‌نامهٔ ریاضی موردنظرمان که از موارد فوق جدیدتر است. این دانش‌نامه بیشتر به مطالب ریاضی مربوط به دورهٔ دبیرستان پرداخته است، و در آن، آنگونه که خود می‌گوید، موضوعات را طوری به صورت متوالی پهلوی هم قرار داده است که ارتباط بین آنها حفظ شود. در قسمتی از مقدمهٔ کتاب چنین

آمده است:

«جای خالی تألیف یک دانش‌نامهٔ موضوعی ریاضیات، همواره در منابع و مراجع ریاضی و کلاً جامعهٔ ریاضی کشور احساس می‌شد؛ دانش‌نامه‌ای که بتواند به صورت کاربردی به تمامی نیازهای دانش‌آموزان، دبیران ریاضی، مؤلفان و کارشناسان پاسخ دهد و شرح و تعریف دقیق و مناسبی برای هر واژه در موضوعات مختلف را شامل شود. در دسترس نبودن و البته پرکردن این جای خالی و خلق چنین اثری بسیار مشکل و نیاز به عزمی راسخ، تخصص و تجربهٔ بالا، همدلی، هم‌فکری و کار گروهی بسیار منسجم داشت که بحمدالله این فرصت و توفیق دست داد و به انجام آن همت گماشتیم.»

در مقدمه و در توضیح کارهای انجام شده در این کتاب چنین می‌خوانیم:

- برای هر واژه به صورت مستقل حتی‌الامکان تاریخچه یا فلسفه‌ای بیان کرده‌ایم و پس از تعریف مناسب، یک مثال کلیدی آورده شده است. در مورد بسیاری از واژه‌ها یا قضیه‌ها، نکات و نتیجه‌های مهم و حتی فرمول‌ها یا رابطه‌های مربوط به آنها آمده است.
- برای هر واژه یا اصطلاح، معادل انگلیسی روبه‌روی آن ثبت شده است.
- در هر صفحهٔ این دانش‌نامه تعدادی از کلمات داخل متن شماره خورده‌اند که معادل انگلیسی آنها در پایین به همراه شمارهٔ صفحه‌ای که آن واژه در آن قرار دارد، آورده شده است. این کار دست‌یابی به کلید واژه‌های هر صفحه را به آسانی میسّر می‌نماید.
- در ابتدای دانش‌نامه مقدمه‌ای توسط استاد و چهرهٔ ماندگار آموزش ریاضی، جناب آقای دکتر **پرویز شهریاری** آورده‌ایم و سپس واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی و بیوگرافی ریاضی‌دانان معروف دنیا به قلم استاد **غلامرضا یاسی‌پور** آورده شده است.
- بخش هندسهٔ دانش‌نامه توسط جناب آقای **میر حبیب‌اللهی** و بقیهٔ بخش‌های کتاب توسط **حمیدرضا امیری** و قسمت انگلیسی واژه‌ها توسط آقای غلامرضا یاسی‌پور ویراستاری شده است.

مؤلفان کتاب با توجه به تخصصشان، به ترتیب زیر نگارش موضوعات را برعهده داشتند:

- **پرویز شهریاری:** مقدمه
- **غلامرضا یاسی‌پور:** واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دانان نامی جهان و دورهٔ اسلامی
- **حمیدرضا امیری:** نظریهٔ مجموعه‌ها، آنالیز ترکیبی و ترکیبیات، نظریهٔ گراف، نظریهٔ اعداد، ماتریس، دستگاه معادلات خطی و تبدیل در صفحه
- **یدالله ایلخانی‌پور:** بردار، دستگاه اعداد حقیقی، تابع، حد و پیوستگی
- **علاءالدین میر حبیب‌اللهی:** هندسهٔ پایه و هندسهٔ فضایی
- **هوشنگ شرقی:** هندسهٔ پایه و هندسهٔ فضایی
- **میرشهرام صدر:** منطق و استدلال‌های ریاضی، آمار، احتمال، معادله‌های خط و صفحه و مقاطع مخروطی
- **دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی:** مشتق، کاربرد مشتق، دنباله و سری
- **احمد قندهاری:** حساب دیفرانسیل و انتگرال
- **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی:** جبر، مثلثات و حساب

از محسنات کتاب یکی لغت‌نامه‌های مفصل فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی آن است، و دیگری فصل‌های مقدمه‌ای بر دانش‌نامهٔ ریاضی، واژه‌ها و شاخه‌های ریاضی، ریاضی‌دان‌های نامی جهان و ریاضی‌دان‌های دورهٔ اسلامی.

کل کتاب در یک پیش‌گفتار و یک مقدمه و ۲۸ فصل و دو ضمیمه و ۸۸۰ صفحه تنظیم شده است، و نام و نشان آن چنین است:

دانش‌نامه ریاضی. پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، یدالله ایلخانی‌پور، هوشنگ شرقی، میرشهرام صدر، محمدعلی فریبرزی عراقی، احمد قندهاری، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی، علاءالدین میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسی‌پور. طراح و ناظر علمی: حمیدرضا امیری. ویراستاران: حمیدرضا امیری، علاءالدین میر حبیب‌اللهی، غلامرضا یاسی‌پور. چاپ اول، ۱۳۹۰.

دانش‌نامهٔ ریاضی همان‌طور که در همین معرفی اندک هم ملاحظه می‌شود، کتابی جامع است که هم به کار دانش‌آموز ریاضی می‌آید هم به کار دبیر ریاضی، و به‌طور کلی به کار همهٔ کسانی که به دانش ریاضی علاقه‌مند هستند.

با مخاطبان



اشاره

این بخش از مجله دریچهٔ ارتباط ما با خوانندگان، همکاران معلم، دانش‌آموزان و به‌طور کلی دوستداران مجله است. تصمیم داریم پس از مدتی که «این مثنوی تأخیر شد!» بخش حاضر را دوباره فعال کنیم. از شما می‌خواهیم با ما بیش از پیش در ارتباط باشید تا ما هم پاسخ نامه‌ها و ایمیل‌های شما را بدهیم.

● آقای **رحمان کیومرثی**،
همکار محترم از شهرستان شهرکرد

با سپاس فراوان از نامهٔ پرمهر شما و مقاله‌تان که با خط زیبا برای ما فرستاده بودید. مشابه مقالهٔ شما، مقاله‌ای از آقای احسان یارمحمدی داشتیم، در مورد حدّ تابع نمایی $f(x)^{g(x)}$ در نقطهٔ x که در شمارهٔ ۷۰ مجله به چاپ رسید. منتظر ارسال مطالب تازه‌تر شما ـ در چارچوب مطالب کتاب‌های درسی و یا مرتبط با آنها ـ هستیم.

● آقای **عباس روح‌الامینی**
از شهرستان سیرجان

دوست عزیز، سپاس فراوان از شما به‌خاطر همکاری گسترده‌تان با مجلهٔ برهان طی سال‌های متمادی. فکر می‌کنم تاریخ نخستین نامهٔ شما به مجله، به سال ۱۳۷۱ یعنی ۲۰ سال پیش برمی‌گردد! و این علاقهٔ خالصانهٔ شما به دانش ریاضی ستودنی است. نامه‌تان را که همراه با ترجمهٔ مقاله‌ای از مجلهٔ «اسپکتروم»* بود دریافت کردیم و در همین شماره آن را به چاپ رسانده‌ایم.

اما دوست عزیز، شما که ادعای ارتباط با مجلهٔ اسپکتروم و ارسال مقاله برای آنها را دارید (که حتماً همین‌طور است)، چرا برای ما ایمیل نفرستاده‌اید تا لااقل آدرس شما را داشته باشیم و بتوانیم با شما در تماس آنلاین باشیم و از مطالبتان بیشتر استفاده کنیم! باز هم برای ما مطلب بفرستید.

● همکار عزیز، آقای **سعدالله قصّابی**

مطلب شما درباب مسئله‌ای خاص از ترکیبیات به دستمان رسید. مسئلهٔ بدی نیست و در همین‌جا ذکر راه‌حل آن را درج می‌کنیم:

مسئله: ثابت کنید اگر تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه‌ای m تا باشد، تعداد اعضای آن $\left[\sqrt{2m}+1\right]$ است.

اثبات: می‌دانیم اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، $\binom{n}{2}$ یا $\frac{n(n-1)}{2}$ زیرمجموعه دارد. بنابراین $m=\frac{n^2-n}{2}$ و یا $n^2-n-2m=0$ از آن‌جا با توجه به مثبت‌بودن n نتیجه می‌شود: $n=\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$.

حال نشان می‌دهیم که با فرض طبیعی بودن $\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$، داریم: $\left[\sqrt{2m}+1\right]=\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$ و یا

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}\le\sqrt{2m}+1<\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}+1$$

به این منظور از نامساوی $\sqrt{x+y}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}$ $(x,y\ge 0)$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sqrt{8m}+\sqrt{1})$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{2m}+\frac{1}{2}=1+\sqrt{2m}$$

و $\sqrt{2m}+1<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}+1\Leftrightarrow\sqrt{2m}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8m+1}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2m}<1+\sqrt{8m+1}\Leftrightarrow\sqrt{8m}<1+\sqrt{8m+1}$$

بنابراین:

$$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}\le\sqrt{2m}+1<\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}+1$$

و در نتیجه: $\left[\sqrt{2m}+1\right]=\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$ و بنابراین:

$$n=\left[\sqrt{2m}+1\right]$$

البته توجه داشته باشید که $8m+1$ باید مربع کامل باشد. یعنی برای هر m جواب ندارد.

از شما دوست عزیز برای مطلب ارسالی‌تان سپاس گزاریم، اما تقاضا می‌کنیم که به مقالات تفضیلی بیشتر توجه داشته باشید و با مجله‌تان در ارتباط مستمر باشید.

● همکار گرامی، آقای **شهریار جاوید**
از شهرستان اردبیل
با سپاس از مطلب ارسالی‌تان باید بگوییم که در زمینهٔ بحث مقاطع مخروطی تا به‌حال در شماره‌های گوناگون مجله مطالب بسیاری داشته‌ایم و در کتاب‌های کمک‌درسی نیز در این‌باره مطالب مشابه بسیاری دیده می‌شود. سعی کنید مطالب و مسائل غیرتکراری و کارهای تازه‌ای برای مجله‌تان بفرستید. با ما در تماس باشید.

● همکار محترم، خانم **نجمه مؤمنی**،
دبیر ریاضی از شهر کرمان
با تشکر فراوان از مطلب ارسالی‌تان تحت عنوان «احتمال و یک پارادوکس»، ممنون می‌شویم اگر مطالب ارسالی‌تان مناسب و در حد توانایی‌های دانش‌آموزان دبیرستان و درچارچوب این مباحث و یا مباحث مرتبط با المپیادهای ریاضی باشد. مطالبی که بیشتر به بحث‌های ریاضی دانشگاهی نزدیک هستند باید در مجلات تخصصی آن حوزه مورد استفاده قرار گیرند. با مجله‌تان در ارتباط باشید.

پی‌نوشت
* Spectrum

یک پارادوکس و یک سؤال؟!

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟
اگر متوجه پارادوکس موجود در سؤال نشده‌اید، توضیح ما را در شمارهٔ آینده ببینید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چندمعمای خواندنی

● باز هم دوقلوها! مدتی بعد، باز هم کاوه و شهریار را دیدم. آنها رفتارشان را تغییر داده بودند و دیگر هیچ‌کدام همیشه دروغ یا همیشه راست نمی‌گفتند. این‌بار هم می‌خواستم کاوه را بشناسم. از آنها خواستم خودشان را معرفی کنند، ولی آنها خواستند که این موضوع را خودم کشف کنم!

یکی از آنها به من گفت: «برادر من کارتی در جیبش دارد که یا قرمز است، یا سیاه. اگر کارت او قرمز باشد، او یک جملهٔ درست خواهد گفت. اما اگر کارت او سیاه باشد، جملهٔ او نادرست خواهد بود. پدر آنها که می‌دانستم همیشه راست می‌گوید، جملهٔ ا و را تأیید کرد. سپس برادر دوم به من گفت: «من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم.»

حالا به من کمک کنید تا کاوه را شناسایی کنم. پاسخ را در شمارهٔ بعد ببینید.



مسائل مسابقه‌ای برهان

کلیدواژه‌ها: جزء صحیح، وتر، مسابقهٔ برهان، مسئلهٔ ریاضی

۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x $(x \neq k\pi)$ حاصل عبارت زیر همواره مقداری ثابت است:

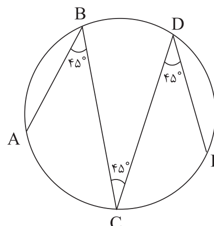
$$y = x - \pi\left[\frac{x}{\pi}\right] + tg^{-1}(\cot gx)$$

([a]، جزء صحیح عدد حقیقی a می‌باشد)

۲. در شکل زیر زاویهٔ بین وترهای متوالی مساوی °۴۵ است:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = ۴۵^\circ$$

ثابت کنید: $AB^۲ + CD^۲ = BC^۲ + DE^۲$



۳. مجموعهٔ S و عمل * روی آن را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

هر $a, b \in S : (a * b) * a = b$

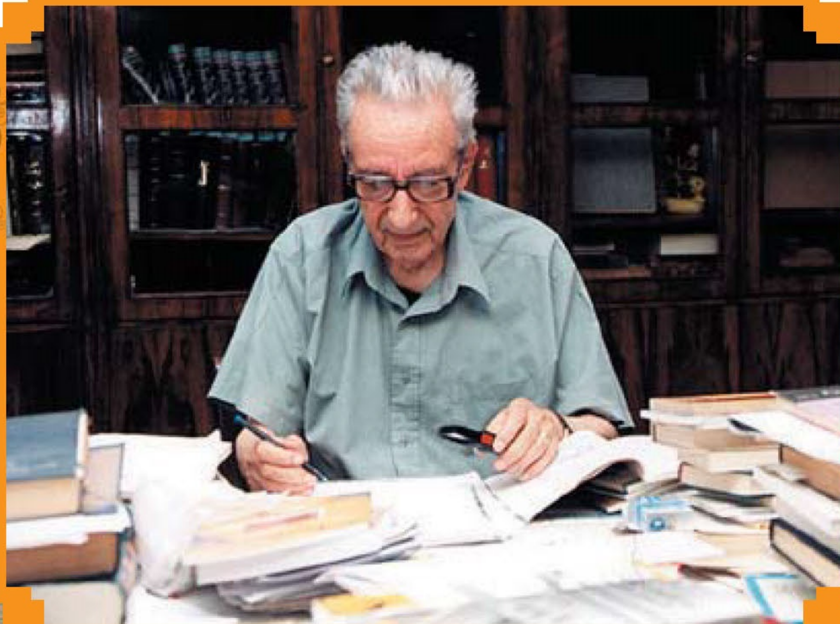
ثابت کنید: $a * (b * a) = b$

۴. در کشوری کوچک، همهٔ مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور شد. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آنها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آنها را A، B و C می‌نامیم.

در دادگاه قاضی از A پرسید: آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ و B یا پاسخ داد بله و یا خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: من خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می دانم چه کسی جاسوس است!

با ذکر دلیل قانع‌کننده، بگویید جاسوس کیست.

*** منتظر پاسخ‌های شما به مسائل مسابقه‌ای هستیم. پاسخ‌های خود را به آدرس پستی مجله ارسال فرمایید و یا به پست الکترونیکی ما ایمیل کنید. پاسخ صحیح را در شمارهٔ آینده ببینید**



نوشتاری از زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری

ریاضیات، از یک طرف به تاریخ خود وابسته است و از طرف دیگر با زندگی ما درآمیخته است. به همین دلیل، ریاضی‌دان نمی‌تواند خود را از تاریخ ریاضیات، از جنبه‌های کاربردی ریاضیات و از فلسفهٔ ریاضیات دور نگه دارد. به‌جز اینها، ریاضی‌دان پیش از آنکه ریاضی‌دان باشد، انسان است و به‌ویژه در روزگار ما، انسان «تک‌بعدی» فرصت ابراز وجود نمی‌یابد و نمی‌تواند خود را با پیشرفت‌های مادی و معنوی زمان سازگار و هماهنگ کند.

درست است که ریاضی‌دان، به دلیل تخصصی که انتخاب کرده است، کار فکری خود را بیشتر در مسیر ریاضیات متمرکز می‌کند، ولی او هم به عنوان انسانی که در عصر ما زندگی می‌کند، باید با دانش‌های دیگر و با مسئله‌های عمدهٔ علمی و اجتماعی زمان خود آشنا باشد. از هنر لذت ببرد و در زندگی خانوادگی و اجتماعی خود، مثل هر انسان دیگری، هم به رشد فکری و هنری خود علاقه‌مند باشد و هم در جست‌وجوی راه یا راه‌های نجات انسان‌ها از زشتی‌های موجود باشد. اگر ریاضی‌دان این حق را از خود سلب کند که از موسیقی لذت ببرد، به کمک شعر و رمان خوب به ژرفای روح انسان‌ها وارد شود، گل و گیاه را دوست داشته باشد، به مسئله‌های حاد اجتماعی و سیاسی زمان خود علاقه‌مند باشد، و... آن وقت، به انسانی «تک‌بعدی» تبدیل می‌شود که در این صورت، بعید می‌دانم بتواند حتی یک ریاضی‌دان خوب باشد...

ریاضی‌دان باید با عمل خود و با رفتار فردی و اجتماعی خود، این تصور نادرست را از ذهن همگان دور کند که: «ریاضی‌دان تنها با عدد و شکل سروکار دارد و به درد هیچ‌کار و هیچ بحث دیگری نمی‌خورد.»

جایزه زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری

فراخوان مسابقهٔ بزرگ مقاله‌نویسی مجلهٔ رشد برهان ریاضی متوسطه

به اطلاع دبیران ریاضی، دانش‌آموزان، دانشجویان رشتهٔ ریاضی و دانشجویان تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی در سراسر کشور می‌رساند که مجلهٔ «رشد برهان متوسطه»، یک مسابقهٔ بزرگ مقاله‌نویسی را با شرایط زیر برگزار می‌کند:

۱. موضوع مقالهٔ خود را از میان موضوع‌های زیر انتخاب کنید:
- موضوع‌ها و شاخه‌های ریاضیات دبیرستانی (شرح و بسط این موضوع‌ها) در قالب مقالات آموزشی؛
- کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر و مهارت‌های زندگی؛
- تاریخ و فلسفهٔ ریاضیات؛
- بازی‌ها، سرگرمی‌ها، تفریحات و معماهای ریاضی؛
- المپیادهای ریاضی و نقش آنها در گسترش آموزش ریاضی؛
- منطق و استدلال‌های ریاضی.

۲. مقالات را روی صفحهٔ A4 و حتی‌الامکان به صورت تایپ شده ارسال فرمایید. مهلت ارسال مقالات تا تاریخ ۳۰ بهمن ۹۱ است.

۳. حجم مطالب ارسالی در حد متعارف یک مقاله باشد. منابع مورد استفاده حتماً ذکر شوند.

۴. مقالات را به نشانی پستی (تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵) و یا رایانامه (Borhan@roshdmag.ir) مجله ارسال فرمائید.

۵. پس از دریافت و جمع‌آوری مقالات، هیئت داوری منتخب از سوی هیئت تحریریهٔ مجله که مرکب از معلمان و استادان برگزیدهٔ دانشگاهی در رشته‌های مرتبط است، مقالات را به دقت مطالعه و ارزیابی می‌کند. پس از داوری نهایی، مقاله‌های برگزیده در شمارهٔ ویژه‌ای در مهرماه ۱۳۹۲ و به مناسبت «آغاز سال تحصیلی جدید» معرفی خواهند شد.

۶. به نفرات برگزیده جوایز نفیسی به شرح زیر تقدیم خواهد شد:
- نفر اوّل: چهار شب اقامت در مجتمع رشد در یکی از شهرهای تنکابن یا مشهد (به دلخواه)
- نفرات دوم وسوم: سه شب اقامت در مجتمع رشد در یکی از شهرهای تنکابن یا مشهد (به دلخواه)

۷. سایر مقالات ارسالی، پس از ارزیابی و در صورت تأیید کارشناسان، در شماره‌های آیندهٔ مجله به چاپ می‌رسند.



فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
www.roshdmag.ir
۷۶

رشد برهان
ریاضی



برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه
دورهٔ بیست و دوم
شمارهٔ ۲
زمستان ۱۳۹۱
۶۴ صفحه
۵۰۰۰ ریال

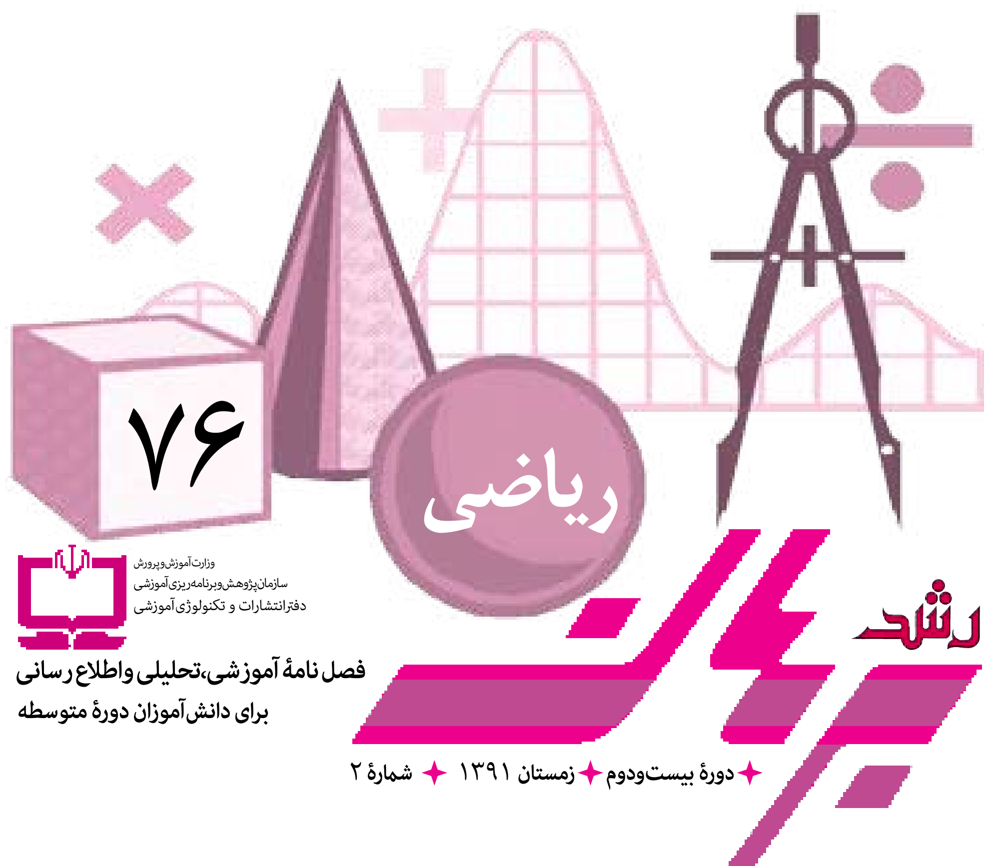


- کاربرد قدر مطلق در یک ضابطه‌ای کردن توابع
- مربع‌های جادویی، دنیایی از رمز و راز اعداد
- پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته
- دایرهٔ تبدیل و کاربرد آن در ساده‌کردن عبارت‌های جبری
- اثبات‌هایی کوتاه‌تر بر قضایای تشابه مثلث‌ها



◆مدیرمسئول:
محمد ناصری
◆سردبیر:
حمیدرضا امیری
◆مدیرداخلی:
هوشنگ شرقی
◆طراح گرافیک:
شاهرخ خره‌غانی
◆تصویرگر:
میثم موسوی
◆هیئت تحریریه:
حمیدرضا امیری،
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و به یاد همکار عزیزمان
زنده‌یاد پرویز شهریاری
◆ویراستار ادبی:
بهروز راستانی
◆وبگاه:
www.roshdmag.ir
◆رایانامه:
Borhan@roshdmag.ir
◆پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
◆ نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
☎تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵
◆شمارگان:
۱۰/۵۰۰ نسخه
◆چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)



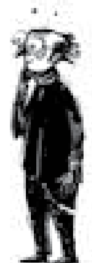




وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

✦دورهٔ بیست‌ودوم ✦زمستان ۱۳۹۱ ✦ شمارهٔ ۲



مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه) ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

حرف اول

بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق

یکی از بهترین راه‌های یادگیری و فهم عمیق مطالب و تثبیت مفاهیم علمی، بازگو کــردن آن برای دیگری، و یا به‌عبارت دیگر، تدریس آن به دیگری اســت. آیا تا به‌حال برای شــما پیش آمده است که بخواهید مسئله‌ای، قضیه‌ای یا مفهوم و معنی شعری را برای دیگری شرح دهید؟ بی‌شــک تجربه کرده‌اید که به همراه تشــریح آن برای شما جاافتاده و قطعاً مدت زمان بیشتری در ذهن شما باقی‌مانده است. یعنی این موضوع بسیار مهم است که انسان یافته‌های خود را در اختیار دیگران قرار دهد تا ضمن بهره‌رسانی به دیگران، خود نیز از آن بهره‌مند شود. از آنجا که «زکات علم، نشر آن است»، زکات علم خود را نیز داده باشد.

به همهٔ شما عزیزان دانش‌آموز توصیه می‌کنم:

- **آنچــه آموخته‌اید و منابعی که در اختیار دارید (اعم از جزوه، کتاب یا مجله) در طبق اخلاص بگذارید و در اختیار دوستان و علاقه‌مندان قرار دهید.**
- **روی مســائل و مفاهیم علمی با دوستان و هم‌کلاسی‌های خود به بحــث و تبادل‌نظر بپردازید و از نظــرات یکدیگر بهره‌مند شوید.**
- **برای حل مســائل علمی به دنبــال راه‌حل‌های بهتر و متنوع‌تر باشــید. فقط به راه‌حل کتاب یا معلم اکتفــا نکنید و برای هر مطلب دلیل بخواهید و به دنبال علت باشید. والسلام.**

سردبیر

زنده‌یاد پرویز شهریاری

محمد کرجی
ریاضی‌دان ایرانی

کلیدواژه‌ها: محمد کرجی، جمشــید کاشــانی، ابوالوفای بوزجانی، خیام، مقدمات، اقلیدس، فرنتس وپکه، آدولف هوخهام، بسط دو جمله‌ای

ریاضی‌دانــان ایرانــی، دوره‌ای از تاریــخ ریاضــی را دربرگرفته‌اند که از ســدهٔ سوم تا ســدهٔ نهم هجری ادامه داشته است که یک دورهٔ کامل از تکامل ریاضیات است و بیشتر دورهٔ کاربردی ریاضیــات بــود. بیشــتر ریاضی‌دانان ایرانی، از **محمد خوارزمی** تا **جمشید کاشــانی**، به ریاضیات محاسبه‌ای نظر داشتند تا بتوانند دشواری‌هایی را که در عمل پیــش می‌آید، برطرف کنند. آن‌ها حســاب و روش‌های محاسبه را پیش بردند و عددنویسی هندی را که در آن از ۱۰ نماد اســتفاده می‌شــد ـ به همین شیوهٔ امروزی در مبنای ۱۰ نوشــته می‌شد و «موضعی» بود؛ یعنی رقم‌ها بســته به جای خود ارزشــیابی می‌شدند ـ قبول کردند.

جبــر در ایران و به‌وســیلهٔ محمد خوارزمــی به‌وجــود آمــد و هنوز هم در سراســر جهــان بــه همــان نامی شناخته می‌شــود که خوارزمی بر آن گذاشت. در ضمن خوارزمی نخستین الگوریتم‌هــا را برای جبر و در رابطه با حــل معادلهٔ درجه دوم آورده اســت. **بیرونــی** و **ابوالوفای بوزجانی**، مثلثات را بــه دنبال قانون‌های نخســتین آن (کــه باز هم کار ایرانی‌هــا بود)، یعنی رابطه‌های مثلثاتی را (چه روی صفحه و چــه روی ســطح کــره) آوردند که بیشــتر در اخترشناسی کاربرد داشت. سرانجام جمشید کاشانی با حل جبری یک معادلهٔ درجهٔ ســوم، سینوس یک درجــه را با دقت تا هر میزان دل‌خواه محاســبه کــرد. خواجه نصیر توســی نیز توانســت براساس کار ریاضی‌دانان پیش از خود، نخستین کتاب مثلثات را به نام «کشف القناع...» بنویسد.

در واقع، ریاضی‌دانــان ایرانی زیر تأثیر «انگیزهٔ بیرونی» ریاضیات بودند، یعنی دشــواری‌هایی را که از «بیرون» در برابر ریاضیات گذاشته می‌شد، حل می‌کردنــد. البته، این وضــع را نباید بــه معنــای آن گرفت کــه از «انگیزهٔ درونــی» ریاضیات پرهیز می‌کردند. از جمله، **ابوالوفــای بوزجانی**، به‌صورت «نیمه‌آشکار» از معکب‌هایی که بیش از سه بعد داشته باشند، صحبت می‌کند. یــا **فضل نیریزی** و **خیــام**، «مقدمات» **اقلیدس** را به چالش می‌کشند.

ریاضی‌دانــان ایرانی در بحث‌های نظــری خود، عــدد را به عنــوان عدد حقیقــی تعریــف می‌کننــد و زمینه را بــرای پیدایش آنالیــز ریاضی مهیا می‌ســازند. ریاضیــات ایرانــی، بعد از ریاضیات یونانی و با اســتفاده از همهٔ دستاوردهای ریاضیات نظری یونانی و ریاضیات کاربردی پیش از آن به‌وجود آمد و خود در مجموع، جنبهٔ کاربردی داشــت، ولی بســیاری چیزها هم به ریاضیات نظری افزود.

در ایــن میان بــه ریاضی‌دانی به نــام **محمد کرجــی** (با کنیــهٔ ابوبکر) برمی‌خوریم که به قول **فرنتس وپکه**، خاورشــناس و ریاضــی‌دان آلمانــی، به‌راستی شگفت‌انگیز است. وُپکه یکی از کتاب‌های کرجی را به نام «الفخری فی الجبــر و مقابله» [کتاب فخری در جبر و مقابله] از روی نسخهٔ خطی که در پاریس موجود بود، در سال ۱۸۵۳ در ۲۶۵ صفحــه بــا شــرح و تفصیل منتشــر کرد. بــه دنبــال آن، **آدولف هوخهام** کتاب «الکافی فی الحســاب» [بحثــی دربارهٔ حســاب] کرجی را در



سه جلد در سال‌های ۱۸۷۸ و ۱۸۸۰ به آلمانی ترجمه و منتشر کرد. این دو کتاب سرآغاز آشنایی اروپاییان با این دانشمند بزرگ ایرانی بود. کتاب الکافی فی الحساب دارای ۷۰ بخش و دربارهٔ حساب، هندسه و جبر است.

کتاب فخری به نام **فخرالملک** (محمدبن علی بن خلف)، وزیر **بهاءالدولهٔ دیلمی** پسر **عضدالدولهٔ دیلمی** (که از ۴۰۱ تا ۴۰۷ هجری قمری بر عراق کنونی حکومت می‌کرد و در سال ۴۰۷ هجری قمری کشته شد) نوشته شده است. کتاب وُپکه به دلیل ارزش خود مورد توجه خاورشناسان قرار گرفت ولی در نسخه‌ای که مورد استفادهٔ وُپکه بود، نسخه‌نویس نام «کرجی» را «کرخی» آورده بود و وُپکه هم، کرجی را اهل کرخ (یکی از محله‌های بغداد) دانسته است.

انتساب کرجی به عراق کنونی نزدیک به ۵۰ سال بین مورخان ریاضیات رواج داشت تا این‌که در سال ۱۹۳۴، **لوی دولاویدا**، خاورشناس ایتالیایی ثابت کرد که کرخی اشتباه نسخه‌نویس بوده و در واقع، کرجی اهل ایران و از ناحیهٔ «کرج» در نزدیک شهری (و تهران کنونی) است نه عراق. لوی دولاویدا به کتاب‌های خطی «البدیع فی الحساب» (در کتاب‌خانهٔ واتیکان) و کتابی از کرجی مربوط به جبر در کتاب‌خانهٔ آکسفورد و غیره، استناد می‌کند که همه‌جا نام «کرجی» با جیم نوشته شده است. علاوه بر این، **سموییل یحیا مغربی** که ۷۰ سال بعد از مرگ کرجی می‌زیسته و کتاب «الباهر فی العلم الحساب» را نوشته است و در کتاب خود بارها به نوشته‌های کرجی استناد می‌کند، همه‌جا او را کرجی می‌نامد و نه کرخی.

خود کرجی در پیش‌گفتار کتابش به نام «استخراج آب‌های معدنی» با ترجمهٔ زنده‌یاد **خدیو جم** می‌گوید:

«هنگامی که به عراق وارد شدم و دیدم که مردم آنجا از کوچک و بزرگ دانش‌دوست و قدرشناس علم هستند و دانشمندان را گرامی می‌دارند، کتاب‌هایی در حساب و هندسه تألیف کردم.» یعنی از جای دیگری به عراق آمده بوده است. خود دولاویدا کتاب‌های «البدیع» و «علل حساب الجبر و المقابله» را معرفی و به ایتالیایی ترجمه کرده است.

آنچه از زندگی کرجی می‌دانیم، چندان زیاد نیست. باید در زادگاه خود «کرج» مقدمه‌های دانش را فراگرفته و بعد به شهری که در آن زمان مرکز دانشمندان بوده و کتاب‌خانه‌ای مجهز داشته است، در جست‌وجوی کتاب‌های مورد علاقه‌اش رفته باشد. احتمالاً بعد به بغداد رفته و به خدمت فخرالملک مزبور، وزیر بهاءالدوله و پسرش **سلطان‌الدوله**، معروف به ابوشجاع، درآمده است. کرجی در سال ۴۰۳، بعد از کشته شدن بهاءالدوله عراق را ترک کرده و به زادگاه خود برگشته است. در بازگشت، به دستور **ابوغانیم** (معروف به محمد) کاتب و وزیر **منوچهر قابوس** که از ۴۰۳ تا ۴۲۰ هجری قمری حاکم طبرستان بوده، کتاب «استخراج آب‌های پنهانی» را نوشته است. کرجی در حدود سال ۴۲۰ هجری قمری (۱۰۲۹ میلادی) درگذشته است.

از نوشته‌های او (که تا ۸۰ اثر شمرده‌اند)، تعداد اندکی باقی مانده، ولی از همین کتاب‌های باقی مانده، می‌توان دربارهٔ کرجی و نوآوری‌های او داوری کرد. کرجی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان ایرانی است و تا آن‌جا که ما اطلاع داریم، بسیاری از دیدگاه‌های او تازه‌اند و به تکامل ریاضیات، به‌ویژه در زمینه جبر یاری فراوان رسانده‌اند.

کتاب‌هایی که از کرجی به‌دست ما رسیده، نشان می‌دهد که او روی حساب، جبر، معادله‌های سیّال، مسّاحی، اخترشناسی و آب‌های زیرزمینی کار می‌کرده است. او مجهول (x) را **شیء**، مربع آن (x^2) را **مال**، مکعب آن (x^3) را **کعب**، توان چهارم را **مال‌مال**، توان پنجم را **کعب مال**، و غیره می‌نامد. برای هر (x^n)، عکس آن را جست‌وجو می‌کند ($\frac{1}{x^n}$)؛ به‌نحوی که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر واحد شود.

او خود را از قید سطح و حجم (که یونانی‌ها و به تبعیت از آن‌ها، ایرانی‌ها برای x^2 و x^3 به‌کار می‌بردند) آزاد می‌کند و عبارت‌های جبری را مثل «مال‌مال و ۳ کعب منهای ۶» (x^4+3x^3-6)، مورد بحث قرار می‌دهد. از این راه از قاعده‌های حساب برای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کند. او عدد منفی را «عدد ناقص» و عدد مثبت را «عدد زیادتی» یا عدد اضافی می‌نامد و از جمله از رابطهٔ

$a-(-b)=a+b$

آگاهی داشته است ولی نتوانسته است جبر چندجمله‌ای را پیدا کند، زیرا این کار مستلزم اطلاع از عمل‌هایی نظیر

$-a-(-b)=-(a-b)$

بوده که کرجی کشف نکرده بود؛ یعنی نمی‌توانست یک مقدار منفی را از مقدار منفی دیگری کم کند.

می‌بینیم که محمد کرجی هم در زمینهٔ ریاضیات کاربردی کار کرده است (مثل مساحی، اخترشناسی و استخراج آب‌های پنهانی) و هم در زمینهٔ ریاضیات نظری. او با دید تازه‌ای به چند جمله‌ای‌ها، به توان‌های بالای مجهول و به عددهای منفی نگاه می‌کرد؛ درست همان‌گونه که ما امروز فکر می‌کنیم.

کرجی و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای

در سال ۱۹۴۸، **پائول تیولی**، مورخ ریاضی اهل آلمان، وجود دستور **نیوتون** را برای توان‌های درست و مثبت، در «مفتاح‌الحساب» **جمشید کاشانی**، مشهورترین ریاضی‌دان سدهٔ پانزدهم میلادی، کشف کرد. سپس احمداف، مورخ ریاضی اهل تاشکند، قانون تشکیل ضریب‌های دوجمله‌ای را در یکی از رساله‌های **خواجه نصیر توسی**، ریاضی‌دان سده سیزدهم کشف کرد (این رساله دربارهٔ محاسبه به یاری تخته و شن بحث می‌کند). چه جمشید کاشانی و چه توسی این قاعده را ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشهٔ عددها آورده‌اند.

هم‌چنین براساس آگاهی‌هایی که داریم، خیام، ریاضی‌دان، فیلسوف و شاعر ایرانی سده‌های یازدهم و دوازدهم میلادی، در رساله‌ای، از کتاب خود به نام «درستی روش هندی در جذر و کعب» نام می‌برد (این کتاب هنوز پیدا نشده است) که در آن به تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ جذر و کعب پرداخته است. بر همین اساس می‌توان معتقد بود که خیام هم در نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم میلادی از دستور نیوتون برای توان‌های مثبت و درست دو جمله‌ای اطلاع داشته است.



در سال ۱۹۷۲ میلادی، **صلاح احمد** و **رشدی راشد** (مورخان ریاضی)، رسالهٔ **ابونصر سموییل یحیا مغربی**، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ دوازدهم میلادی را به نام «الباهر فی علم‌الحساب» در دمشق چاپ کردند. مغربی موضوع‌هایی از رسالهٔ کرجی را و به‌ویژه بخشی را که مربوط به ضریب‌های بسط دوجمله‌ای است، نقل کرده است. این رسالهٔ کرجی تاکنون پیدا نشده است و مغربی هم نام آن را نمی‌آورد، ولی به ظاهر باید همان کتاب «فی حساب الهند» باشد که خود کرجی در کتاب «البدیع فی الحساب» خود از آن یاد کرده است.

سموییل مغربی در فصل چهارم از بخش دوم کتاب «الباهر فی علم الحساب» قاعدهٔ بسط $(a+b)^n$ را برای حالت‌هایی که n برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد بیان می‌کند. در اینجا ما برگردان آن را از کتاب صلاح احمد و رشدی راشد می‌آوریم:

«حالا قاعده‌هایی را می‌آوریم که به کمک آن‌ها می‌توان تعداد جمله‌ها را برای ضرب در جمله‌های دیگر، وقتی که



یک عدد به دو بخش تقسیم شده باشد، پیدا کرد. کرجی می‌گوید: اگر تو این را می‌خواهی، به عنوان اساس کار، واحد را زیر واحد بگذار. سپس واحد را به ستون بعد ببر. واحدی را که زیر واحد اول قرار دارد، به آن اضافه کن می‌شود دو. این دو را زیر واحد بگذار و بعد دوباره یک واحد زیر آن قرار بده، به‌دست می‌آوری: واحد، دو، واحد. این به تو نشان می‌دهد که مربع هر عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است که هر کدام از عددها را باید یک‌بار در خودش ضرب کنی. زیرا در هر دو طرف واحد و واحد داری و هر عدد را در عدد دیگر باید دو بار ضرب کنی، چون در وسط، دو داری. در مجموع، مربع این عدد را به‌دست می‌آوری.

«حالا دوباره واحد را به ستون بعد ببر. واحد را به دو برابر اضافه کن. سه به‌دست می‌آوری. آن را زیر واحد بنویس. دو را به واحد که زیر آن است اضافه کن. سه به‌دست می‌آوری. آن را به زیر سه بنویس. در ستون سوم به‌دست می‌آوری: واحد، سه، سه، واحد. از اینجا تو می‌دانی مکعب هر عدد، وقتی از دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مکعب کن و هر عدد را در مربع دیگری سه بار ضرب کن.

«واحد ستون سوم را به ستون چهارم ببر. سپس واحد را به سه که زیر آن است، اضافه کن، شش به‌دست می‌آوری. آن را زیر چهار بنویس. بعد دومین سه را به واحد اضافه کن. چهار به‌دست می‌آوری. آن را زیر شش بنویس. در ستون چهارم به‌دست می‌آوری: واحد، چهار، شش، چهار، واحد. از اینجا تو می‌دانی که مربع مربع عدد، وقتی از مجموع دو عدد تشکیل شده باشد، چنین است: هر کدام از عددها را مربع مربع می‌کنی، زیرا در انتها واحد داری. سپس هر عدد را در مکعب دیگری چهار مرتبه ضرب می‌کنی، زیرا به دو انتها، یعنی واحد، چهار چسبیده است. سپس مربع یکی را در مربع دیگری شش بار ضرب می‌کنی، زیرا در وسط، شش داری.

به همین ترتیب $(a+b)^5$ داده می‌شود و مؤلف نتیجه می‌گیرد: «از این راه می‌توانیم مربع و مکعب و هر توان دیگری را که بخواهیم، معلوم کنیم.»

در پایان هم جدول ضریب‌های دوجمله‌ای $(a+b)^n$ را، برای n=۱ تا n=۱۲ می‌دهد (جدول را ببینید). به این ترتیب، طبق مدرک‌هایی که در اختیار داریم، محمد کرجی نخستین ریاضی‌دانی است که برای تعیین ضریب‌های بسط دوجمله‌ای راهی قانونمند پیدا کرد و جدولی در این‌باره تشکیل داد. البته ریاضی‌دانان هندی حتی در سدهٔ دوم پیش از میلاد، به صورتی کم و بیش مبهم، از ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (با توان مثبت و درست) آگاه بودند، ولی نتوانستند اندیشه‌های خود را به‌طور منظم ارائه دهند. و بعد از جمشید کاشانی و در اروپای پیش از نیوتون، ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را خیلی از ریاضی‌دانان کشف کرده بودند (و به احتمالی، بدون آگاهی از کارهای ریاضی‌دانان ایرانی). از جمله در کتاب «حساب مخفی» **میخاییل شتیفل** که در سدهٔ شانزدهم زندگی می‌کرد، و ریاضی‌دانی برجسته و آلمانی بود، می‌توان ردپای این دستور را یافت (کتاب شتیفل در سال ۱۵۴۴ چاپ شد).

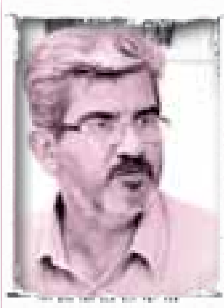
شیء	مربع	معکب	مربع-مربع	مربع-معکب	مکعب-معکب	مربع-مربع-معکب	مربع-مکعب-معکب	معکب-مکعب-معکب	مربع-مربع-مکعب-معکب	مربع-معکب-مکعب-معکب	مکعب-معکب-مکعب-معکب
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶
		۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۲	۱۲۰	۱۶۵	۲۲۰
			۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶	۲۱۰	۳۳۰	۴۹۵
				۱	۵	۲۱	۵۶	۱۲۶	۲۵۲	۴۶۲	۷۹۲
					۱	۷	۲۸	۸۴	۲۱۰	۴۶۲	۹۲۴
						۱	۸	۳۶	۱۲۰	۳۳۰	۷۹۲
							۱	۹	۴۵	۱۶۵	۴۹۵
								۱	۱۰	۵۵	۲۲۰
									۱	۱۱	۶۶
										۱	۱۲
											۱

سرانجام باید از **بلز پاسکال** (که کم و بیش با نیوتون هم‌عصر بود)، نام برد که جدولی تشکیل داد و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را در آن منظم کرد. این جدول که به صورت مثلثی تنظیم شده و امروز به نام «مثلث پاسکال» معروف است، ویژگی‌های بسیاری دارد و هر پژوهشگری ممکن است ویژگی‌های دیگری از آن را کشف کند.

بسط دوجمله‌ای امروز به نام «دوجمله‌ای نیوتون» مشهور است، زیرا او قانون بسط دوجمله‌ای را برای عددهای کسری و منفی هم به‌کار برد.



حمیدرضا امیری



پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته



کلیدواژه‌ها: احتمال، پیشامدهای تصادفی، فضای نمونه، آندره کولموگروف، پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی، احتمال دوجمله‌ای

مقدمات و تعریف‌های اولیه

آزمایش تصادفی یا پدیدهٔ تصادفی: هر آزمایش یا پدیده‌ای که قبل از وقوع، نتیجهٔ آن معلوم نباشد، ولی همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن برای ما مشخص باشد، «آزمایش تصادفی» یا «پدیدهٔ تصادفی» نامیده می‌شود.

مثال: وقتی یک تاس را می‌ریزیم، تا وقتی ثابت نشده و در حال چرخش است، نمی‌توانیم به‌طور قطعی اعلام کنیم چه عددی رو خواهد شد، ولی از همهٔ حالت‌های ممکن باخبریم. یعنی می‌دانیم عدد ۱ یا ۲ یا ... یا ۶ ظاهر خواهد شد. پس این آزمایش، **تصادفی** است.

مثال: اگر روی هر شش وجه یک تاس عدد ۲ را حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا قبل از ثابت‌شدن تاس (قبل از وقوع) می‌دانیم و یقین داریم که عدد ۲ رو می‌شود. مثلاً اگر روی پنج وجه یک تاس، عددهای ۱ تا ۵ و روی یک وجه آن عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۳ حک کنیم و تاس را بریزیم، این پدیده تصادفی نیست. زیرا از همهٔ حالت‌های رخداد این پدیده اطلاع نداریم. (کدام عدد طبیعی روی وجه ششم حک شده است؟)

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ای شامل همهٔ حالت‌های ممکن، در به وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را «فضای نمونه‌ای» می‌نامیم و معمولاً با «S» نشان می‌دهیم. به فضاهای نمونه‌ای که تعداد اعضای آنها متناهی یا قابل شمارش (هم‌ارز با N) باشند «فضاهای گسسته» می‌گوییم. در مثال‌های زیر سعی کرده‌ایم در حالت‌های متفاوت، فضای نمونه‌ای را برای آزمایش‌های تصادفی معرفی کنیم که در آینده و در حل مسائل و تست‌ها، این حالت‌ها مورد نیاز خواهند بود.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

I) کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز به صورت تصادفی.

● **جواب:** $n(S)=n!$

II) کنار هم قرار گرفتن اشیای a و b و c و d و a و a و c.

● **جواب:** $n(S)=\frac{6!}{2!\times 2!}$

III) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای ساختن یک تیم k نفرهٔ ورزشی.

● **جواب:** $n(S)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

IV) انتخاب تصادفی k نفر از بین n نفر برای کنار هم قرار گرفتن آنها.

● **جواب:** $n(S)=(n)_k=\frac{n!}{(n-k)!}$

V) انتخاب تصادفی k مهرهٔ رنگی از بین n مهره.

جواب: $n(S)=\binom{n}{k}$

تذکر ۱: توجه داریم که در تمام مسائل احتمال مربوط به مهره‌هـای رنگی، هر r مهره از یک رنگ با شـماره‌های ۱ تا r شماره‌گذاری شده‌اند و در واقع، مهرهٔ آبی شمارهٔ ۱ با مهرهٔ آبی شمارهٔ ۲ فرق دارد.

تذکر ۲: اگر S_1 و S_2 فضاهای نمونه‌ای مربوط به دو پدیدهٔ تصادفی باشـند و این دو پدیده با هم رخ دهند و یک پدیدهٔ تصادفی ایجاد کنند، و S فضای نمونه‌ای این پدیده باشد، داریم:

$$n(S)=n(S_1)\times n(S_2)$$

VI) ریختن یک تاس:

$$S=\{1,2,...,6\}\to n(S)=6$$

VII) پرتاب یک سکه: $S=\{H,T\}\to n(S)=2$

IIX) ریختن دو تاس با هم، یا ریختن یک تاس دوبار:

$$n(S)=6\times6=36$$

IX) پرتاب n سکه و k تاس با هم:

$$n(S)=(\underbrace{2\times2\times...\times2}_{n})\times(\underbrace{6\times6\times...\times6}_{k})=2^n\times6^k$$

تعریف پیشـامدهای تصادفی: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ S مانند A را یک «پیشامد تصادفی از فضای S» می‌نامیم.

تذکـر ۱: اگـر S مجموعـه‌ای n عضوی باشـد، دارای 2^n زیرمجموعه است. طبق تعریف فوق، هر $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی است. پس روی S به تعداد 2^n پیشامد تصادفی می‌توان تعریف کرد. $A_1=\varnothing$ و $A_2=S$ نیز پیشامدهای تصادفی از فضای S هسـتند و به ترتیب آنها را **پیشـامد غیرممکن** و **پیشامد مطمئن** یا **حتمی** می‌نامیم.

تذکـر ۲: اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد پیشـامدهای تصادفی k عضوی کـه می‌توان روی S تعریف کرد، برابر است با $\binom{n}{k}$.

مثال: تاسـی را می‌ریزیم، اولاً چند پیشامد تصادفی روی فضای نمونه‌ای حاصل می‌توان تعریف کـرد؟ ثانیاً این آزمایش تصادفی چند پیشامد تصادفی ۴ عضوی دارد؟

اولاً: $S=\{1,2,...,6\}\to$

تعداد پیشامدهای تصادفی $=2^6=64$

ثانیاً: تعداد پیشامدهای ۴ عضوی $=\binom{6}{4}=15$

تعریـف: اگـر S فضای نمونـه‌ای یک پدیـدهٔ تصادفی و $A\subseteq S$ پیشامدی در فضای S باشد، متمم پیشامد A را با A' یا A^c یا $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم؛ به شرط آن‌که: $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=S$.

تذکر ۳: اگر A' متمم پیشامد A از فضای S باشد، رخداد A به منزلهٔ عدم رخداد A' و رخداد A' به منزلهٔ عدم رخداد A است (A و A' نمی‌توانند با هم رخ بدهند).

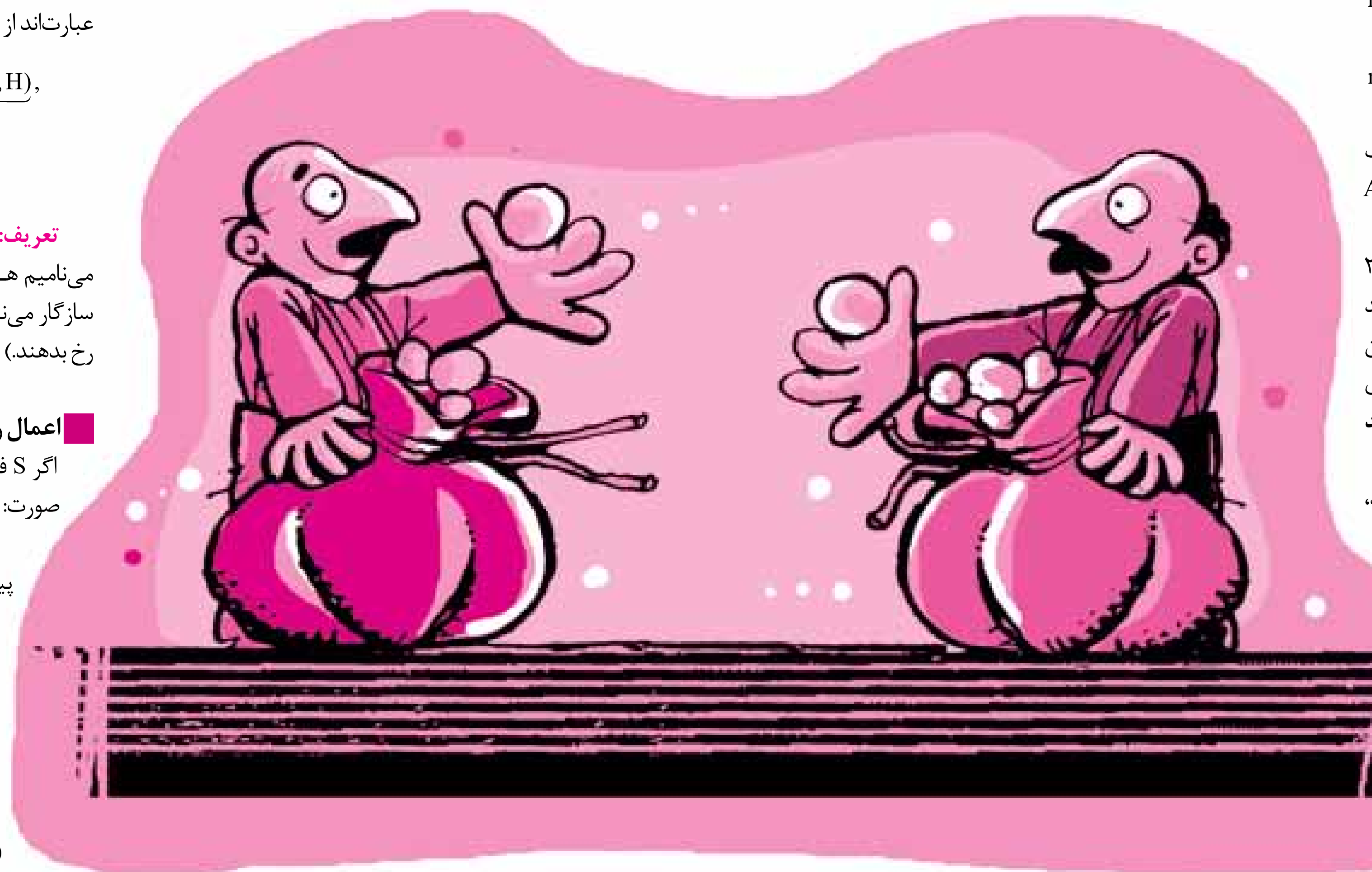
تذکر ۴: در بعضی از مسئله‌ها و تست‌ها، تعداد عضوهای A در S زیاد و شمارش آنها سخت و یا وقت‌گیر است و ما از طریق محاسـبهٔ تعداد عضوهای A' و کم‌کردن آنها از کل عضوها، به تعداد عضوهای A پی می‌بریم.

تعریـف: اگر $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ فضـای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، در این صورت هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی مانند $A_i=\{a_i\}$ را یک **پیشامد ساده** در فضای S می‌نامیم.

تذکر مهم: اگـر $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ فضای نمونـه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد و پیشامد سـادهٔ $\{a_i\}$ رخ دهد، در این صورت هر پیشامد تصادفی مانند $A\subseteq S$ که شامل a_i باشد نیز رخ داده است.

مثال: اگر تاسـی را بریزیم و مشاهده کنیم که عدد ۲ رو شده است، در این صورت هر زیرمجموعهٔ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ که شـامل ۲ باشـد، قطعـاً رخ داده اسـت. مثلاً $A_1=\{2\}$، $A_2=\{1,2\}$، $A_3=\{1,2,3\}$ و ... و $A_{32}=\{1,2,3,4,5,6\}$ قطعاً رخ داده‌انـد. (مجموعهٔ S دارای $2^{6-1}=32$ زیرمجموعه است که شامل عدد ۲ هستند.)

تذکر مهم: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A که همگی در k عضو مشخص مشترک باشند، برابر است با 2^{n-k}.



مثال: ۱. از بین ۸ نفر ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد A انتخاب حداقل یکی از دو نفر a و b بین این ۴ نفر باشد، در این صورت پیشامد A چند عضو دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا پیشامد A' آن است که هیچ‌کدام از این دو نفر a و b بین ۴ نفر نباشد؛ یعنی ۴ نفر از بین ۶ نفر غیر از a و b انتخاب شوند. پس: $n(A')=\binom{6}{4}$ و چون: $n(S)=\binom{8}{4}=70$، پس:

$$n(A)=n(S)-n(A')=70-15=55$$

۲. تاسی را می‌ریزیم. اگر زوج بیاید، تاس دیگری می‌ریزیم و اگر فرد بیاید دو سـکه پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A را رو شـدن عدد اول بـرای تاس اول تعریف کنیـم، A چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

حـل: گزینهٔ (۲) صحیح اسـت، زیرا اعـداد اول ۱ تا ۶ عبارت‌اند از $\{2,3,5\}$. بنابراین:

$$A=\{\underbrace{(2,1),(2,2),...,(2,6)}_{6},\underbrace{(3,T,T),...,(3,H,H)}_{4},\underbrace{(5,T,T),...(5,H,H)}_{4}\}\to|A|=14$$

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را **ناسازگار** می‌نامیم هـرگاه: $A\cap B=\varnothing$ و اگر: $A\cap B\neq\varnothing$، آن‌ها را سازگار می‌نامیم. (اگر A و B ناسازگار باشند، نمی‌توانند با هم رخ بدهند.)

اعمال روی پیشامدها

اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشـد، در این صورت:

I) $(A\cap B)$ عبارت اسـت از پیشامد آنکه هر دو پیشامد A و B با هم رخ بدهند.

II) $(A\cup B)$ عبارت اسـت از پیشـامد آنکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ بدهد.

III) $(A-B)$ عبارت اسـت از پیشامد آنکه پیشامد A رخ بدهد و B رخ ندهد.

IV) $(A\Delta B)$ عبارت اسـت از پیشامد آنکه دقیقاً A رخ بدهـد یا دقیقـاً B رخ بدهد؛ زیرا:

$$(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)$$



تذکر مهم:
بـا توجه به قوانین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) و تعاریف قبل، روابط زیر بین پیشامدها برقرار است:
$$۱)\ n(A)=n(S)-n(A') \quad و \quad n(A')=n(S)-n(A)$$

تذکـر: از ایـن به بعد به جای $n(A)$ از نماد $|A|$ اسـتفاده می‌کنیم.

$$۲)\ n(A\cup B)=|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$۳)\ |A-B|=|A|-|A\cap B|$$
$$۴)\ |A'\cap B'|=|(A\cup B)'|=|S|-|A\cup B|$$
$$۵)\ |A\Delta B|=|(A-B)\cup(B-A)|=|A-B|+|B-A|$$
$$\xrightarrow{(۳)} |A\Delta B|=|A|+|B|-۲|A\cap B|$$

۳. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر پیشامد A را مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۳ تعریف کنیم، در این صورت A چند عضوی است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۳ ۴) ۲۸

● **حل:** گزینهٔ (۳) صحیح است. مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد که در این صورت بهتر است A' را به‌دست آوریم:

$A'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد

$$|A'|=۳ \rightarrow |A|=|S|-|A'|=۳۶-۳=۳۳$$

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم و پیشامد A را چنین تعریف می‌کنیـم که مجموع دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشـند. در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

● **حل:** گزینهٔ (۲) صحیح اسـت. B را پیشامد مجموع ۸ و C را پیشـامد هر دو فرد تعریف می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$|A|=|B\cup C|=|B|+|C|-|B\cap C|=۵+۹-۲=۱۲$$
$$B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\} \rightarrow |B|=۵$$
$$C=\{۱,۳,۵\}\times\{۱,۳,۵\} \rightarrow |C|=۹$$
$$(B\cap C)=\{(۳,۵),(۵,۳)\} \rightarrow |B\cap C|=۲$$

۵. در جعبـه‌ای ۴ مهـرهٔ قرمز، ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سـبز وجود دارد. از این جعبه سـه مهره را با هم و به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. اگر پیشامد A را حداقـل ۱ مهرهٔ آبی تعریف کنیم، در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۳۵ ۴) ۱۸۵

● **حل:** گزینهٔ (۴) صحیح است. محاسبهٔ $|A'|$ ساده‌تر است و A' پیشـامد آن است که هیچ مهره‌ای آبی نباشد یا هر سه مهره غیرآبی باشند که در این صورت داریم:

$$|S|=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰ \quad و \quad |A'|=\binom{۷}{۳}=۳۵$$
$$\rightarrow |A|=۲۲۰-۳۵=۱۸۵$$

تذکر مهم:
در تمام مسـئله‌ها و تسـت‌هایی که با مهره‌های رنگی سروکار داریم، همواره مهره‌هایی که از یک رنگ هستند، متمایزند.
برای مثال، ۴ مهرهٔ قرمز به صورت قرمز ۱، قرمز ۲، قرمز ۳ و قرمز ۴ مشـخص شده‌اند. همچنین، در انداختن دو تاس با هم، تاس‌ها را آبی و قرمز و متمایز فرض می‌کنیم، و فضای نمونه‌ای آزمایش انداختن دو تاس با هم، با فضـای نمونه‌ای آزمایش انداختن یک تاس در دو مرحله، برابر است.

فضاهای نمونه‌ای پیوسته

اگـر S فضای نمونـه‌ای یک آزمایش تصادفی باشـد، به گونه‌ای که S متناهی نباشـد و اعضای آن شـمارش‌پذیر نیز نباشند (S گسسته نباشد)، در این صورت فضای S را پیوسته می‌نامیم. (هر مجموعهٔ نامتناهی که با N هم‌ارز نباشد، یعنی در تناظر یک‌به‌یک نباشد، پیوسته نامیده می‌شود.)

به‌طور کلی، هر یک از کمیت‌های طولی، سطحی، حجمی، وزنی و زمانی، کمیت‌های پیوسته‌اند و فضاهای نمونه‌ای که از این کمیت‌ها تشکیل یافته باشند، فضاهای نمونه‌ای پیوسته نامیده می‌شوند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر اندازهٔ فضای نمونه‌ای و اندازهٔ پیشامدهای تعریف شده را مشخص کنید.

I) از بین اعداد حقیقی بازهٔ $[-۶,۱۴)$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشـامد A را منفی‌بـودن این عدد و B را صحیح بودن عدد انتخابی تعریف می‌کنیم:

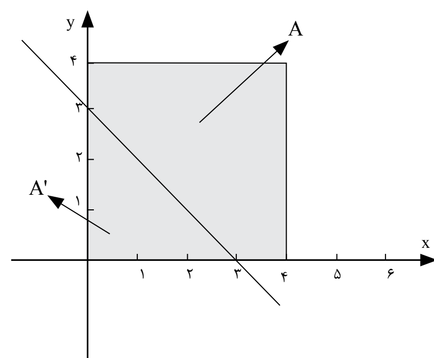
$$S=\{x\in R \mid -۶\le x<۱۴\} \rightarrow S\ طول = l_s=۲۰$$
$$A=\{x\in[-۶,۱۴) \mid x<۰\} \rightarrow l_A=۶$$
$$B=\{-۶,-۵,\dots,۱۲,۱۳\} \rightarrow l_B=۰$$

تذکر مهم:
اگر A مجموعه‌ای متناهی و یا شمارش‌پذیر باشد، همواره طول مجموعهٔ A صفر است. برای مثال، طول مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و حتی اعداد گویا صفر است، و نیز پاره‌خط یا خط دارای مساحت صفر است. همین‌طور هر صفحه حجمی برابر با صفر دارد.

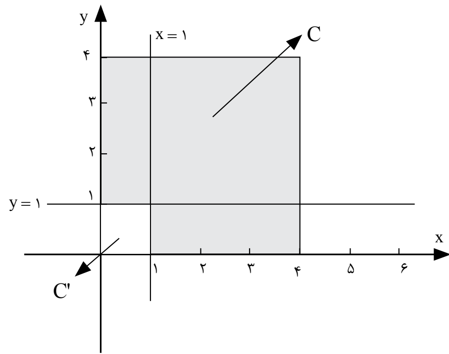
II) دو عـدد حقیقی ماننـد x و y از بازهٔ $[۰,۴]$ به تصادف انتخاب می‌کنیم و پیشامد A را مجموع دو عدد بزرگ‌تر از ۳ و پیشامد B را مجموع دو عدد مساوی با ۲ و پیشامد C را حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۱ تعریف می‌کنیم:

$$S=\{(x,y)\in R^۲ \mid ۰\le x\le ۴, ۰\le y\le ۴\}=[۰,۴]\times[۰,۴]$$
$$\rightarrow a_S=۴^۲=۱۶$$
$$A=\{(x,y)\in S \mid x+y>۳\}$$

فضای S، سطح مربعی است در ناحیهٔ اول به طول ضلع ۴ و مساحت ۱۶ و بنابراین: $|S|=a_S=۱۶$.



$$a_A=a_S-a_{A'}=۱۶-\frac{۹}{۲}=\frac{۲۳}{۲}=۱۱/۵$$
$$B=\{(x,y)\in S \mid x+y=۲\} \rightarrow a_B=B\ مساحت =۰$$
($x+y=۲$ در S یک پاره‌خط اسـت و مساحت پاره‌خط صفر است.)



$$C=\{(x,y)\in S \mid x>۱\ یا\ y>۱\}$$
$$a_C=a_S-a_{C'}=۱۶-۱=۱۵$$

تذکر: همان‌طـور که در مثال قبل مشـاهده کردید، در فضاهای پیوسته ممکن است پیشامد A ناتهی باشد، ولی اندازهٔ A صفر باشد (در حالت (I) $B\neq\emptyset$، ولی $L_B=۰$ و در حالت (II) نیز $B\neq\emptyset$، ولی $a_B=۰$).

تذکر: برای مشـخص کردن مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $ax+by>c$ کافی اسـت خط $ax+by=c$ را رسم کنیم. سـپس یک نقطه از یکی از دو نیم صفحهٔ ایجاد شده توسط این خط، را به دل‌خواه برگزینیم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم (نقطهٔ $O\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix}$ مناسـب‌ترین انتخاب است). اگر صدق کرد، نیم‌صفحهٔ شامل همان نقطه، و اگر صدق نکرد، نیم‌صفحهٔ دیگر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تشـکیل می‌دهند. برای مثـال، مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x+y>۳$ در مثال قبل قسمت (II) با جهت پیکان روی خط در شکل مربوطه مشخص شده است.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. احتمال در فضای گسسـته: اگر S یک فضای نمونه‌ای گسسته، و $A\subseteq S$ یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت احتمال رخداد پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$P(A)=\frac{A\ تعداد\ اعضای}{S\ تعداد\ اعضای} \rightarrow P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

می‌توان تابعـــی چون P از مجموعـــهٔ زیرمجموعه‌های S (مجموعهٔ توانی S یا P(S)) به بازهٔ $[0,1]$ تعریف کرد که به آن تابع احتمال می‌گوییم.

$$P : P(S) \to [0,1]$$

$$A \to P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{|A|}{|S|}$$

این تابع دارای ویژگی‌های زیر است:

$1)\ 0 \le P(A) \le 1$

زیرا :

$$A \subseteq S \to 0 \le |A| \le |S| \to \frac{0}{|S|} \le \frac{|A|}{|S|} \le \frac{|S|}{|S|} \to 0 \le P(A) \le 1$$

$2)\ P(S) = 1,\ P(\varnothing) = 0$

زیرا : $P(S) = \frac{|S|}{|S|} = 1,\ P(\varnothing) = \frac{|\varnothing|}{|S|} = \frac{0}{|S|} = 0$

$3)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

زیرا : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

$$\xrightarrow{\text{طرفین بر |S| تقسیم شود}} \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف احتمال}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۲. احتمال در فضای پیوســـته: اگر S یک فضای نمونه‌ای پیوســـته و $A \subseteq S$ پیشـــامدی تصادفی در فضای S باشـــد، برحسب اینکه فضای S از چه کمیت پیوسته‌ای تشکیل یافته باشـــد، احتمال رخداد پیشـــامد A به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

I) اگر فضای S کمیتی طولی باشد: $P(A) = \frac{l_A}{l_S}$

II) اگر فضای S کمیتی مساحتی باشد: $P(A) = \frac{a_A}{a_S}$

III) اگر فضای S کمیتی حجمی باشد: $P(A) = \frac{V_A}{V_S}$

IV) اگر فضای S کمیتی زمانی باشد: $P(A) = \frac{t_A}{t_S}$

اصول احتمال ـ قوانین و قضایای احتمال

آندره کولموگروف روســـی در سال ۱۹۳۳ سه اصل زیر را به عنوان اصل موضوعهٔ علم احتمال مطرح ساخت و توسط این سه اصل قوانین و قضایای احتمال را ثابت کرد:

اصـــل اول: اگر A پیشـــامدی از فضای نمونه‌ای S باشـــد (S پیوسته یا گسسته)، در این‌صورت $0 \le P(A) \le 1$.

اصل دوم: اگر S فضای نمونه‌ای باشد، $P(S) = 1$.

اصـــل ســـوم: اگر A و B دو پیشـــامد جدا از هم باشـــند (ناسازگار باشند)، یعنی $A \cap B = \varnothing$، در این صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \quad B)$$

قضیهٔ ۱: اگر A و B و C پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار از فضای S باشند، آن‌گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیهٔ ۲: اگر A و B دو پیشـــامد از فضای S باشند و $A \subseteq B$، آن‌گاه:

$I)\ P(A) \le P(B)$

$II)\ P(B - A) = P(B) - P(A) \quad A \quad B$

قضیهٔ ۳: اگر A و B دو پیشـــامد دل‌خواه از فضای S باشند، آن‌گاه: (S می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قوانین احتمال

قوانین زیر همگی با استفاده از اصول و قضایای بیان شده قابل اثبات هستند:

$1)\ P(\varnothing) = 0$

$2)\ P(A \cup A') = \underbrace{P(S)}_{1} = P(A) + P(A')$

$$\to \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - p(A) \end{cases}$$

$3)\ P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$4)\ P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

$5)\ P(A \cap B) \le P(A),\quad P(A \cap B) \le P(B)$

$6)\ P(A - B) \le P(A)$

$7)\ P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

$= P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$8)\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$9)\ P(A) + P(B) > 1 \Rightarrow \underbrace{(A \cap B) \ne \varnothing}_{\text{A و B سازگارند}}$

یا $P(A \cap B) \ne 0$

$10)\ P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

و $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

نگاهی به فیلم تاریخ مختصر زمان

احسان یارمحمدی

کلیدواژه‌ها: تاریخ مختصر زمان، استفن هاوکینگ، کیهان‌شناسی، کوآنتم، گنجینهٔ کیهانی، آنتروپی

اســـم فیلم: تاریخ مختصر زمان[1] **کارگردان:** اِرول موریس[2] **تهیه‌کنندگان:** دیوید هیکمن[3]، گوردُن فِریدمَن[4]، اســـتیون اِسپیلبِرگ[5] و کاتلین کِنِدی[6] **نوشته شده براساس:** کتاب استفن هاوکینگ[7] **هنرپیشه:** استفن هاوکینگ **موسیقی:** فیلیپ گلاس[8] **فیلم‌برداری:** جان بایِلی[9] **تاریخ اکران:** اکتبر ۱۹۹۱ در «سانتا مونیکا»[10] کالیفرنیا و اکران عمومی در ۲۱ اوت ۱۹۹۲ **مدت فیلم:** ۸۰ دقیقه **زبان:** انگلیسی

فیلم مستند «تاریخ مختصر زمان» دربارهٔ فیزیک‌دان، ریاضی‌دان و کیهان‌شناس، **استفن هاوکینگ** است که به مدت ۳۰ سال کرسی ریاضیات «لوکاس» را داشت. وی به بیماری ALS یا «اسکلروز جانبی آمیوتروفیک» مبتلاست. اسم این فیلم از نام کتابی با همین عنوان، اثر استفن هاوکینگ گرفته شده است که به مدت ۲۳۷ هفته، رکورددار پرفروش‌تریـــن کتـــاب در بریتانیا بود.[11] البته بـــا این تفاوت که در کتاب «تاریخ مختصر زمـــان»، موضوع مورد بحث «کیهان‌شناسی» است، در حالی‌که موضوع اصلی فیلم «تاریخ مختصر زمان» زندگی استفن هاوکینگ است. این فیلم گوشه‌ای از زندگی وی را در ابعاد شخصی و علمی از طریق گفت‌وگو با پرستار دوران کودکی او، و همکارانش در عرصهٔ دانش، و نیز مصاحبه‌های اختصاصی با اعضای خانوادهٔ او به تصویر کشیده است.

از آثار تألیفی دیگر اســـتفن هاوکینگ می‌توان به «طرح بزرگ»، «جهان در پوســـت گردو»، «دریچه‌ای به ســـوی کیهان» و «گنجینهٔ کیهانی» اشاره کرد. از آن‌جا که ابتلای استفن هاوکینگ به بیماری فوق باعث شده است تا پس از گذشت سال‌ها، وی گرفتار یک فلج کامل شود و تنها می‌تواند اندکی دو انگشت دست چپش را حرکت دهد، از اواخر دههٔ ۱۹۶۰ برای جابه‌جایی از صندلی چرخ‌دار استفاده می‌کند. برای او یک رایانهٔ شخصی بسیار پیشرفته طراحی و تهیه شده است که او تنها با تکان‌دادن آن دو انگشت قابل استفاده‌اش از آن استفاده می‌کند. آن رایانه به جای استفن هاوکینگ صحبت می‌کند و آن‌چه را که او مایل است برایش به محیط پیرامون انتقال می‌دهد. شما می‌توانید به تعداد دفعات زیاد این صحنه‌ها را در فیلم تاریخ مختصر زمان مشـــاهده کنید. در ادامهٔ فیلم می‌توانید به صحبت‌هایی که استفن هاوکینگ دربارهٔ کیهان‌شناسی، جاذبه، کوانتوم و دستاوردهایی که در زمینهٔ سیاه‌چاله‌ها و انفجار آن‌ها عرضه کرده است، گوش فرادهید.

جالب توجه‌ترین صحنهٔ این فیلم اشاره به فنجانی دارد که آن را رها می‌کنند، که پس از برخورد با سطح زمین تکه‌تکه می‌شود؛ و این امر بیانگر این نقطه‌نظر از استفن هاوکینگ است که می‌گوید: «تفاوت میان گذشته و آینده از کجا ناشی می‌شود؟ قوانین علم میان گذشته و آینده تمایزی قائل نمی‌شود، با این حال در زندگی عادی تفاوتی عظیم میان گذشته و آینده وجود دارد. ممکن است ببینید یک فنجان از روی میز به زمین بیفتد و تکه‌تکه شود، اما هرگز شاهد آن نخواهید بود که فنجان تکه‌های خود را جمع کند و به بالا بپرد و به روی میز برگردد. افزایش بی‌نظمی یا به اصطلاح آنتروپی، چیزی است که گذشته را از آینده متمایز می‌کند و به زمان جهت می‌دهد.»[12]

پی‌نوشت

1. A Brief History of Time
2. Errol Morris
3. David Hickman
4. Gordon Freedman
5. Steven Spielberg
6. Kathleen Kennedy
7. Stephen Hawking
8. Philip Glass
9. John Bailey
10. Santa Monica

۱۱. یکـــی از جمـــلات زیبا و پرمغزی که می‌توانید در کتاب پرفـــروش تاریخ مختصر زمان ملاحظه کنید، این جمله است: «اگر ما بتوانیم فرضیه‌های لازم برای توضیح هر پدیده و مادهٔ موجود در هســـتی را کشـــف کنیم، این کشف نوعی پیروزی نهایی برای خرد انسانی است، برای این‌که آن‌گاه ما می‌توانیم فکر خدا [ســـنّت‌های الهی] را بخوانیم.»

۱۲. اســـتفن هاوکینگ زمانی عقیده داشـــت که گســـترش جهان هستی متوقف و جهان دوباره جمع می‌شود. او بعدها گفت که اشتباه می‌کرده است.

هوشنگ شرقی



المپیاد ریاضی در اسپانیا

کلیدواژه‌ها: المپیاد ریاضی، اسپانیا، نقاط شبکه‌ای، سهمی، نقطهٔ ثابت، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، مرکز ثقل مثلث

در کشور اسپانیا از سال ۱۹۶۴، المپیادهای ریاضی به‌طور مرتب و در دو نوبت برگزار می‌شـوند. در سـال‌های اول در هر نوبت به شـرکت‌کنندگان هشت مسـئله داده می‌شد، اما در سال‌های بعد، مانند المپیاد بین‌المللی ریاضی، شش سؤال در دو روز متوالی داده می‌شود. نخستین حضور اسپانیا در المپیادهای بین‌المللی ریاضی به سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد که رتبهٔ بیست و سوم را به‌دست آورد. از آن سال تاکنون کشور اسپانیا مرتباً در این رقابت‌ها حضور داشته و بهترین مقامی که به‌دست آورده، در رقابت‌های ۱۹۸۷ کوبا بود که رتبهٔ بیسـت و دوم را کسب کرد. ولی در سـال‌های بعد روندی به شدت نزولی داشت و تا رتبهٔ شـصت و چهارم نیز سـقوط کرد. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که این کشور تنها مهد فوتبال و گاوبازی است!

نکتهٔ جالب توجه آن است که به‌رغم نزول مذکور، مسائل مطرح شـده در المپیاد ریاضی این کشور مسائل قابل قبولی هستند و از سطح کیفی نسبتاً خوبی برخوردارند. این موضوع را می‌توان در متن سـؤال‌ها که در پی می‌آیند، مشاهده کرد. البته در مقایسـه با سؤال‌های مسابقات کشورهای صاحب نام در المپیاد ریاضی (مانند کشورهای اروپای شرقی، انگلستان، آمریکا، چین، هندوسـتان و ایران)، این سؤال‌ها بسیار سطح پایین‌تر هستند، اما گاهی هم سؤال‌های بسیار دشوار در میان مسائل آن‌ها دیده می‌شود. این کشور همچنین یک بار در سال ۲۰۰۸ میزبان المپیاد بین‌المللی ریاضی بوده است.

در این‌جا منتخبی از مسـائل مطرح شده در المپیادهای سـال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۷ این کشـور را همراه با راه‌حل‌های آن‌ها آورده‌ایم.

صورت مسائل

۱. مجمـوع توان دوم ۱۰۰ جملهٔ نخسـت یک دنبالهٔ حسابی را حساب کنید، اگر مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست آن ۱، و مجموع دومین، چهارمین، و... صدمین جملهٔ آن نیز ۱ باشد.

۲. فـرض کنیـد A یک مجموعهٔ ۱۶ عضـوی از نقاط شـبکه‌ای یک مربع ۴×۴ باشد. بیشـترین تعداد اعضای A را بیابید، به‌طوری که هیچ سـه تا از آن‌ها تشـکیل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ندهند.

۳. p یک عدد اول است. همهٔ اعداد $k \in Z$ را بیابید که $\sqrt{k^2 - pk}$ عددی صحیح باشد.

۴. همهٔ سهمی‌هایی را به معادلهٔ $y = x^2 + px + q$ که سه نقطهٔ برخورد با محورهای مختصات به‌وجود می‌آورند، در نظر بگیرید. دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دایره‌ها از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵. اعـداد طبیعـی a و b بـه صورتـی هسـتند کـه $\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b}$ عددی صحیح است. نشان دهید بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b از $\sqrt{a+b}$ بزرگ‌تر نیست.

۶. فـرض کنید G مرکز ثقل مثلث ABC باشـد. ثابت کنید که اگر $AB + GC = AC + GB$ آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

حل مسائل

۱. اگر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی را d و جملهٔ اول آن را a_1 در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = S_{100} = \frac{100}{2}[2a_1 + 99d] = 1$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 99d = \frac{1}{50} \Rightarrow 100a_1 + 4950d = 1$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100} = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + d + a_1 + 3d + \dots + a_1 + 99d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + (1 + 3 + 5 + \dots + 99)d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + \frac{50}{2}[2 + 49 \times 2]d = 1$$

$$\Rightarrow 50a_1 + 2500d = 1 \Rightarrow -\begin{cases} 100a_1 + 4950d = 1 \\ 100a_1 + 5000d = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{50},\ a_1 = -\frac{49}{50} \Rightarrow a_n = -\frac{49}{50} + (n-1)\frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{50}n - 1$$

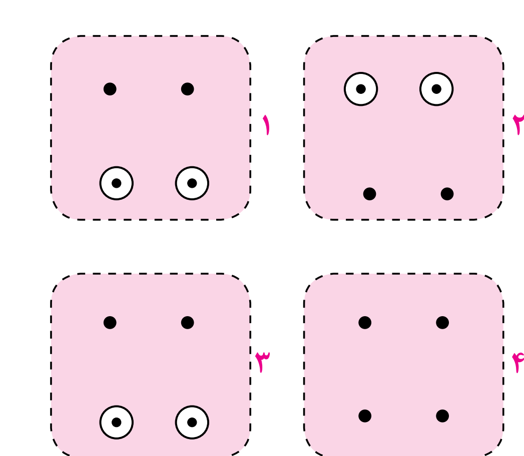
$$\sum_{i=1}^{100} a_i^2 = \sum_{i=1}^{100} (\frac{1}{50}i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{100} (\frac{1}{2500}i^2 - \frac{2}{50}i + 1)$$

$$= \frac{1}{2500}\sum_{i=1}^{100} i^2 - \frac{2}{50}\sum_{i=1}^{100} i + 100$$

$$= \frac{1}{2500} \times \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - \frac{1}{25} \times \frac{100 \times 101}{2} + 100$$

$$= \frac{6767}{50} - 102 = 33/34$$

۲. شبکهٔ نقاط را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم. اگر در یکی از این طبقه‌ها سه نقطه را در نظر بگیریم، بدیهی است که این سه نقطه رئوس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین خواهند بود. پس در هـر طبقه می‌توانیم حداکثر دو نقطه را علامت بزنیم.



مطابق شـکل، در سه طبقه از این طبقات، در هر یک دو نقطه را جدا کرده‌ایم. اکنون به‌راحتی می‌توان دید که هر یک از نقاط طبقهٔ چهـارم را که علامت بزنیم، با دو نقطه از نقاط علامت زده یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌السـاقین تشـکیل

می‌دهد (آن‌ها را خودتان مشخص کنید). بنابراین حداکثر شش نقطه را می‌توان از مجموعهٔ A مشخص کرد که این ویژگی را داشته باشند. در حالت‌های دیگر هم می‌توان به همین صورت استدلال کرد.

۳. طبق فرض: $\sqrt{k^2-pk}\in Z$. بنابراین:

$$\sqrt{k^2-pk}=m \Rightarrow k^2-pk=m^2 \Rightarrow k^2-pk-m^2=0$$
$$\Rightarrow \Delta = p^2+4m^2=t^2 \Rightarrow t^2-4m^2=p^2$$
$$\Rightarrow (t-2m)(t+2m)=p^2$$

اکنون حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases}t-2m=p\\ t+2m=p\end{cases}\quad \begin{cases}t-2m=1\\ t+2m=p^2\end{cases}\quad \begin{cases}t-2m=p^2\\ t+2m=1\end{cases}$$

از دستگاه اول نتیجه می‌شود که $t=p$ و $m=0$ و از آنجا نتیجه‌می‌شود:

$k^2-pk=0 \Rightarrow k=0$ یا $k=p$

و از دستگاه دوم نتیجه می‌شود:

$m=\frac{p^2-1}{4}$ و $t=\frac{p^2+1}{2}$

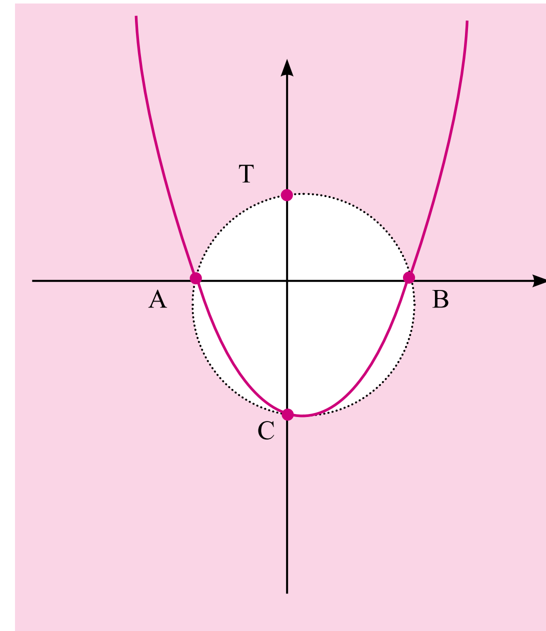
و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta = p^2+4(\frac{p^2-1}{4})^2$$
$$=p^2+\frac{(p^2-1)^2}{4}=\frac{(p^2-1)^2+4p^2}{4}=(\frac{p^2+1}{2})^2$$
$$\Rightarrow k=\frac{p\pm\frac{p^2+1}{2}}{2}$$
$$\Rightarrow k_1=(\frac{p+1}{2})^2, k_2=-(\frac{p-1}{2})^2$$

از دستگاه سوم نیز همین جواب‌ها به‌دست می‌آیند. پس مجموعهٔ جواب‌های k عبارت‌اند از:

$$\{0, p, (\frac{p+1}{2})^2, -(\frac{p-1}{2})^2\}$$

۴. مطابق شکل، اگر سهمی مزبور محور xها را در نقاط A و B و محور yها را در نقطهٔ C قطع کند، مختصات نقاط A و B به صورت $A\begin{vmatrix}x_1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_2\\0\end{vmatrix}$ خواهد بود که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ هستند. بنابراین $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-p$ و $x_1.x_2=\frac{c}{a}=q$ و مختصات C به صورت $C\begin{vmatrix}0\\q\end{vmatrix}$ است.



اگر معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از این سه نقطه به صورت $y^2+x^2+ax+by+c=0$ باشد، با جای‌گذاری مختصات A، B و C در این معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_1^2+ax_1+c=0\\ x_2^2+ax_2+c=0\\ q^2+bq+c=0\end{cases}$$

از کم کردن دو طرف معادله‌های اول و دوم نتیجه می‌شود:

$$x_1^2-x_2^2+a(x_1-x_2)=0 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+a)=0$$

و چون: $x_1\neq x_2$ (چرا؟) پس:

$$a=-(x_1+x_2)=p$$
$$c=-x_1^2-ax_1=-x_1^2+x_1(x_1+x_2)=x_1x_2=q$$

و با جای‌گذاری c در معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود:

$$b=-q-1$$

و از آنجا معادلهٔ دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2+y^2+px-(q+1)y+q=0$$
$$\Rightarrow q(1-y)+px+(x^2+y^2-y)=0$$

حال اگر سه معادلهٔ $1-y=0$، $x=0$ و $x^2+y^2-y=0$ با هم برقرار باشند، معادلهٔ فوق به ازای جمیع مقادیر p و q برقرار است. اما مقادیر $x=0$ و $y=1$ هر سه معادله را برقرار می‌کنند، لذا نقطهٔ $T(0,1)$ که در شکل هم مشخص شده، نقطهٔ ثابتی است که این دایره به ازای همهٔ مقادیر p و q همواره از آن می‌گذرد.

۵. فرض می‌کنیم: $(a,b)=d$. بنابراین: $a=dq$ و $b=dq'$ و در نتیجه:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{dq+1}{dq'}+\frac{dq'+1}{dq}$$
$$=\frac{dq^2+q+dq'^2+q'}{dqq'} \Rightarrow dqq' \mid dq^2+q+dq'^2+q'$$
$$\Rightarrow d \mid dq^2+dq'^2+q+q' \Rightarrow d \mid q+q'$$
$$\Rightarrow d^2 \mid dq+dq' \Rightarrow d^2 \mid a+b \Rightarrow d^2 \le a+b$$
$$\Rightarrow d \le \sqrt{a+b}$$

۶. با توجه به قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$MB=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$
$$NC=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\ (AB=c, AC=b, BC=a)$$
$$\Rightarrow GB=\frac{2}{3}BM=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$
$$GC=\frac{2}{3}NC=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+c=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}+b$$
$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}(\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-\sqrt{2a^2+2c^2-b^2})$$
$$\Rightarrow b-c=\frac{1}{3}\times\frac{(2a^2+2b^2-c^2)-(2a^2+2c^2-b^2)}{\underbrace{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}+\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}_{k}}$$
$$=\frac{3b^2-3c^2}{3k} \Rightarrow b-c=\frac{(b-c)(b+c)}{k}$$
$$\Rightarrow (b-c)[\frac{b+c}{k}-1]=0$$

می‌توان نشان داد که: $k\neq b+c$ (با برهان خلف ثابت کنید) و در نتیجه $b-c=0$ و از آنجا: $b=c$.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی



در جدول واژه‌های به‌هم ریختهٔ مقابل، نام‌های تعدادی از ریاضی‌دانان قدیم ایران و جهان آمده است. این نام‌ها ممکن است به صورت افقی، عمودی و مورب و از هر دو طرف نوشته شده باشند. همهٔ نام‌ها را به همین ترتیب از جدول خط بزنید. در پایان تعدادی حرف در جدول باقی می‌مانند. از ترکیب این حرف‌ها نام یکی از ریاضی‌دانان ایرانی معاصر به‌دست می‌آید. نام و زندگی نامهٔ مختصری از او را برای ما بفرستید و جایزه‌ای مناسب بگیرید!

ف	ر	م	ا	س	و	پ	ا	پ	ا	ف
ت	ی	ل	ر	و	ت	ن	ا	ک	ی	ا
ل	د	ل	ا	ا	ت	ن	ک	ب	ل	ر
ا	پ	ل	ت	گ	پ	ح	و	ر	گ	ا
ک	ی	ز	ی	ر	ی	ن	ر	ن	ا	ب
س	د	ی	ل	ق	ا	ا	ر	و	ت	ی
ا	هـ	م	ی	چ	ب	ک	ل	ل	ر	ر
پ	ی	ش	ی	ر	ن	ا	د	ی	ا	و
ک	ر	ج	ی	و	گ	س	ل	ا	ت	ن
ا	و	ل	ر	خ	و	ا	ر	ز	م	ی
ک	ف	ک	د	م	و	ر	گ	ا	ن	د

نام‌های ریاضی‌دانان:
اقلیدس، فارابی، نیریزی، فیبوناچی، برنولی، گالوا، تارتاگلیا، بیرونی، دکارت، خوارزمی، تالس، دمورگان، کرونکر، اولر، فوریه، کرجی، پاسکال، والیس، گاوس، کپلر، کانتور، نپر، پاپوس، فرما، تیلر.

هوشنگ شرقی

پای صحبت ابراهیم دارابی، معلم و نویسندهٔ پیش‌کسوت ریاضی

اشاره

در روز معلم، مجلهٔ «رشد برهان متوسطه» میزبان یکی از معلمان رشتهٔ ریاضی بود که سال‌های مدیدی را با این رشته زیسته است. در این نشست کوشیدیم تجلیلی از استاد **ابراهیم دارابی** صورت گیرد و با او دربارهٔ همه‌چیز سخن گفته شود، چرا که دارابی چهره‌ای چندوجهی است و علاوه بر ریاضیات، در عرصهٔ شطرنج و تألیف و ترجمهٔ آثار ادبی هم ید طولایی دارد. همان‌طور که خواهید خواند، این مصاحبه با وجههٔ شطرنجی استاد آغاز می‌شود و بعد به عرصهٔ ریاضیات و زندگی شخصی و ادبی وی پرداخته می‌شود. آن روز، **حمیدرضا امیری**، سردبیر رشد برهان متوسطه، **میرشهرام صدر** و **هوشنگ شرقی**، مدیران داخلی سابق و فعلی مجله، به همراه **محمدهاشم رستمی** و **سیدمحمدرضا هاشمی موسوی** حضور داشتند.



اول سؤالات را برای خودم حل می‌کردم، بعد به کلاس می‌رفتم







در صفحهٔ شطرنج

شرقی: امروز سه‌شنبه ۱۲ اردیبهشت ۱۳۹۱، روز معلم، در خدمت استاد ابراهیم دارابی هستیم؛ همراه با اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد برهان متوسطه. ما ابراهیم دارابی را به عنوان دبیر ریاضی، مؤلف کتاب‌های ریاضی به‌ویژه برای علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی و داوطلبان شرکت در المپیادها، مترجم کتاب‌های ریاضی و پیش‌کسوت این رشته می‌شناسیم. اما از این‌ها مهم‌تر، شخصیت چندبعدی و چندوجهی ایشان است که من می‌خواهم در این مصاحبه به یکی از آن‌ها اشاره کنم. در بخشی از کتاب شاهنامه، میراث عظیم فرهنگی ایران زمین و یادگار حکیم **ابوالقاسم فردوسی**، حکایتی هست در مورد کاروان هدایایی که از کشور هند به ایران ارسال شده و هدیهٔ ویژه‌ای نیز در میان هدایاست. شاهنامه می‌آورد:

بیاورد پس نامه‌ای بر پرند
نبشته به نوشیروان رای هند
یکی تخت شطرنج کرده به رنج
تهی کرده از رنج شطرنج گنج
چنین داد پیغام، هندی ز رای
که تا چرخ باشد تو بادی به جای
کسی کو به دانش برد رنج بیش
بفرمای تا تخت شطرنج پیش
نهند و ز هر گونه رای آورند
که این نغز بازی به جای آورند
بدانند هر مهره‌ای را به نام
که چون بایدش راند و خانه کدام
پیاده بدانند و پیل و سپاه
رخ و اسب و رفتار فرزین و شاه
گر این نغز بازی برون آورند
به دانندگان بر فزون آورند

و در ادامه حکایت می‌کند که اگر ایرانیان در این بازی نتوانند بر هندی‌ها غلبه یابند، نباید از آنان تقاضای خراج و مالیات کنند. بعد از آنکه همهٔ درباریان در این بازی نمی‌توانند مهارت کسب کنند، **بزرگمهر حکیم**، وزیر شاه، بعد از یک روز تعمق در بازی موفق می‌شود در آن تبحر بیابد و نمایندهٔ هندیان را در این بازی مغلوب کند. در این منظومه، فردوسی از زبان فرستندهٔ هندوان شطرنج را دانش می‌خواند:

وگر نام‌داران ایران گروه
از این دانش آیند یکسر ستوه
چو با دانش ما ندارند تاو
نخواهند از این مرز و بوم باژ و ساو

اما بزرگمهر آن را رزم و جنگ می‌داند:

شهنشاه باید که بیند نخست
یکی رزمگاه‌ست گویی درست

این مقدمه را مطرح کردم تا از آقای دارابی که علاوه بر ریاضیات در شطرنج هم آثار زیادی دارند و کتاب‌هایی تألیف و ترجمه کرده‌اند، بپرسم که از نظر شما شطرنج دانش است یا جنگ؟ نقش شطرنج بیشتر جنگ‌آفرینی و کینه‌جویی دو رقیب است یا یک ورزش فکری است؟

دارابی: ابتدا از شما تشکر می‌کنم که در این روز، یادی از من کردید. من اولین کتاب شطرنج برای کودکان پنج ساله را که سه نفر از مربیان بزرگ شوروی نوشته‌اند، ترجمه کردم. اسم این کتاب بود «نخستین گام‌ها در صحنهٔ شطرنج» که آقای **ایروانی**، مدیر «انتشارات دنیا» آن را چاپ کرد.

■ **شرقی:** چه سالی بود؟

● **دارابی:** سال ۱۳۵۴. در مقدمهٔ کتاب، این داستان برای بچه‌ها گفته می‌شود: پادشاهی می‌خواست به کشور همسایه حمله کند. همهٔ پیرمردها را صدا می‌کند و می‌پرسد: من چه کنم تا در این جنگ پیروز شوم؟ یکی از پیرمردها تختهٔ شطرنجی را به شاه نشان می‌دهد و می‌گوید: اگر می‌خواهید پیروز شوید، قبل از اینکه خون‌ریزی شود، بیایید و با من شطرنج بازی کنید. اگر مرا مغلوب کردید، به جنگ بروید. شاه عصبانی می‌شود و با پا می‌زند تخته شطرنج را داغان می‌کند. بعد هم به جنگ می‌رود و شکست می‌خورد و برمی‌گردد. هنگام برگشتن باز هم با همان پیرمرد روبه‌رو می‌شود. شاه می‌گوید: پیرمرد دیدی چه شد؟! پیرمرد می‌گوید: من که اول به شما گفتم. شما برای این‌که در جنگ پیروز شوید، اول باید فرماندهی یک جنگ بدون خون‌ریزی را یاد بگیرید، و بعد اقدام کنید.

اما از نظر من، شطرنج با زندگی تقریباً یکی است. همان‌طور که اگر شما در زندگی اشتباه کنید امکان برگشت نیست، در شطرنج هم اگر مهره‌ای را حرکت دادید، دیگر نمی‌توانید برگردانید. بنابراین اگر ما بچه‌ها را عادت بدهیم که شطرنج یاد بگیرند، به نظر من زندگی را بهتر یاد می‌گیرند. از این نظر، شطرنج بهترین آموزش زندگی برای کودکان است. در کشور ما گویا بچه‌های پنج ساله را آموزش نمی‌دهند، ولی در شوروی (روسیه فعلی) مدارس شطرنج بود. در آنجا بچه‌ها براساس علائق خود، یا موسیقی می‌آموزند، یا شطرنج و یا...

■ **شرقی:** شما به جز کتابی که به آن اشاره کردید، دیگر چه کتاب‌هایی در زمینهٔ شطرنج تألیف و ترجمه کرده‌اید؟

● **دارابی:** کتاب دیگری که در زمینهٔ شطرنج ترجمه کرده‌ام، اثر **کاکا بلانکا** و برای بزرگ‌سالان است. آخرین کتابم هم در این زمینه «مدرسهٔ شطرنج» است که «انتشارات مبتکران»، چاپ کرده است.

■ **شرقی:** شما خودتان هم شطرنج بازی می‌کنید؟

● **دارابی:** بله، علاقه دارم، ولی استاد شطرنج نیستم (با خنده).

■ **شرقی:** ترویج فرهنگ شطرنج را برای تقویت دانش ریاضی جوانان و نوجوانان کشورمان چه‌قدر مؤثر می‌دانید و در این صورت چه توصیه‌ای برای ما دارید؟ آیا حاضرید در این زمینه کاری برای مجلهٔ برهان انجام دهید؟

● **دارابی:** من در مورد قسمت اول سؤال شما گفتم که اگر واقعاً شطرنج در مدارس ما تدریس شود، برای دانش‌آموزان افق‌های جدیدی باز می‌کند و می‌توانند زندگی را بهتر ببینند و بشناسند. اما در زمینهٔ همکاری مجله، اگر حدود و زمینه‌اش مشخص شود، می‌شود کاری کرد.

■ **شرقی:** مثلاً رابطهٔ ریاضی و شطرنج را زمینهٔ خوبی می‌دانید؟

● **دارابی:** بله، در معماها و مسائل ریاضی، می‌توان به این موضوع هم پرداخت.

● **امیری:** من همین چند وقت پیش در کلاس درسم به موضوعی برخوردم. شما در ماتریس‌ها بخشی دارید که در مورد ویژگی‌های دترمینان بدون بسط است. من داشتم این موضوع را درس می‌دادم و می‌گفتم ما باید این سه عدد را صفر کنیم. حالا اگر بخواهیم این را صفر کنیم، در مرحلهٔ بعدی آن یکی خراب می‌شود. پس ستونی عمل نمی‌کنیم. یکی از بچه‌ها گفت: چه‌قدر این کاری که شما می‌کنید شبیه شطرنج است. یعنی ما باید همیشه یکی دو حرکت جلوتر را حدس بزنیم. من هم گفتم دقیقاً حرف خوبی زدی. خیلی هم تشویقش کردم.

■ **شرقی:** در شطرنج اصطلاح معروفی هست که می‌گویند باید تا هفت حرکت آینده را پیش‌بینی کنی. این تفکر، افق خلاقیت را خیلی باز می‌کند و با ریاضیات هم ارتباط نزدیکی دارد.

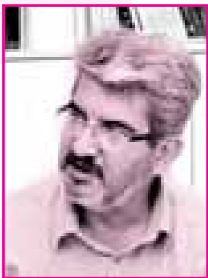
● **دارابی:** معماهایی هم در زمینهٔ شطرنج وجود دارند؛ مثل حرکت با اسب در همهٔ خانه‌های صفحه شطرنج بدون اینکه اسب بیش از یک‌بار در هر خانه نشسته باشد.



ابراهیم دارابی

در باب ترجمه

■ **شرقی:** حالا به یک جنبهٔ دیگر از توانایی‌های آقای دارابی می‌پردازیم. شما ترجمه‌های نسبتاً زیادی از زبان روسی به زبان فارسی دارید. زبان روسی را از کجا آموختید؟ در مدتی که به این کار مشغول بودید، چه


حمیدرضا امیری

تجربه‌هایی از فرهنگ و دانش ریاضی شوروی سابق و روسیهٔ فعلی دارید؟ آیا به روسیه سفر کرده‌اید؟ همچنین دربارهٔ ترجمه‌هایتان از زبان روسی و باکویی بفرمایید.

دارابی: اولین تألیف من یک کتاب هندسهٔ فضایی بود همراه با آقای **فردادی** که الان در رشت هستند. من در دوره‌ای که دانشجو بودم، در «دبیرستان دهخدا» تدریس می‌کردم. همکاری هم داشتیم که در «دبیرستان باباطاهر» تدریس می‌کرد. او که با دانش‌آموزان اختلاف پیدا کرده بود برگشت به مدرسهٔ دهخدا و آقای **صدر**، رئیس مدرسهٔ باباطاهر مرا به آنجا برد. آنجا یک کلاس چهارم و یک پنجم ریاضی داشت. بچه‌هایش خیلی فعال بودند و دفترداری هم داشتند که خیلی به ریاضی علاقه داشت. او مسائلی را به بچه‌ها می‌داد تا به کلاس ببرند و معلمان را در آمپاس بگذارند. بچه‌ها مسئله‌ای را هم به من دادند که دیدم اصلاً با مسائل کتاب‌های ما جور درنمی‌آید. گفتم که حل می‌کنم و می‌آورم. رفتم خانه و خیلی کار کردم. بالاخره راه‌حلی پیدا کردم، ولی طولانی بود.

هم‌زمان آقایان **فیض‌اللهی** و **توکل** در آموزش‌وپرورش برای دانشجویانی که خارج می‌رفتند، امتحاناتی برگزار می‌کردند. مرا با یک معلم دیگر دعوت کردند. سه سؤال من طرح کردم، سه سؤال هم او طرح کرد. گمان می‌کنم دانشجویان می‌خواستند به ژاپن بروند. فردای آن روز رفتم که برگه‌ها را تصحیح کنم. قبل از اینکه به آنجا بروم، خودم مسائل را حل کردم. برای مسئلهٔ لگاریتم راه‌حل من حدود یک صفحه بود. ولی وقتی ورقه‌ها را تصحیح می‌کردم، دیدم دانش‌آموزی در دو خط به جواب رسیده است. فکر کردم تقلب کرده است. ورقهٔ دیگر، ورقهٔ دیگر، دیدم نه، مسئله‌ای هست که من نمی‌دانم. ورقه‌ها را جمع کردم و تحویل دادم. گفتم فردا می‌آیم تصحیح می‌کنم.

نبش خیابان اکباتان یک کتاب‌فروشی بود. دیدم یک کتاب جلد آبی دارد از استاد شهریاری به نام کنکورهای شوروی. کتاب را خریدم و در راه که می‌رفتم ورق زدم و دیدم بله، همان مسئله آنجا هست. رفتم خانه و دیدم مسائلی هم که در مدرسه آن دفتردار به من می‌دهد، نظایر آن‌ها همه در این کتاب هست. آنجا من تصمیم گرفتم که زبان روسی را یاد بگیرم، چون می‌دانستم که استاد شهریاری هم در زندان روسی را یاد گرفته است. رفتم انجمن ایران و شوروی اسم نوشتم.

■ **فرجی:** چه سالی بود این ماجرا؟

● **دارابی:** سال ۱۳۴۸. من اسم نوشتم و سه سال در آنجا زبان روسی خواندم. در «ساکو» که کتاب‌های روسی می‌آورد، کتاب کنکورهای شوروی که استاد شهریاری ترجمه کرده بود، به زبان روسی موجود بود. آن را خریدم. چند مجله هم به زبان آذربایجانی دربارهٔ ادبیات خریدم. آمدم و کتاب استاد شهریاری را گذاشتم در مقابل اصل روسی آن. صفحه‌ها را تطبیق کردم و آن واژه‌هایی را که در زبان ریاضیات به‌کار می‌روند، یاد گرفتم. جلد دوم کنکورهای شوروی را من ترجمه کردم و «انتشارات گوتنبرگ» چاپ کرد. برای این ناشر کتاب‌های «کاربرد ریاضیات» و «هندسهٔ پرگار» را هم ترجمه کردم. بعد فهمیدم استاد شهریاری هم هندسه پرگار را ترجمه کرده است. برای همین ناشر کتاب «الفبای شطرنج» را هم ترجمه کردم.

■ **شرقی:** شما خودتان هم به روسیه سفر کرده‌اید؟

● **دارابی:** من به روسیه نرفته‌ام، ولی باکو رفته‌ام.

■ **شرقی:** کتاب‌هایی که از زبان آذربایجانی ترجمه کرده‌اید، چگونه بوده‌اند؟ زبان آن‌ها با ترکی ما فرق می‌کند؟

دارابی: عیناً با ترکی ما یکی است، منتها اصطلاحات ریاضی را باید بلد باشیم.

■ **شرقی:** خطشان سیریل است؟

● **دارابی:** بله، ولی حالا آن را عوض کرده‌اند.





دارابی در دنیای ادبیات

■ **شرقی:** یکی دیگر از جنبه‌های کاری آقای دارابی علاقه به ترجمهٔ رمان و داستان است. نخستین کتاب ادبی که ترجمه کردید چه نام داشت و چه سالی بود؟

● **دارابی:** بگذارید اول توضیحی بدهم. من دانشجو که بودم، آبونهٔ مجلهٔ ریاضیات در مدرسه به زبان روسی بودم. از این مجله هم برای ترجمه‌هایم استفاده کرده‌ام. اما در مورد کتاب ادبی، من اولین کتابی که خودم نوشتم «درخت سیب و پسرک فقیر» بود. کتاب کوچکی بود که دو داستان داشت. این کتاب را «انتشارات دنیا» چاپ کرد.

■ **شرقی:** چه سالی بود؟

● **دارابی:** حوالی سال ۱۳۵۰ بود. در مجلات آن موقع نوشتند که دارابی از صمد بهرنگی تبعیت می‌کند. این اولین کار من بود.

■ **شرقی:** قیمت کتاب چه‌قدر بود؟

● **دارابی:** شاید یک تومان.

■ **شرقی:** حق‌التألیف چه طور بود؟

● **دارابی:** عملاً حق‌التألیف نگرفتم. بنا بود به جایی کمک شود. من گفتم با این پول به آنجا کمک کنید.

■ **شرقی:** ترجمه‌هایتان را از کی شروع کردید؟

● **دارابی:** همان سال من ۱۶ کتاب کوچک برای کودکان و نوجوانان ترجمه کردم. مثل «شبی در میلاد» **ماکسیم گورکی**، «کشمش بازی» از **میرزا جلیل قلی‌زاده**. حالا تعدادی از این‌ها تحت عنوان «گنجشک ژولیده» در یک مجموعه چاپ شده‌اند. کتاب «دده قورقود» را هم ترجمه کردم. از **نریمان نریمانف** کتاب «درخت نظر کرده» را ترجمه کردم. یک کتاب هم در سال‌های منتهی به انقلاب ترجمه کردم به اسم «ایبیش» که آن را خمیر کردند و نگذاشتند چاپ شود. ولی بعد از انقلاب در شمارگان ۳۰ هزار نسخه چاپ شد.

■ **شرقی:** کتاب ایبیش برای خود من خاطرات بسیاری به همراه دارد. به یاد دارم اولین باری که این کتاب را خواندم، سال ۱۳۵۸ بود. یکی از دوستانم در مدرسهٔ راهنمایی این کتاب را به من داد. تأثیری که ایبیش روی من گذاشت، توصیف‌کردنی نیست. ترجمه‌ای بود از **سلیمان ولی‌اف**. داستانش هم دربارهٔ یک کارگر مستضعف و محروم در آذربایجان شوروی است و بچه کارگری که به خانواده‌اش کمک می‌کند. در عین حال هم خیلی مبارز است و دست آخر به دست یک بچه مالک کشته می‌شود. فوق‌العاده قشنگ و اثرگذار است. این کتاب چه‌طور به دست شما رسید؟ چه شد که تصمیم به ترجمه‌اش گرفتید و ناشرش که بود؟

● **دارابی:** این کتاب را من از ساکو گرفتم. اسم اصلی‌اش «جوللوت گوشی» بود. هرچه ما در فرهنگ لغت گشتیم، معنای جوللوت را پیدا نکردیم (جوللوت نام یک پرنده است). این کتاب را آقای **فرنود** مدیر «انتشارات معلم» چاپ کرد. اول کتاب را به یک ناشر دیگر داده بودم که او می‌خواست کتاب را سانسور کند. آقای فرنود گفت بده به من که بدون سانسور چاپ کنم.

■ **امیری:** بالاخره فهمیدید جریان اسم آن پرنده چه بود؟

● **دارابی:** نخیر، هنوز هم نمی‌دانم. در باکو معادن نفتی بود و نفت به برکه‌های آب نشت می‌کرد. بچه‌ها می‌رفتند و پارچه‌ای را روی آب پهن می‌کردند. نفتش را پارچه جذب می‌کرد. بعد پارچه را می‌چلاندند و نفتی را که به‌دست می‌آمد، می‌فروختند. در این برکه پرنده‌ها هم بودند. ایبیش می‌رود برای خواهرش از برکه پرنده بگیرد که پسر مالک او را غرق می‌کند.

■ **شرقی:** شما نویسندهٔ این کتاب را دیدید؟

● **دارابی:** نخیر، ندیدم. رفتم آذربایجان ولی متأسفانه نتوانستم ایشان را ببینم.

محسن فرجی: شما در حوزهٔ داستان هم رمانی به اسم «اشک سبلان» دارید. این کتاب چه سالی منتشر شد؟

● **دارابی:** فکر می‌کنم تقریباً پنج سالی باشد که منتشر شده است. رمانی دوجلدی است.

● **شرقی:** در تابستان سال ۱۳۸۵ درآمده است.

■ **امیری:** اشک سبلان رمان تاریخی است؟

● **دارابی:** بله، رمان تاریخی است که از شکست فرقهٔ دموکرات در اردبیل شروع می‌شود و بعد می‌آید تهران و مسائل ۳۰ تیر، ۲۸ مرداد و انقلاب را تعریف می‌کند.

استاد دارابی و ریاضیات

■ **شرقی:** حالا می‌رسیم به ریاضیات که بحث اصلی ماست. یکی از فعالیت‌های ماندگار شما در زمینهٔ ریاضی، عضویت در هیئت تحریریهٔ «مجلهٔ رشد ریاضی» در دههٔ ۱۳۶۰ است. چه شد که برای عضویت در هیئت تحریریه انتخاب شدید؟

● **دارابی:** من با آقای **لطفی درآبادی** فامیل یا در واقع آشنای خیلی نزدیک هستم. «درآباد» روستای کوچکی است نزدیک اردبیل که به آن باکوی کوچک می‌گویند؛ به‌خاطر اینکه حدود ۸۰-۷۰ درصد از ساکنان آن مهاجرانی هستند که از باکو آمده‌اند. آقای لطفی که معاون دفتر برنامه‌ریزی و مؤلف کتاب‌های ریاضی بود مرا به این‌جا دعوت کرد.

■ **شرقی:** مجله رشد ریاضی آن زمان با مجلهٔ رشد ریاضی امروز چه تفاوت‌هایی دارد؟

● **دارابی:** وقتی مقایسه می‌کنم می‌بینم این مجلات رشد با دوره‌ای که ما کار می‌کردیم، خیلی فرق دارند. به‌نظر من آن موقع عمق ریاضیات بیشتر بود و الان دیگر بیشتر فرمول ریاضی نیست و گفتاری شده است؛ یعنی توصیفی است.

■ **امیری:** در واقع بحث آموزش ریاضی قوی‌تر شده است؟

● **دارابی:** بله.

■ **شرقی:** نخستین کتاب ریاضی که شما ترجمه یا تألیف کردید، چه کتابی بود؟

● **دارابی:** ترجمه، همین «کنکورهای شوروی» بود. تألیف هم کتاب درسی «ریاضیات بازرگانی» بود.

■ **شرقی:** چند کتاب ریاضی ترجمه و تألیف کرده‌اید؟

● **دارابی:** حدود ۳۵ کتاب.

■ **شرقی:** شما ناشران کمک‌آموزشی امروز را چه‌طور ارزیابی می‌کنید؟

● **دارابی:** بیشتر سوق پیدا کرده‌اند به تست که من مخالف آن بوده‌ام. تست، ابتکار و انسجام فکری دانش‌آموز را می‌گیرد.

● **امیری:** اگر تست را سر جلسهٔ کنکور به دانش‌آموز بدهند، همین که شما می‌گویید درست است. چون دانش‌آموز مجبور است در یک دقیقه و نیم مسئله‌ای را حل کند. اما تست به عنوان ابزار سنجشِ یک موضوع، فی‌نفسه بد نیست. مثلاً آزمون‌های مقدماتی یا مرحلهٔ اول المپیاد تست پنج گزینه‌ای هم دارد. به‌خاطر اینکه بحث احتمالی‌اش را کم کنند. زمانی هم که برای هر تست گذاشته‌اند، نزدیک به هفت دقیقه است. بنابراین اگر به تست به عنوان یک مسئله با راه‌حل کوتاه نگاه کنیم، بد هم نیست؛ اگر بشود از گزینه‌هایش خوب استفاده کرد. ولی اگر بحث کنکور باشد، من صددرصد با شما هم عقیده‌ام. چون خلاقیت و عمق را از دانش‌آموز می‌گیرد.

● **دارابی:** الان در روسیه تست هم رایج شده است، منتهی در مرحلهٔ اول. در مورد تست من دیده‌ام که معلمان سر کلاس فرمول‌هایی برای حل آن‌ها ارائه می‌دهند؛ بدون این‌که دانش‌آموز به عمق این فرمول‌ها واقف باشد. یعنی سلسله مراتب پیدایش فرمول در ذهن او وجود ندارد.

■ **امیری:** ما در آسانسور که داشتیم می‌آمدیم، فرمودید که قبلاً هم برای مجله مقاله داده‌اید. چرا دیگر مقاله


هوشنگ شرقی






رستمی

نداديد؟

● **دارابی:** ارتباط من با آقای شرقی قطع شد و نشد که دیگر مقاله بدهم (با خنده).

■ **امیری:** پس همین‌جا از شما قول بگیریم که باز هم به ما مقاله بدهید و در خدمت شما باشیم.

■ **فرجی:** معمولاً درس ریاضی برای اکثر بچه‌ها دشوار است و برخی از دانش‌آموزان از این درس می‌گریزند. شما در کتاب‌هایی که تألیف کردید یا در شیوهٔ تدریستان چه روشی را پیش می‌گرفتید که ریاضی برای بچه‌ها به درسی شیرین و دوست‌داشتنی تبدیل بشود؟

● **دارابی:** من هر روز قبل از این‌که به کلاس بروم، شب قبل عنوان درس را نگاه می‌کردم. خودم کاغذ و قلم برمی‌داشتم و برای خودم مسائل درس را حل می‌کردم. یادم نمی‌آید که بدون این کار سر کلاس رفته باشم. این طوری که می‌رفتم سر کلاس، موفق هم بودم. یعنی بچه‌ها راضی بودند. من غالباً در جنوب شهر درس داده‌ام.

■ **امیری:** منطقهٔ چند بودید.

● **دارابی:** منطقهٔ ۱۴.

■ **امیری:** از همین منطقه هم بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** بله، مدرسه ابوریحان.

■ **رستمی:** کدام خیابان بود؟

دارابی: نزدیک میدان خراسان.

■ **فرجی:** از شاگردان آن دوره کسی را به‌خاطر دارید یا کسانی هستند که هنوز با شما در تماس و ارتباط باشند؟

● **دارابی:** بله، هستند. می‌آیند سر می‌زنند. اتفاقاً هفتهٔ پیش یکی از دانش‌آموزانم از کانادا آمده بود و به من سر زد.

زندگی شخصی همراه با تدریس

فرجی: در فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتاب «اشک سبلان»، سال تولد شما را ۱۳۱۰ نوشته‌اند. این درست است؟

● **دارابی:** نه متولد ۱۳۱۴ هستم. اشتباه نوشته‌اند.

■ **فرجی:** کجا متولد شدید؟

● **دارابی:** اردبیل.

■ **فرجی:** دربارهٔ اولین مواجهه خودتان با درس ریاضی و شطرنج بفرمایید.

● **دارابی:** خانوادهٔ ما یک خانواده فرهنگی بود. پدر و مادرم که ایرانی بودند و در باکو زندگی می‌کردند، سال ۱۳۰۴ به اردبیل برگشتند. آن‌ها با خودشان فرهنگ آنجا را هم آوردند: نقاشی، گرامافون، موسیقی و شعر بود. شطرنج آن موقع نبود. دایی من، هم نقاش بود هم مهندس راه و ساختمان. ما بیشتر تحت تأثیر دایی‌مان بودیم. مادرم هم همیشه برای ما شعر می‌خواند. شطرنج را من بعدها در دبیرستان از دوستی که الان در آلمان است، یاد گرفتم. در کلاس هفتم بودم و در «دبیرستان ابوریحان» درس می‌خواندم.

■ **فرجی:** یعنی تهران بودید؟

● **دارابی:** بله.

■ **فرجی:** چه سالی به تهران آمدید؟

● **دارابی:** وقتی دورهٔ ابتدایی را تمام کردم، در سال ۱۳۳۰ به تهران آمدیم. البته پنج ساله بودم که مادرم فوت کرد و ما تحت سرپرستی دایی‌ام بزرگ شدیم. البته پدرم هم بود، ولی چون مادرم با زن‌دایی‌ام خیلی نزدیک بود، زن‌دایی‌ام مثل یک مادر از ما پرستاری کرد.

■ **فرجی:** از سال‌های به تهران آمدن بگویید

● **دارابی:** من در تهران به دبیرستان ابوریحان رفتم که در خیابان دلگشا بود؛ پایین‌تر از نیروی هوایی. آقای **دیوسالار**، مدیر این مدرسه بود. برادری هم داشت به اسم **فرهنگ** که با پسردایی من در بانک سپه همکار بود. با معرفی ایشان در آنجا اسم نوشتم و تا کلاس دهم درس خواندم.

■ **فرجی:** استاد نگفتید که اولین مواجههٔ شما با درس ریاضی چگونه بود؟

● **دارابی:** همان‌طور که گفتم، دایی‌ام مهندس بود. یک پسردایی هم داشتم که شاید آقای **رستمی** بشناسد، **داوود بابایی**. ایشان مسائل ریاضی طرح می‌کرد و بین خانواده‌ها رد و بدل می‌شد. مثلاً سه مرد و سه زن می‌خواستند از رودخانه‌ای رد شوند و... من ۱۰-۹ ساله که بودم این مسائل را می‌شنیدم. روی این اصل به ریاضیات علاقه‌مند شدم.

■ **فرجی:** دبیرستان چه سالی تمام شد و ورودتان به دانشگاه کی بود؟

● **دارابی:** دبیرستان در سال ۱۳۳۷ تمام شد. دانش‌سرای عالی شبانه تازه در سیدخندان به راه افتاده بود. من به آنجا رفتم.

■ **فرجی:** از معلمان دوران دبیرستان کسی خاطرتان هست؟

● **دارابی:** بله، آقای **کهن** که معلم رسم و نقاشی ما بود. آقای **وطن‌شناس** بود که شیمی درس می‌داد. این‌ها بیشتر روی من اثر گذاشتند.

■ **فرجی:** ورود به دانش‌سرا چه سالی بود؟

● **دارابی:** فکر می‌کنم سال ۱۳۳۸ بود. من در رشته‌های فیزیک و ریاضی قبول شده بودم، ولی به ریاضی علاقه داشتم و به این رشته رفتم.

■ **فرجی:** خاطره‌ای از آن دوران دارید؟

● **دارابی:** استادان جالبی داشتیم. مثلاً استاد ریاضی داشتیم آنالیز را درس می‌داد و اگر در ورقه امتحان اشتباه می‌کردیم، به آن سؤال نمرهٔ منفی می‌داد. یا دکتر **هشترودی** بود که می‌گفتند شاید درسش را خوب درک نکنید، ولی از شخصیتش استفاده کنید. همه عاشق او بودیم. دکتر هشترودی هفته‌ای یک بار می‌آمد و بیشتر از پیشرفت‌هایی که در شوروی صورت گرفته بود، برای ما حرف می‌زد. مثلاً در آنجا پنبهٔ رنگی می‌کارند یا سیبی کاشته‌اند اندازهٔ یک هندوانه.

■ **میرشهرام صدر:** اگر آن موقع اینترنت بود و شما خودتان این اخبار را می‌گرفتید، دیگر دکتر هشترودی برای شما جذابیتی نداشت؟

● **دارابی:** چرا، خودش هم شخصیت جالبی داشت. مثلاً اگر آن استاد منفی دو می‌داد، ایشان نمرهٔ ۲۲ می‌داد! چنین روحیه‌ای داشت. یا سؤال را می‌داد و خودش می‌رفت. کسی را هم رد نمی‌کرد.

رستمی: دکتر هشترودی استاد ما هم بود. ایشان دو ویژگی داشت: یکی این‌که دستی هم در ادبیات داشت و می‌گفتند شعر هم می‌گوید. علاوه بر این، خودش در آنچه که تعریف می‌کرد، شرکت داشت. مثلاً می‌گفت محاسبات مربوط به مدار قمر مصنوعی شوروی را من و چند نفر دیگر در مسکو انجام دادیم. خود این موضوع به ما احساس لذت می‌داد که فردی از ایران در چنین جایگاهی قرار گرفته است.

■ **فرجی:** گفته شد که استاد هشترودی به ادبیات هم علاقه و توجه داشت. گرایش شما به ادبیات از همین‌جا و دوران دانش‌سرا آغاز شد؟

● **دارابی:** بیشترین تأثیر ادبی را مادرم بر من گذاشت که در دوران کودکی ما برایمان شعر می‌خواند. آن‌ها از باکو که آمده بودند دو صندوق کتاب ادبی و ریاضی آورده بودند. مثلاً اولین کتابی که تألیف کردم، یعنی «درخت سیب و پسرک فقیر» نام داشت. خود درخت سیب شعری بود که مادرم برای من می‌خواند. من این درخت سیب را در داستانم در یک شیب قرار دادم که اختلاف طبقاتی را نشان بدهد. سیب بالا بود و یک کاج پایین. من صحبت‌های این دو را کتاب کردم.

■ **فرجی:** اجازه بدهید که به دوران دانش‌سرا برگردیم. بعد از این‌که فارغ‌التحصیل شدید، چه کار کردید؟

● **دارابی:** سال اول را در دبیرستان باباطاهر بودم که برایتان تعریف کردم، دانش‌آموزان زرنگی داشت. سالی که من دانش‌سرا بودم، فقط دو سه نفر فارغ‌التحصیل داشت: از جمله یکی من بودم و یکی هم آقایی به اسم **علی بلندی** و آقای **رخشنده**. ما باید می‌رفتیم شهرستان. ولی من آن سال را تهران ماندم. بعد هم حکم مرا نوشتند و فرستادند رشت. یک سال و نیم رشت بودم، ولی وسط سال نماندم و به تهران آمدم.

■ **فرجی:** چرا؟

● **دارابی:** یکهو باران شدید می‌آمد؛ مثلاً ۲۱ روز. من دیدم که واقعاً نمی‌توانم بمانم. آمدم تهران و دیگر نرفتم. بعد از ۳۰-۲۰ روز، آمدند سراغم؛ چون گفته بودم مریض هستم. واقعاً هم مریض بودم. این بار مرا فرستادند قزوین. آقای **رجایی** را دستگیر کرده بودند و کلاس‌هایش خالی بود.

■ **فرجی:** این چه سالی بود؟

● **دارابی:** باید سال‌های ۴۴-۱۳۴۳ باشد. من آنجا در یک دبیرستان و یک هنرستان درس می‌دادم. به هر حال من یک سال در قزوین ماندم. بعد به تاکستان رفتم. آقایی بود به اسم **حاجی‌زاده** که آمد سراغ من و گفت که ما در تاکستان یک کلاس شش طبیعی داریم. یک نفر را می‌خواهیم که هم ریاضیات و هم فیزیکش را تدریس کند. قبول کردم، به شرطی که دو روز بروم و یک روز به جای من یک نفر دیگر تدریس کند و من حق‌التدریس او را بپردازم. با این شرط رفتم تاکستان و هفت سال آنجا تدریس کردم.

■ **فرجی:** در آن موقع ازدواج کرده بودید؟

● **دارابی:** من در سال ۱۳۴۹ ازدواج کردم. حالا یک پسر و یک دختر دارم، هر دو مهندس هستند.

■ **فرجی:** بعد از دورهٔ تاکستان چه اتفاقی افتاد؟

● **دارابی:** من در آنجا برای بچه‌ها کتاب می‌بردم. یک‌بار مرا به ساواک احضار کردند. البته این در قزوین بود. یک نفر آمد و خیلی مؤدب با من صحبت کرد. گفت ما شنیده‌ایم که در آنجا عده‌ای دارند شلوغ می‌کنند. شما به ما گزارش بدهید. گفتم من هفته‌ای دو روز می‌روم تاکستان و اصلاً کسی را آنجا نمی‌شناسم. طرف که دید چیزی از من درنمی‌آید، دیگر چیزی نگفت. من برگشتم تاکستان. تاکستانی‌ها دو طایفه هستند: **رحمانی** و **طاهرخانی**. آن‌ها یک ریش سفید داشتند که مرد قدبلندی بود. او مرا صدا کرد و گفت: پسرم، تا روزی که توی تاکستان هستی، نمی‌گذارم کسی دست به تو بزند. ولی این بچه‌ها آن‌طور هم که تو فکر می‌کنی، نیستند. تو با آن‌ها صحبت می‌کنی و می‌روند و یک حرف‌های دیگر می‌زنند. گفتم: پس من دیگر از تاکستان باید بروم. رفتم سر کلاس و گفتم می‌خواهم بروم. بچه‌ها ناراحت شدند.

■ **فرجی:** چه سالی این اتفاق افتاد؟

● **دارابی:** ۱۳۵۳ بود. به تهران و به دبیرستان ابوریحان برگشتم.

■ **امیری:** همان دبیرستانی که خودتان در آن درس خوانده بودید؟

● **دارابی:** بله، ولی جایش عوض شده بود.

■ **امیری:** کجا آمده بود؟

● **دارابی:** دورهٔ قدیم، خیابان دلگشا بود و دورهٔ جدید، نزدیک میدان خراسان.

■ **فرجی:** با خانواده کلاً برگشتید تهران؟

● **دارابی:** خانواده‌ام تهران بودند. من ساعت چهار صبح سوار اتوبوس می‌شدم و قبل از هشت به تاکستان می‌رسیدم. خود معلم‌ها دیرتر از من می‌آمدند. مدیری داشتم که به آن‌ها می‌گفت این دارابی از تهران آمده و الان سر کلاس است، شما هنوز نیامده‌اید. من بعدازظهرها هم ساعت ۴ برمی‌گشتم به تهران. البته هفته‌ای دو روز بود. بین راه هم زبان روسی مطالعه می‌کردم. بعد هم به کلاس زبان می‌رفتم.

■ **فرجی:** در تهران تعاملتان با دانش‌آموزان چگونه بود؟

● **دارابی:** بچه‌ها نمی‌دانستند که من کتاب هم نوشته‌ام و وقتی می‌فهمیدند، علاقه‌شان بیشتر می‌شد.

■ **فرجی:** چه سالی بازنشسته شدید؟

● **دارابی:** سال ۱۳۶۴ بود و به دفتر تألیف کتب درسی رفتم. ۱۱ سال هم این‌جا بودم.

■ **فرجی:** خیلی ممنون استاد. فکر می‌کنید این امکان وجود دارد که تجربیات ارزندهٔ خودتان را در حوزهٔ آموزش ریاضی به شکل کتاب یا در قالب مقالاتی برای مجلهٔ برهان ریاضی منتشر کنید؟

● **دارابی:** من یکی از انبوه معلمان هستم و استادان بزرگ‌تر از من هم وجود دارند. ولی در حدی که در مجلهٔ برهان جا داشته باشد، بله آماده‌ام که این کار را انجام دهم.


میرشهرام صدر





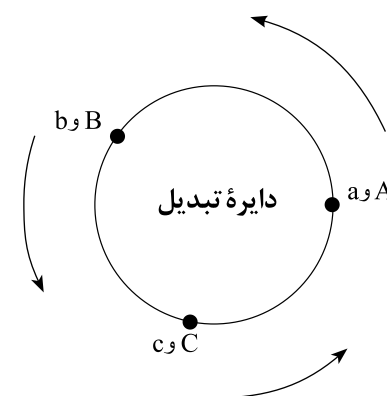


دایرهٔ تبدیل و کاربرد آن در ساده‌کردن عبارت‌های جبری

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: دایرهٔ تبدیل، ساده کردن کسرها

اگر روی پیرامون یک دایره، سه نقطه به نام‌های a، b، c یا A، B و C مانند شکل ۱ در نظر بگیریم و در جهت دایرهٔ مثلثاتی روی پیرامون دایره حرکت کنیم، از a به b و از b به c و از c به a می‌رسیم.



از این خاصیت، هم در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث در مثلثات و هندسه استفاده می‌کنیم و هم در ساده‌کردن کسرهای تبدیلی. برای مثال، در مثلث ABC به اضلاع a و b و c داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

حال اگر در این فرمول به جای a، b و به جای b، c و به جای c، a قرار دهیم خواهیم داشت:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

اینک اگر در این فرمول a را به b و b را به c و c را به a تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



تذکر: از این خاصیت در یادگیری فرمول‌های مربوط به مثلث، چه در هندسه و چه در مثلثات می‌توان استفاده کرد؛ مثل فرمول‌های سه ارتفاع و فرمول‌های سه میانه.

کاربرد دایرهٔ تبدیل در ساده‌کردن کسرها

مسئلهٔ ۱. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a+b} + \frac{2a^2 + c^2 + 3bc - ba - ca}{b+c} + \frac{2c^2 + a^2 + 3ca - cb - ab}{c+a}$$

حل: اگر برای یافتن حاصل عبارت فوق مخرج مشترک بگیریم، عبارت صورت، خیلی مفصل، و احتمال اشتباه هم زیاد خواهد شد. وقت زیادی را هم خواهد گرفت. اگر توجه کنیم، کسر دومی تبدیل کسر اولی و کسر سومی تبدیل کسر دومی است. بنابراین فقط کسر اولی را ساده و جواب آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کسر اول} = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab - ac - bc}{a+b} = \frac{2a^2 + 2ab + b^2 + ab - ac - bc}{a+b}$$
$$= \frac{2a(a+b) + b(a+b) - c(a+b)}{a+b} = \frac{(a+b)(2a+b-c)}{a+b} = 2a+b-c$$

چون کسر دومی تبدیل کسر اولی است، پس جواب کسر دومی هم تبدیل جواب کسر اولی است. به همین ترتیب، چون کسر سومی تبدیل کسر دومی است، در نتیجه جواب کسر سومی هم تبدیل جواب کسر دومی است.

$$\text{حاصل کسر اولی} = 2a+b-c$$
$$\text{حاصل کسر دومی} = 2b+c-a$$
$$\text{حاصل کسر سومی} = 2c+a-b$$
$$\Rightarrow \text{مجموع سه کسر} = 2a+2b+2c = 2(a+b+c)$$

مسئلهٔ ۲. اگر: $a+b+c=0$، ولی a، b و c مخالف صفر باشند، ثابت کنید:

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{c.a}(c^2+a^2-b^2) + \frac{a+b}{a.b}(a^2+b^2-c^2) = 0$$

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم، عبارت دومی تبدیل عبارت اولی و عبارت سومی تبدیل کسر دومی است. پس ابتدا کسر اولی را ساده می‌کنیم:

در فرض داریم $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a$

$$\text{کسر اولی} = \frac{b+c}{bc}(\underbrace{b^2+c^2}-a^2) = \frac{-a}{bc}((b+c)^2 - 2bc - a^2)$$
$$= \frac{-a}{bc}((-a^2) - 2bc - a^2) = \frac{-a}{bc}(a^2 - 2bc - a^2)$$
$$= \frac{-a}{bc}(-2bc) = 2a$$

چون کسر دوم تبدیل یافتهٔ کسر اول است، پس جواب کسر دوم 2b و جواب کسر سوم 2c خواهد شد. بنابراین:

$$\text{عبارت مسئله} = 2a+2b+2c = 2(a+b+c) = 2(0) = 0$$

مسئلهٔ ۳. اگر a، b و c مخالف صفر، و $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت P را بیابید.

$$P = \frac{1}{a^2+b^2-c^2} + \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2}$$

حل: در این مسئله هم کسر دوم تبدیل کسر اول و کسر سوم تبدیل کسر دوم است، پس:

$$\text{کسر اول} = \frac{1}{a^2+b^2-c^2},\ a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$$
$$\text{کسر اول} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab - c^2} = \frac{1}{(-c)^2 - 2ab - c^2}$$
$$= \frac{1}{c^2 - 2ab - c^2} = \frac{1}{-2ab}$$
$$\text{کسر اول} = \frac{-1}{2ab}$$
$$\text{کسر دوم} = \frac{-1}{2bc}$$
$$\text{کسر سوم} = \frac{-1}{2ca}$$
$$\Rightarrow \text{مجموع سه کسر} = \frac{-1}{2ab} + \frac{-1}{2bc} + \frac{-1}{2ca} = \frac{-c-a-b}{2abc}$$
$$= \frac{-\overbrace{(a+b+c)}^{0}}{2abc} = 0$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: لطیفه‌های ریاضی

● این حکایـت را به **جان فن نویمـان** (۱۹۵۷-۱۹۰۳)، ریاضـی‌دان مشـهور و معاصر مجاری ـ کـه به تعبیری پدر علم سیبرنتیک محسوب می‌شـود ـ نسبت داده‌اند. می‌گوینـد روزی نویمان با سـرعت می‌رفت تا به کلاس درس خود در «دانشگاه ام‌آی‌تی» برسد. در راهروی منتهی به کلاس دانشجویی با شتاب خود را به او رساند و به او که با عجله می‌خواست وارد کلاس شود گفت: «استاد ببخشید یک سؤال کوچک داشتم!»

استاد با بی‌حوصلگی گفت: «ببینم چیست.»

دانشـجو ورقه‌ای را که در دسـت داشـت و روی آن مسئله‌ای دربارهٔ محاسبهٔ یک انتگرال معین بود، به استاد داد. نویمـان با عجله نگاهی به آن انداخت و گفت: «خُب این‌که معلوم است، می‌شود $\frac{2\pi}{5}$.»

دانشجو گفت: «می‌دانم استاد، جواب زیر همین صفحه نوشته شده است. راه‌حل را می‌خواهم!»

استاد کمی فکر کرد و پس از قدری مکث گفت: «آره... آره خُب، بگذار ببینم ... بله بله، می‌شود $\frac{2\pi}{5}$!»

دانشـجو گفت: «بله اسـتاد می‌دانم! ولی راه‌حل آن چیست؟»

و اسـتاد گفت: «خُب من از دو راه متفاوت آن را حل کردم!»

● دو ریاضی‌دان برای صرف شـام با هم به یک رسـتوران رفته بودند. یکی از آن‌ها به دیگری رو کرد و گفت: «بیا شرطی ببندیم که هر کس بازنده شد، پول شام را بدهد!»

دیگری گفت: «خُب چه شرطی؟»

اولی دوباره گفت: «فکر می‌کنی پیشـخدمتی که برای ما فهرست غذا را مـی‌آورد، حاصل $(a+b)^2$ را بداند؟!»

دیگری گفـت: «بعید می‌دانم!»



و دوستش ادامه داد: «خُب سر همین شرط می‌بندیم.» وقتـی پیشـخدمت آمـد، بعـد از سـفارش غـذا، ریاضی‌دان‌ها از او پرسیدند: «آیا می‌دانی حاصل $(a+b)^2$ چه می‌شود؟»

او بی‌درنـگ جـواب داد: «معلـوم اسـت: $(a+b)^2=a^2+b^2$.»

و بعد از کمی مکث ادامه داد: «البته در صورتی که a و b ضدّ تعویض‌پذیر باشند!»

در مورد پاسخ پیشخدمت باید کمی توضیح بدهم تا ظرافت موضوع روشـن شود. در یک عمل دوتایی (مانند جمع، ضرب و...) بین دو متغیر a و b، عمل را تعویض‌پذیر گوییم هـرگاه: $a*b=b*a$. یعنی خاصیت جابه‌جایی داشته باشد. مثلاً عمل جمع تعویض‌پذیر است. در مقابل عمل را تعویض‌ناپذیر گوییم اگر چنین نباشد. اما عمل را «ضدّ تعویض‌پذیـر»[1] گوییم هرگاه $a*b$ و $b*a$ قرینهٔ هم باشند: $a*b=-b*a$. یعنی جمع آن‌ها مساوی صفر (یا عضو خنثای عمل) باشد. با این شرط می‌توان نوشت:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+\underbrace{ab+ba}_{0}+b^2=a^2+b^2$$

و می‌بینیم که پیشخدمت درست پاسخ داده است!

● این داستان واقعی است: در یک آزمون دبیرستانی در کشور انگلستان، پرسشی به‌صورت زیر آمده است:

سـؤال: شـما چند بار می‌توانید عدد ۷ را از ۸۳ کم کنید، تا جواب مثبت بماند؟ نتیجهٔ نهایی چه خواهد بود؟

جواب یکی از دانش‌آموزان به این صورت بود: «من هر چند بار که بخواهم می‌توانم این عمل تفریق را انجام دهم و جواب همیشه مساوی ۷۶ خواهد بود!

فلسفه، بازی با مفاهیم عینی است و نه قواعد. ریاضیات بازی با قواعد است و نه مفاهیم عینی.
«یان الیس»

پی‌نوشت ....
1. Anti commutative



دنبـاله‌ها

دنبـاله‌های حسابی و هندسی

آموزشی
هوشنگ شرقی

کلیدواژه‌ها: دنباله حسـابی، دنبالهٔ هندسـی، قانون دنباله، جملـهٔ عمومی، دنبالهٔ بازگشتی، قدرنسبت، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای که هر جملهٔ آن از ضرب مقداری ثابت در جملهٔ ماقبل به‌دسـت آید، «دنبالهٔ هندسی» نامیده می‌شود؛ یعنی: $a_n=a_{n-1}.q$.

مقدار ثابت (q) را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. بدیهی است که اگر $q>1$ باشـد، دنباله صعـودی و اگر $0<q<1$ دنباله نزولی است. اگر $q=1$ باشد، دنباله ثابت است. اگر هم $q<0$ باشـد، جمله‌ها یک در میان مثبت و منفی‌اند. دنباله‌های زیر مثال‌هایی از دنباله‌های هندسی هستند:

$2,6,18,54,....\qquad (q=3)$

$3,-6,12,-24,...\qquad (q=-2)$

$4,2,1,\frac{1}{2},...\qquad (q=\frac{1}{2})$

$3,3,3,...\qquad (q=1)$

$3,-1,\frac{1}{3},-\frac{1}{9},...\qquad (q=-\frac{1}{3})$

شبیه روش استقرایی که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، در مورد دنبالهٔ هندسی نیز می‌توان نوشت:

$a_n=a_1.q^{n-1}$ (جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی)

◀ **مثال ۱.** یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهید که جملهٔ پنجم آن ۸۰ و جملهٔ نهم آن ۱۲۸۰ باشـد. جملهٔ بیست و یکم این دنباله چیست؟

● **حل:**

$$\begin{cases}a_5=a_1q^4=80\\ a_9=a_1q^8=1280\end{cases}\Rightarrow\frac{a_1q^8}{a_1q^4}=\frac{1280}{80}\Rightarrow q^4=16$$

$$\Rightarrow q=\pm2\Rightarrow a_1=5$$

پس دو دنباله با این ویژگی وجود دارد:

$$\begin{cases}5,10,20,...\\ 5,-10,20,...\end{cases}$$

و جملهٔ بیست و یکم این دنباله برابر است با:

$a_{21}=a_1q^{20}=5\times2^{20}$

◀ **مثال ۲.** ثابت کنید هیچ دنبالهٔ هندسـی وجود ندارد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملاتی از آن باشند.

● **حل:** اگر چنین باشـد که ۱۱، ۱۲ و ۱۳ جملات mام، nام و pام یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم:

$$a_m=a_1q^{m-1}=11,\ a_n=a_1q^{n-1}=12,\ a_p=a_1q^{p-1}=13$$

و از تقسیم دوبه‌دوی این تساوی‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}=\frac{11}{12},\ \frac{a_n}{a_p}=q^{n-p}=\frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow q=(\frac{11}{12})^{\frac{1}{m-n}}=(\frac{12}{13})^{\frac{1}{n-p}}\Rightarrow(\frac{11}{12})^{n-p}=(\frac{12}{13})^{m-n}$$

$$\Rightarrow 11^{n-p}\times13^{m-n}=12^{m-p}$$

و این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی

مشابه آن‌چه که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، اگر a، b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q \Rightarrow b^2=ac$$

و این شرط آن است که سه عدد متوالی a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. همچنین، $b=\sqrt{ac}$ را واسطهٔ (میانگین) هندسی a و c می‌نامند. مثلاً عدد ۶ واسطهٔ هندسی ۴ و ۹ است.

مثال ۳. m را طوری بیابید که سه عدد m، m+۴ و 9m دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند.

حل:

$$m(9m)=(m+4)^2 \Rightarrow 8m^2-8m-16=0$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m=-1 \text{ یا } m=2$$

واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مشابه آن‌چه که در مورد دنبالهٔ حسابی دیدیم، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، m عدد (واسطهٔ هندسی) قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، از دستور $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۴. بین دو عدد ۹ و ۷۲، دو واسطهٔ هندسی درج کنید

حل:

$$q=\sqrt[3]{\frac{72}{9}}=2 \Rightarrow 9, \underbrace{18, 36}_{\text{واسطه‌های هندسی}}, 72$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

روشی که برای تعیین مجموع n جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی وجود دارد آن است که پس از نوشتن S_n، qS_n را تشکیل دهیم و طرفین دو رابطه را از هم کم کنیم.

مثال ۵. مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

حل:

$$-\begin{cases} S_n=2+4+8+16+\ldots+2^n \\ 2S_n=4+8+16+\ldots+2^n+2^{n+1}\end{cases}$$
$$S_n=2^{n+1}-2$$

در حالت کلی با همین روش برای هر دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ نخست a_1 داریم:

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

مثال ۶. مجموع ۱۰۰ جملهٔ نخست دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

حداقل چند جمله از دنبالهٔ فوق را با هم جمع کنیم تا مجموع از ۱/۹۹۹ تجاوز کند؟

حل:

$$S_{100}=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{100}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2^{100}-1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=\frac{2^{100}-1}{2^{99}}$$
$$=2-\frac{1}{2^{99}}$$

$$S_n=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2^n-1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}>1/999$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{1000}\Rightarrow 2^{n-1}>1000\Rightarrow \min(n-1)=10$$

$\Rightarrow \min(n)=11$ (باید حداقل ۱۱ جمله را با هم جمع کنیم.)

مثال ۷. یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهید که مجموع هشت جملهٔ اول آن ۶۵۶۰ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۸۰ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S_8=a_1\frac{1-q^8}{1-q}=6560 \\ S_4=a_1\frac{1-q^4}{1-q}=80\end{cases} \Rightarrow \frac{S_8}{S_4}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=\frac{6560}{80}=82$$

$$\Rightarrow \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{(1-q^4)}=82 \Rightarrow q^4+1=82$$

$$\Rightarrow q^4=81,\ q=\pm3 \Rightarrow (q=3, a_1=2) \text{ یا } (q=-3, a_1=-4)$$

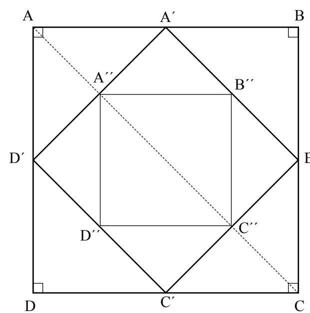
یعنی دو دنبالهٔ عددی با ویژگی‌های فوق به صورت زیر وجود دارد:

$$2, 6, 18, \ldots \quad \text{و} \quad -4, 12, -36, \ldots$$

مثال ۸. وسط‌های اضلاع مربعی به ضلع واحد را به هم وصل می‌کنیم تا مربعی دیگر به‌دست آید. وسط‌های اضلاع این مربع را نیز به یکدیگر وصل می‌کنیم و...

الف) اگر این عمل را ۱۰ بار تکرار کنیم، مجموع مساحت‌ها و مجموع محیط‌های این مربع‌ها را به‌دست آورید.

ب) این عمل را چند بار تکرار کنیم تا مجموع مساحت‌های مربع‌های داخلی از ۹۹ درصد مساحت مربع اصلی بیشتر شود؟



حل: الف) مطابق شکل، مربع ABCD به ضلع واحد مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع این مربع را به هم وصل کنیم، مربع A′B′C′D′ به‌دست می‌آید که مطابق شکل، اضلاع آن موازی قطرهای مربع اصلی و طول آنها نصف طول قطر AC است. (چرا؟) بنابراین داریم:

$$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+1^2=2 \Rightarrow AC=\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow A'B'=C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی طول ضلع مربع A′B′C′D′ مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و لذا مساحت آن $\frac{1}{2}$ است. به همین ترتیب اگر وسط‌های اضلاع مربع A′B′C′D′ را به یکدیگر وصل کنیم، مربع A″B″C″D″ به‌دست می‌آید که طول ضلع آن مساوی $\frac{1}{2}$ و مساحت آن $\frac{1}{4}$ است. بنابراین مساحت‌ها به صورت زیر یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

مجموع مساحت‌های ۱۰ مربع از این مربع‌ها برابر است با:

$$S_{10}=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}}=\frac{1023}{512}$$

و محیط‌های مربع‌ها نیز یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تشکیل می‌دهند:

$$4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, \ldots$$

مجموع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با:

$$S_{10}=4\times\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{31(2+\sqrt{2})}{8}$$

ب) مساحت‌های مربع‌های داخلی، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ و جملهٔ نخست $\frac{1}{2}$ هستند:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

برای آنکه مجموع آنها از ۹۹ درصد مســاحت مربع اصلی بیشتر شود، باید داشته باشیم:

$$S_n=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲^n}>۰/۹۹$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}<\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n>۱۰۰\Rightarrow \min(n)=۷$$

مسائل ترکیبی از دنباله‌ها

۱. اگر $\frac{۱}{a+b}$، $\frac{۱}{a+c}$ و $\frac{۱}{b+c}$ جملات متوالی از یک دنبالهٔ حســابی باشند، ثابت کنید $a^۲, b^۲, c^۲$ نیز جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند.

● **حل:** طبق فرض داریم: $\frac{۲}{a+c}=\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{a+b}$. از این فرض و با عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\frac{a+۲b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{۲}{a+c}$$

$$\Rightarrow ۲(ab+ac+b^۲+bc)=(a^۲+۲ab+ac+ac+۲bc+c^۲)$$

$$\Rightarrow ۲ab+۲ac+۲b^۲+۲bc=a^۲+۲ab+۲ac+۲bc+c^۲$$

$$\Rightarrow a^۲+c^۲=۲b^۲$$

و این نشـــان می‌دهد که $a^۲, b^۲, c^۲$ دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.

۲. هرگاه به چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب اعداد ۵، ۶، ۹ و ۱۵ را اضافه کنیم، یک دنبالهٔ هندسی به‌دست می‌آید، دنبالهٔ حسابی را بنویسید.

● **حـل:** اگــر a، $a+d$، $a+۲d$ و $a+۳d$ جملات یک دنبالــهٔ حســابی باشــند، $a+۵$، $a+d+۶$، $a+۲d+۹$ و $a+۳d+۱۵$ جملات دنبالهٔ هندسی هستند. بنابراین داریم:

$$(a+۲d+۹)^۲=(a+۳d+۱۵)(a+d+۶)$$

و $(a+d+۶)^۲=(a+۵)(a+۲d+۹)$

پس از ســاده کردن روابط اخیر به دســتگاه دومجهولی $\begin{cases}d^۲+۲d-۲a=۹\\ d^۲-۳a+۳d=۹\end{cases}$ می‌رسیم. با کم‌کردن رابطهٔ بالا از پایین نتیجه می‌شود: $-d+a=۰\Rightarrow a=d$

با جای‌گذاری در رابطهٔ اول خواهیم داشت:

$$a^۲+۲a-۲a=۹\Rightarrow a=\pm۳$$

از آنجــا داریم: $d=\pm۳$ و دو دســته جواب بــرای دنبالهٔ حسابی به‌دست می‌آید:

$۳,۶,۹,۱۲,...$ و $-۳,-۶,-۹,-۱۲,...$

۳. در یک دنبالهٔ هندســی مجموع $۲n$ جملهٔ اول، ســه برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت دنباله را به‌دست آورید.

● **حــل:** با توجه به فرض مســئله داریم (جملــهٔ اول a و قدرنسبت q است):

$$۳(a+aq^۲+aq^۴+...+aq^{۲n-۲})=a+aq+aq^۲+...+aq^{۲n-۱}$$

$$\Rightarrow ۳a\frac{q^{۲n}-۱}{q^۲-۱}=a\frac{q^{۲n}-۱}{q-۱}\Rightarrow\frac{۳}{q^۲-۱}=\frac{۱}{q-۱}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{q+۱}=۱\Rightarrow q=۲$$

۴. مجموع همهٔ اعداد سه رقمی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۵ مساوی ۲ می‌شود، به‌دست آورید.

حل: همهٔ این عددها به صورت ۵k+۲ هســتند که اولین آنها ۲+۲۰×۵، یعنی ۱۰۲، و آخرین آنها ۲+۱۹۹×۵، یعنی ۹۹۷ است. عدهٔ این عددها هم مساوی ۱+۲۰-۱۹۹، یعنی ۱۸۰ عدد است. لذا مجموع آنها برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۸۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۷)=۹۸۹۱۰$$

۵. مجموع n جملهٔ نخست از دنبالهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$۱,۱۱,۱۱۱,۱۱۱۱,...,\underbrace{۱۱۱۱...۱}_{n\ \text{رقم}}$$

● **حل:** می‌توان نوشت:

$$\underbrace{۱۱۱...۱}_{n\ \text{رقم}}=۱+۱۰+۱۰۰+...+۱۰^{n-۱}$$

مجمــوع فوق، مجمــوع جملات یک دنبالهٔ هندســی با قدرنسبت ۱۰ است. بنابراین:

$$\underbrace{۱۱۱...۱}_{n\ \text{رقم}}=۱\times\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}=\frac{۱۰^n-۱}{۹}$$

و از آنجا مجموع n جملهٔ نخســت دنبالهٔ اصلی به‌دســت می‌آید:

$$۱+۱۱+۱۱۱+...+\underbrace{۱۱۱...۱}_{n\ \text{رقم}}=\frac{۱۰-۱}{۹}+\frac{۱۰^۲-۱}{۹}+\frac{۱۰^۳-۱}{۹}+...+\frac{۱۰^n-۱}{۹}$$

$$=\frac{۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+...+۱۰^n-n}{۹}=\frac{۱۰\times\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}-n}{۹}$$

$$=\frac{۱۰^{n+۱}-۹n-۱۰}{۸۱}$$

۶. در دنباله‌های حســابی زیر چند عدد ســه رقمی مشترک وجود دارد:

الف) $۱,۵,۹,...$ ب) $۴,۷,۱۰,...$

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حل:** دنباله‌های فوق دارای قدرنســبت ۳ و ۴ هستند و جمله‌های عمومی آنها به ترتیب $a_n=۱+(n-۱)۴=۴n-۳$ و $a'_n=۴+(n-۱)۳=۳n+۱$ است.

بنابرایــن از حــل نامعادله‌هــای $a_n\geq۱۰۰$ و $a'_n\geq۱۰۰$ می‌توان اولین عدد سه رقمی دو دنباله را به‌دست آورد:

$$۴n-۳\geq۱۰۰\Rightarrow n\geq\frac{۱۰۳}{۴}\Rightarrow n\geq۲۶$$

$$۳n+۱\geq۱۰۰\Rightarrow n\geq\frac{۹۹}{۳}\Rightarrow n\geq۳۳$$

$$\begin{cases}a_n:۱۰۱,۱۰۵,۱۰۹,۱۱۳,...\\ a'_n:۱۰۰,۱۰۳,۱۰۶,۱۰۹,...\end{cases}$$

ملاحظه می‌شــود که اولین جملهٔ مشترک سه رقمی دو دنباله، ۱۰۹ است. چون ک.م.م قدرنسبت‌ها ۱۲ می‌شود، پس کافی است دنباله‌ای با شروع از ۱۰۹ و قدرنسبت ۱۲ بنویسیم که جملات آن همگی عددهای سه رقمی باشند:

$$۱۰۹,۱۲۱,...\quad a''_n=۱۰۹+(n-۱)۱۲=۱۲n+۹۷\leq۹۹۹$$

$$\Rightarrow n\leq۷۵$$

یعنی ۷۵ جملهٔ مشترک سه رقمی در دو دنباله وجود دارد.

۷. بــرای محافظت در برابر تابش مضــر مواد پرتوزا، لایه‌های محافظتی ســاخته شده‌اند که تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۹ درصد کاهش یابد؟

(امتحان نهایی حسابان ـ خرداد ۸۹)

● **حــل:** اگر میزان پرتوهای مضر را پس از عبور از اولین، دومین، سومین و... لایهٔ محافظ (به نسبت کل اشعه) بنویسیم، دنبالهٔ هندسی زیر حاصل می‌شود: $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},...$

که جملهٔ عمومی آن به صورت $a_n=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲})^{n-۱}=\frac{۱}{۲^n}$ است. برای آنکه شدت تابش پرتوها، پس از عبور از n لایه، ۹۹ درصد کاهش یابد، باید میزان اشــعه حداکثر ۱ درصد میزان اولیه باشد؛ یعنی داریم:

$$\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq۱۰۰\Rightarrow\min(n)=۷$$

پس حداقل باید از هفت لایه استفاده کرد که در آن صورت میزان اشــعهٔ عبور کرده مســاوی $\frac{۱}{۱۲۸}$ مقدار اولیه می‌شود و بیشتر از ۹۹ درصد آن کاهش می‌یابد.

تمریــن

۱. یک دنبالهٔ هندســی بنویسید که تفاضل جملهٔ سوم و اول آن ۹ و تفاضل جملهٔ پنجم و ســوم آن ۲۶ باشــد (جواب: $a_۱=-۳$ و $q=\pm۲$).

۲. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی را بنویسید که مجموع ۶ جملهٔ اول آن ۲۵۲ و مجموع سه جملهٔ اول آن ۱۲۸ باشد (جواب: $a_n=۲^{n+۱}$).

۳. ثابــت کنیــد $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ نمی‌توانند جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی یا هندسی باشند.

۴. بین دو عدد ۳ و ۱۹۶۸۳، هفت واسطهٔ هندسی درج کنید.

۵. وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری حاصل شود. این کار را ادامــه می‌دهیم. چند بار این عمل باید تکرار شــود تا مجموع مساحت‌های مثلث‌های به‌دست آمده از ۱/۳۳۳ برابر مساحت مثلث اولیه بیشتر شود؟ (جواب: ۶ بار)

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: یک مسئله و دو جواب

در شمارهٔ قبل یک مسئله دربارهٔ چند معامله و سود و زیان حاصل از آن‌ها و سه جواب متفاوت دربارهٔ سود نهایی داشتیم که پاسخ و تحلیل آن را در این شماره و در انتهای این بخش آورده‌ایم. در این شماره می‌خواهیم یک مسئلهٔ دیگر از این دست مطرح کنیم:

مسئله: میمونی روی یک ستون ایستاده است. پسر بچهٔ بازیگوشی هم روبه‌روی او ایستاده است و چشم در چشم او دارد. ناگهان پسربچه تصمیم می‌گیرد که با میمون کمی شوخی کند! سپس شروع می‌کند به دور او چرخیدن. اما میمون بازیگوش نیز هم‌زمان با او شــروع به چرخیدن به دور خودش (در همان بالای ســتون) می‌کند. در همان حال به چشمان پسر بچه نگاه می‌کند! تا این‌که پسر بچه یک دور کامل دور ســتون می‌زند. آیا پسر بچه دور میمون هم چرخیده است؟! روشن است که پاسخ آری یا نه (شاید هم بله یا خیر!) است، اما کدام یک پاسخ صحیح است؟ منتظر پاسخ شما و دلایل درستی آن‌ها هستیم.

در شمارهٔ ۷۸ پاسخ‌ها را بررسی و تحلیل می‌کنیم.



ریاضیات نوعی سوءاستفادهٔ قاعده‌مند از نام‌گذاری‌های پیشرفته برای رسیدن به اهداف معین است!

«پل ـ هنینگ کَمپ»

غلامرضا یاسی‌پور

افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان



کلیدواژه‌ها: شــریل برگر، دکتر مهدی بهزاد، نغمهٔ ثمینی، اویلر، کونیگســبرگ، کلود برج، دکتر مهدی رجبعلی‌پور

کتاب با تقریظ خانم پرفسور **شریل برگر**[1] خطاب به دکتر **مهدی بهزاد**[2] و دکتر **نغمهٔ ثمینی**[3]، نویســندگان کتاب، آغاز می‌شود. در این تقریظ چنین می‌خوانیم: «چقدر خوش‌حالم که به زودی نمایش‌نامهٔ افســانهٔ پادشــاه و ریاضی‌دان منتشر می‌شود. چشم به راه ترجمهٔ آن به زبان انگلیسی هستم. این نمایش‌نامه معماهایی را مطرح می‌کند که هم بینندگانش را به چالش وامی‌دارند، هم سبب انبساط‌خاطر آنان می‌شوند.»

در قســمتی از نامهٔ آقای پروفسور **آلبرشت بویتلز پاخر**[4] هم می‌خوانیم: «ریاضیات نقشــی اساســی در پیشبرد تمدن دارد و ضمــن برخورداری از اســتقلال ذاتی، علمی کاربردی هم محسوب می‌شــود. پروژهٔ استاد دکتر **مهدی بهزاد** نمونهٔ برجسته‌ای است از سبک جدید ترویج ریاضیات.»

آنگاه در قسمت «*آشــنایی با نظریهٔ گراف‌ها*»، این رشتهٔ ریاضی چنین معرفی شده است: «تاریخ مکتوب نظریهٔ گراف به سال ۱۷۳۶ میلادی باز می‌گردد که **اویلر**[5] تکلیف معمای **کونیگســبرگ**[6] را رسماً مشــخص کرد. رشد این حوزه برای مدت ۲۰۰ ســال بســیار کند بود، تا این‌که **کونیگ**[7] در سال ۱۹۳۶ کتابی به زبان آلمانی نوشت و در آن نظریهٔ گراف‌ها را ساخت و پرداخت.

دومیــن کتاب را **کلــود بِــرج**[8] در ســال ۱۹۵۷ به زبان فرانســوی نوشت. در سال ۱۹۶۲، پس از چاپ و انتشار کتاب او به زبان انگلیسی، این شیر خفته بیدار شد و راه تعالی را در پیش گرفت.

یکــی از خصیصه‌های یکتای نظریهٔ گراف‌ها، برخورداری از مسائل ســهل و ممتنع نظری و کاربردی فراوانی است که حل برخی ظرف ده‌ها سال گاهی رخ نموده و دل برده، اما به سادگی تسلیم نشده است.

یکی از برکات فرعی افســانهٔ پادشــاه و ریاضی‌دان، طرح مسائل تازهٔ بسیاری است که احتمالاً حل بعضی، ذهن زیبای ریاضی‌دانان قَــدَر را طلب خواهد کرد و نیازمند ده‌ها ســال صرف وقت خواهد بود.»

امــا اهمیت این کتــاب تنها در معرفــی نظریهٔ گراف‌ها و کاربرد آن نیســت، بلکه از این جهت اســت که مطلب آن به صورت نمایش‌نامه‌ای شــیرین تنظیم شده است تا هرچه دلنشین‌تر باشد، و به قول **سعدی** در «گلستان»: «داروی تلخ نصیحت به شــهد ظرافت برآمیخته، تا طبع ملول ایشــان از دولت قبول محروم نماند.» [کلیات سعدی، تصحیح محمدعلی فروغی]

مطالب آن، به شیوهٔ بحث سقراطی به صورت نمایش‌نامه‌ای درآمده اســت که خوانندهٔ جوان را گاهی تا آن سوی صحرای خدا[9] می‌برد و به قول استاد **شفیعی کدکنی** نقشی آورده که به کجاها که نمی‌بردش[10]. باز به قول ســعدی در «بوستان»، معماهای مهم و مطرح ریاضی را:

«به پرویزن معرفت بیخته
به شهد ظرافت درآمیخته» [پیشین].

باری همان‌طور کــه گفتیم، کتاب به صورت نمایش‌نامه تنظیم شده اســت. ما در این مختصر نمی‌توانیم حق مطلب را ادا کنیم، اما به عنوان مشــتی نمونهٔ خروار، پاره‌ای از آغاز و قســمتی از میان و در آخر هم، مطلب پایانی کتاب را همراه قســمت‌هایی از سه تفریظ از سه اســتاد ارجمند ریاضی در ستایش این اثر، می‌آوریم، و خواننده را به خود کتاب حوالت می‌دهیم و به خدایش می‌سپاریم.

اما آغاز نمایش‌نامه

دو جارچی با لباس‌های مضحک در حالی که یکی بر طبل می‌کوبد و دیگری بر سنج، دوسوی صحنه ایستاده‌اند.

جارچی اول: به هوش و به گوش!

جارچی دوم: به گوش و به هوش!

جارچی اول: ای جنبنده‌ها، خزنده‌ها، پرنده‌ها، چرنده‌ها...

جارچــی دوم: ای دکان‌دارهــا، منصب‌دارها، زمین‌دارها، خانه‌دارها...

جارچی اول: ای گاری‌چی‌ها

جارچی دوم: ای کالسکه‌چی‌ها...

جارچی اول: ای درباری‌ها و ای رعیت‌ها...

جارچی دوم: همه به گوش و همه به هوش...

جارچی اول: که سلطان سلطان‌ها، پدر در پدر سلطان

جارچی دوم: پدر جد در پدر جد هم سلطان...

جارچی اول: خلاصه صد پشت آن طرف‌تر هم سلطان...

جارچی دوم: فخر زمین و آسمان...

جارچی اول: پرنورتر از خورشید تابان...

جارچی دوم: پرزورتر از **رستم** پهلوان...

جارچی اول: پادشاه قدر قدرت سرزمین پرشوکت ما...

جارچی دوم: محبوب همهٔ قلب‌ها...

جارچی اول: عزیز همهٔ جان‌ها...

جارچــی دوم: بر لحاف منت گــذارده و به خواب عمیق فرورفته ...

جارچــی اول: پس مبادا که صدایی از کســی برخیزد و نفسی از کسی برآید.

جارچی دوم: مبادا سرفه یا عطسه...

جارچی اول: مبادا راه رفتن و جم زدن...

جارچی دوم: همه به کنج خانه‌ها، بی‌سروصدا...

جارچی اول: و زیر لبی دعا برای پادشــاه که به خورشید رخصت غروب داده و به رعیت و درباری فرصت خواب...

جارچی دوم: آهای به هوش و به گوش!

جارچی اول: به گوش و به هوش!

و بعد تکه‌ای از میانه‌های اثر

پادشــاه: خانهٔ علم دیگر چه‌جور جایی است؟ تو میدانی وزیر اعظم؟

وزیر اعظم: چند فقره سیاهچال دارد و خزانه دارد و...

پادشــاه: این‌که می‌شــود همین پایتخــت خودمان. تو می‌دانی **زبیده خاتون**؟

زبیده خاتون: سرورم از خود **بحرالعلوم** بپرسید.

پادشــاه: ما کســر شأنمان می‌شــود چیزی از بحرالعلوم بپرسیم. شما بپرسید...



بحرالعلوم: خانهٔ علم جای بحث و فحص علمی است. نه برج دارد و نه بارو. چون دشــمن ندارد که بخواهد حمله کند با هزار ترفند و نارو. پادشاه خانهٔ علم، علم است و ریاضیات و نجوم. پس جان مردمان دانش دوست، می‌شود بارگاهش. در چنین مکانی نیست حتی یک سیاهچال، زیرا که کسی توطئه نمی‌کند از برای علم و کمال. ثروت دانش است در دارالعلم که هرچه ببخشی بیشتر می‌شود. پس خزانه ندارد با چهل قفل و چهل رمز و چهل نگهبان! این اســت ای پادشاه، دارالعلمی که من می‌خواهم تا پس از دفع بلا، بسازیدش بی‌خلف وعده.

و ایــن هم پایان کتــاب (پس از طرح و حــل معماها و بقیهٔ ماجراها):

میدان شــهر. جشن و شادمانی برپاســت. مردم پایکوبی می‌کنند و شــعر می‌خوانند. زبیــده و وزیر هم در میان آن‌ها هســتند. ساززن‌ها ســاز می‌زنند. جوان‌ها با حرکات نمایشی پیــش می‌آیند و بحرالعلوم را بــا خود به میان جمع می‌برند. پادشاه عصبی در گوشه‌ای تنها نشسته است و فقط می‌خورد. روح پدربزرگ خندان پیش می‌آید و می‌رود به طرف بحرالعلوم.

بحرالعلوم: به جمع ما خوش آمدید شــاه شاهان. اگر به خواب نوه‌تان نمی‌آمدید، ما در سیاهچال می‌مردیم. چه خبر از عالم غیب؟

روح پدربزرگ: من در عالم برزخم. کار حســاب و کتابم تمام نشــده هنوز نگران این نوهٔ ابلهم بودم که آن هم به خیر گذشت.

بحرالعلــوم: شــما مرا بــه فکر تعمیــم و تجرید معمای

سه‌گاف[11] انداختید. حالا بی‌نهایت معما در آستین دارم.

روح پدربزرگ: چندتاش را هم بفرست ما در آن دنیا حل کنیم، بلکه زمان زودتر بگذرد.

بحرالعلوم: قصد کرده‌ایم اسم محل جدید کارمان را بگذاریم دارالعلم پدربزرگ! بلکه گاهی به خواب من و اهل علم هم بیایید و ما را راهنمایی کنید.

روح پدربزرگ: اسم منو نگذارید هم، به خوابتون می‌یام. دیگر باید برگردم. خداحافظ.

بحرالعلوم: *(با صدای بلند)* بی‌کار شدید، معمای سه آدم و سه آدم‌خوار و همچنین، معمای سه شوهر حسود را حل کنید. نمی‌گذارند حوصله‌تان سر برود.

روح پدربزرگ می‌آید به جلوی صحنه و رو به جمعیت می‌ایستد.

روح پدربزرگ: قصهٔ ما عجالتاً همین‌جا به‌سر رسید... باقی‌اش را می‌آیم به خوابتان، برایتان تعریف می‌کنم. شاید با هم این معماهای پیشنهادی بحرالعلوم را حل کردیم و... تعمیمشان هم دادیم... پس وعدهٔ ما تو خواب شما!

نوای شادمانی به اوج می‌رسد. **نور می‌رود.**

و اما قسمت‌هایی از سه تفریظ استادان ریاضی

۱. تقریظ دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده، استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز: «این اثر بی‌شک در نوع خود بی‌نظیر است؛ یک اثر نمایشی موزون با ماهیت ریاضی با یک بحث ریاضی با زبان نمایش. گامی است شگفت در راستای عمومی‌کردن ریاضی و همه فهم‌کردن آن و حتی بهتر فهماندن آن به اهل ریاضی. اولین نکتهٔ ظریف در این نمایش‌نامه پی‌بردن به بی‌پیرایه‌بودن دانش ریاضی و عدم وجود تبعیض در ماهیت آن است. به جنبه‌های کاربردی ریاضی پرداخته شده است. پیوند خوردن سرنوشت یک شکل چندوجهی با یک دانش یا یک دانشمند به سبکی زیبا به تصویر کشیده شده است.»

۲. تقریظ دکتر رحیم زارع نهندی، استاد دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران: «یکی از آرزوهای ریاضی‌دانان دستیابی به روش‌هایی است که بتوانند مفاهیم ریاضی را به صورتی ملموس و قابل فهم برای مخاطبین عمومی و غیرمتخصص بیان کنند. بی‌سبب نیست که اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پیام تاریخی خود به مناسبت سال جهانی ریاضی، عمومی‌کردن ریاضیات را به عنوان یکی از وظایف کلیدی جامعهٔ جهانی ریاضی در ورود به هزارهٔ سوم میلادی اعلام کرد.

نمایش‌نامه با خواب پریشان پادشاهی مغرور و کم شعور و اطرافیانی که هر کدام در مدح و چاکری پادشاه گوی سبقت را از دیگری می‌رباید، شروع می‌شود. بلایی در راه است و باید بزرگان پایتخت به طرف دیگر رودخانهٔ مرزی شهر منتقل شوند. به توصیهٔ وزیر اعظم، پادشاه دستور می‌دهد سراغ دانشمندی بروند که در زندان است و از وی می‌خواهند چاره‌جویی کند و بدون بیم تبانی قدرت‌مداران در غیبت پادشاه، برای حل مسئلهٔ انتقال آن‌ها با کشتی، راه‌حلی ارائه کند. شرط دانشمند برای حل مشکل، تأسیس دارالعلم است که پادشاه از روی ناچاری مجبور به قبول آن می‌شود. دانشمند که بحرالعلوم نام دارد، بی‌درنگ پس از آزادی از زندان، شاگردانی دور خود جمع می‌کند و کلاس درسی برپا می‌کند و مسائل جالبی را در نظریهٔ گراف مطرح می‌کند و شاگردان خود را برای تفکر روی مسائل و تعمیم‌دادن آن‌ها و ارائهٔ راه‌حل، به چالش می‌کشد و به شکل استادانهای آن‌ها را به سمت مسئله‌ای که معضل پادشاه حالت خاصی از آن است، هدایت می‌کند و محفلی فرهیخته و شکوفا فراهم می‌سازد.»

۳. تقریظ دکتر مهدی رجبعلی‌پور، استاد ریاضی دانشگاه کرمان: «جنبهٔ ادبی کتاب با مشاورت ویراستار، نویسنده و مترجم توانایی هم‌چون خانم **منیژه جوادی**، همسر نویسندهٔ اول کتاب، عاری از نقص است و می‌تواند در میان کتاب‌های ریاضی ـ ادبی ایران جاودانه بماند. جنبهٔ هنری کتاب نیز عالی است، وگرنه همکاری هنرشناس توانایی هم‌چون خانم دکتر ثمینی نقض غرض می‌بود. این دو جنبه، همراه با طنزی لطیف که زاییدهٔ همکاری یک ریاضی‌دان و یک هنرشناس بوده و بر سراسر کتاب حکم‌فرماست، معجون گوارایی فراهم آورده است که ساعت‌ها می‌تواند پیر و جوان را سرگرم و راضی نگه دارد.»

پی‌نوشت ....

۱. استاد ریاضیات و دانشمند سال ۲۰۰۹ میلادی ـ غرب استرالیا

۲. استاد ریاضیات و رئیس سابق انجمن ریاضی ایران

۳. عضو هیئت علمی پردیس هنرهای زیبا، دانشگاه تهران

4. Albrecht Beutelspacher (استاد ریاضیات و رئیس خانهٔ ریاضیات ـ آلمان)

5. Euler (ریاضی‌دان بزرگ سوئیسی)

6. Konigsberg

(شهری آلمانی که به واسطهٔ معمای مربوط به پل‌هایش معروف است)

7. Konig

8. Claude Berge

۹. تعبیر از اخوان ثالث است: تا خدا وان‌سوی صحرای خدا رفتم.

۱۰. به کجا می‌برد این نقش به دیوار مرا.

۱۱. معمای سه‌گاف همان معمای گرگ و گوسفند و گیاه است. رجوع کنید به متن کتاب.

مسائل مسابقه‌ای رشد

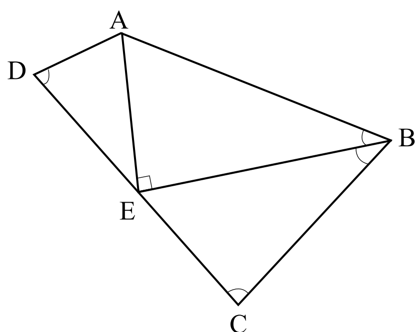


۱. ثابت کنید اگر x، y و z چنان در نظر گرفته شوند که:
$\sin x+\sin y+\sin z \geq ۲$، آنگاه: $\cos x+\cos y+\cos z \leq \sqrt{۵}$.

۲. ثابت کنید هرگاه اندازه‌های زوایای یک n ضلعی محدب، جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، آنگاه یا یکی از زوایا مقدار ثابتی دارد و یا همهٔ زوایا را می‌توان به صورت تعدادی جفت دسته‌بندی کرد؛ به‌طوری که مجموع همهٔ جفت‌ها مقدار ثابتی باشد. از آنجا نتیجه بگیرید که هرگاه اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، چهارضلعی، محاطی است. آیا عکس این موضوع هم درست است؟

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم: $\hat{D}=\hat{C}$ و نیم‌ساز زاویهٔ B، CD را در نقطهٔ E قطع کرده است و $BE \perp AE$.

ثابت کنید: AB=BC+AD.



۴. قطار مسافری تهران ـ مشهد، تهران را رأس ساعت x و y دقیقه ترک کرد و رأس ساعت y و z دقیقه وارد مشهد شد. این مسافرت z ساعت و x دقیقه طول کشید. همهٔ مقادیر ممکن برای x، y و z را به‌دست آورید.



۱. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x $(x \neq k\pi)$ حاصل این عبارت همواره مقداری ثابت است:

$$y = x - \pi[\frac{x}{\pi}] + tg^{-1}(\cot gx)$$

حل: با فرض $tg^{-1}(\cot gx) = \alpha$ نتیجه می‌شود: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $tg\alpha = \cot gx$. از آنجا داریم:

$$tg\alpha = tg(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -k\pi - \pi < -x < -k\pi$$

$$\Rightarrow k\pi < x < (k+1)\pi \Rightarrow k < \frac{x}{\pi} < k+1 \Rightarrow [\frac{x}{\pi}] = k$$

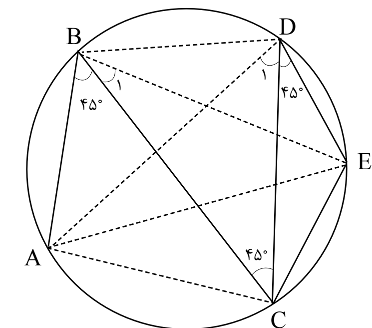
$$\Rightarrow y = x - k\pi + \alpha = x - k\pi + k\pi + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2}$$

۲. در شکل زیر زاویهٔ بین وترهای متوالی مساوی $45°$ است:

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45°$$

ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$



حل: مطابق شکل A را به D و A و B را به E وصل می‌کنیم:

با توجه به برابری زوایای محاطی مقابل به یک کمان داریم:

$$\hat{D}_1 = \hat{B} = 45°, \hat{B}_1 = \hat{D} = 45° \Rightarrow A\hat{B}E = A\hat{D}E = 90°$$

و از آنجا با توجه به قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AB^2 + BE^2 = AD^2 + DE^2 = AE^2 \ (*)$$

اما طبق این قضیه که کمان‌های محدود بین وترهای موازی، مساوی‌اند، خواهیم داشت:

$$A\hat{B}C = B\hat{C}D = 45° \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

در نتیجه، ذوزنقهٔ ABDC متساوی‌الساقین است و قطرهای آن با هم برابرند: $AD = BC$. به طریق مشابه نیز نتیجه می‌شود: $BE = CD$.

لذا با جای‌گذاری این دو مقدار در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$$

۳. مجموعهٔ S و عمل * روی آن را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

هر $a, b \in S : (a * b) * a = b$

ثابت کنید: $a * (b * a) = b$.

اثبات: با تعویض نقش a و b در رابطهٔ فرض خواهیم داشت: $(b * a) * b = a$

و با جای‌گذاری عبارت سمت چپ تساوی اخیر به جای a در عبارت سمت چپ حکم نتیجه می‌شود:

$$a * (b * a) = [(\underbrace{b * a}_{m}) * b] * (\underbrace{b * a}_{m})$$

$$= (m * b) * m = b$$

(تساوی آخر نیز با توجه به فرض نتیجه شده است.)

۴. در کشوری کوچک، همهٔ مردم، یا شوالیه هستند و همواره راست می‌گویند و یا سربازند و همواره دروغ می‌گویند. جاسوسی وارد این کشور می‌شود. جاسوس نه همواره راست می‌گوید و نه همواره دروغ می‌گوید (بسته به موقعیت دروغ یا راست می‌گوید). مأموران سه نفر را دستگیر کردند که می‌دانستند یکی از آن‌ها سرباز، یکی شوالیه و یکی جاسوس است. آن‌ها را A، B و C می‌نامیم.

در دادگاه قاضی از A پرسید:

آیا تو جاسوس هستی؟ A یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر (نمی‌دانیم چه پاسخی داد). سپس قاضی از B پرسید: آیا A راست گفت؟ و B یا پاسخ داد بله و یا گفت خیر. در این لحظه A گفت: C جاسوس نیست و قاضی پاسخ داد: خودم این موضوع را می‌دانستم و حالا می‌دانم چه کسی جاسوس است! با ذکر دلیل، بگویید جاسوس کیست.

حل: ما نمی‌دانیم A و B چه جوابی دادند. چهار حالت ممکن را در نظر می‌گیریم:

۱. A و B هر دو گفتند بله.

۲. A گفت نه و B گفت بله.

۳. A گفت بله و B گفت نه.

۴. هر دو گفتند نه.

اکنون این حالت‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم:

حالت ۱. آن‌ها هر دو گفتند بله: چون A می‌گوید که او جاسوس است، پس او یا سرباز است و یا جاسوس (زیرا یک شوالیه هرگز به دروغ ادعای جاسوس بودن نمی‌کند). اگر A سرباز باشد، آنگاه او دروغ گفته است. پس B که گفته است A راست می‌گوید، دروغ گفته است. پس B شوالیه نیست و چون A سرباز است، پس B باید جاسوس باشد و در نتیجه C شوالیه است.

حال فرض کنید A جاسوس باشد. پس او درست جواب داده است، لذا B با درست شمردن جواب A، درست جواب داده است. یعنی B باید شوالیه باشد و در نتیجه C سرباز است.

این دو حالت را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم:

	A	B	C
۱a	سرباز	جاسوس	شوالیه
۱b	جاسوس	شوالیه	سرباز

حالت ۲. A گفت نه و B گفت بله: اگر به همان صورت بحث کنیم، به جدول حالت‌های زیر می‌رسیم:

	A	B	C
۲a	شوالیه	جاسوس	سرباز
۲b	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۳. A گفت بله و B گفت نه:

	A	B	C
۳a	سرباز	شوالیه	جاسوس
۳b	سرباز	جاسوس	شوالیه
۳c	جاسوس	سرباز	شوالیه

حالت ۴. A گفت نه و B گفت نه:

	A	B	C
۴a	شوالیه	سرباز	جاسوس
۴b	شوالیه	جاسوس	سرباز
۴c	جاسوس	شوالیه	سرباز

حال با توجه به این چهار جدول، به ما گفته شده که بعد از جواب‌های A و B به سؤال‌های قاضی، قاضی فهمید که C جاسوس نیست. اگر حالت ۳ اتفاق افتاده بود، آن‌گاه قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که C جاسوس یا شوالیه است. اگر حالت ۴ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست بفهمد که C جاسوس یا سرباز است. پس این دو حالت رخ نداده و در نتیجه یکی از حالت‌های ۱ یا ۲ اتفاق افتاده است. حالا قاضی می‌داند که A درست گفت (وقتی که گفت C جاسوس نیست)، پس او می‌داند که A سرباز نیست (در نتیجه شوالیه یا جاسوس است).

اگر حالت ۲ رخ داده بود، قاضی نمی‌توانست تشخیص دهد که A شوالیه است یا جاسوس. بنابراین او نمی‌توانست بفهمد که جاسوس کیست. پس حالت ۱ رخ داده است و قاضی می‌داند که A نمی‌تواند سرباز باشد (چون او یک جملهٔ درست گفته است). پس A باید جاسوس باشد.





تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران

غلامرضا یاسی‌پور

کلیدواژه‌ها: عبدالحسین مصحفی، مجلهٔ ریاضی یکان، نمودار ساقه و برگ، محسن هشترودی، حساب‌های تانسوری، نظریهٔ التصاق‌ها، ارشمیدس



در بیست و سومین شمارهٔ مجله، **میرشهرام صدر** به هیئت تحریریه آمده است.

در مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» از **استاد شهریاری**، راهنمایی‌هایی برای حل مسئله‌ها آمده است. این مقاله چنین آغاز می‌شود: «برای حل یک مسئلهٔ ریاضی ـ اگر مضمونی تازه داشته باشد و در ردیف تمرین‌های سادهٔ پایان یک درس نباشد ـ نمی‌توان روش یا روش‌های کلی پیدا کرد. در زندگی روزانه و ضمن فعالیت‌های اجتماعی هم، غالباً به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برایمان تازگی دارند و برای انتخاب مسیر حرکت آیندهٔ خود، نمی‌توانیم بر «نمونه‌های» آزمایش شده تکیه کنیم. در این‌گونه موردها، اغلب به یاری دیگران هم نمی‌توانیم متکی باشیم، چرا که «دشواری» مربوط به خود ماست و تنها خودمان هستیم که از زیر و بم آن آگاهیم و دلیل‌های پیدایش آن را می‌شناسیم. بنابراین، چاره‌ای جز این نداریم که با تکیه بر تجربهٔ زندگی، آگاهی‌های علمی، مقایسه و تجزیه و تحلیل راه‌های گوناگون، و به‌کار گرفتن اندیشه، خرد و استعداد خود، راه و روش بهینه را بیابیم. برای حل مسئله‌های ریاضی هم، باید از همین راه رفت و نباید منتظر «دستورها» و «نسخه‌های شفابخش» بود. چنین دستورها و نسخه‌هایی که بتوان به یاری آن‌ها از عهدهٔ حل هر مسئله برآمد وجود ندارد (ص ۱۷۸).

«**در باغ تجربه‌ها**» مصاحبه‌ای است با یکی از دبیران ریاضی.

در مصاحبهٔ این شماره به سراغ **استاد عبدالحسین مصحفی** رفته‌اند. استاد در شرح حال خود چنین می‌گوید: «در اسفند ۱۳۰۳ در شهر کرمان، در خانه‌ای از محلهٔ **مسجد گنج** به دنیا آمده‌ام. در کودکی خواندن قرآن را آموختم و پس از تحصیلات رسمی (شش سال دورهٔ ابتدایی و سه سال سیکل اول متوسطه)، امتحان نهایی سیکل اول متوسطه را در سال ۱۳۲۰ گذراندم. در همان سال در همان مدرسهٔ ملی که از آن فارغ‌التحصیل شده بودم، به معلمی گمارده شدم. این مدرسهٔ ملی که **دبیرستان شهاب** نام داشت، از نخستین مدرسه‌هایی به‌شمار می‌آمد که برای آموزش به روش جدید در کرمان تأسیس شده بود و از یک دبستان شش کلاسی و از یک سیکل اول متوسطهٔ سه کلاسی تشکیل می‌شد. چند سالی را به تناوب با معلمی در آن مدرسه یا به شغل صحافی و کتاب‌فروشی گذراندم. در سال ۱۳۲۷ امتحان نهایی پنجم متوسطه را به صورت داوطلب گذراندم و با وجود تکفل خانواده، داوطلب خدمت نظام وظیفه شدم. شش ماه در دانشکدهٔ افسری تهران و یک سال با درجهٔ ستوان دوم توپخانه خدمت کردم. محل خدمتم بنا بر نمره‌هایی که آورده بودم، مشهد افتاد که آن را با «خاش» معاوضه کردم. ضمن خدمت افسری، درس‌های سال ششم ریاضی را نزد خودم آموختم و در سال ۱۳۳۰ امتحان نهایی دیپلم ریاضی را به صورت داوطلب در تهران گذراندم. در همان سال در امتحان ورودی رشتهٔ ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران و رشتهٔ دبیری دانش‌سرای عالی ایران پذیرفته شدم. در سال ۱۳۳۳ گواهی‌نامهٔ لیسانس این دو مؤسسهٔ عالی را دریافت داشتم و برای خدمت دبیری، یزد را برگزیدم.

هشت سال در دبیرستان‌های شهرستان یزد و در دانش‌سرا و در کلاس‌های تربیت معلم آن‌جا به تدریس ریاضیات اشتغال داشتم. در سال ۱۳۴۱ به تهران منتقل شدم. سمت‌های رسمی که داشته‌ام چنین بوده‌اند:

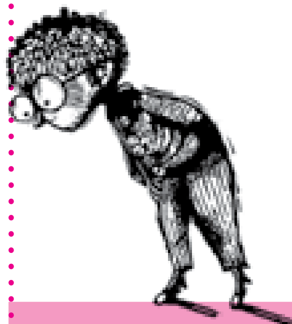
- ۱۳۴۱ تا ۱۳۴۴: دبیر دبیرستان‌های ناحیهٔ چهار تهران.
- ۱۳۴۴ تا ۱۳۴۷: کارشناس ریاضی برنامه‌ها در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌های وزارت آموزش‌وپرورش.
- ۱۳۴۷ تا ۱۳۵۲: نمایندهٔ وزارت آموزش‌وپرورش در شرکت چاپ و توزیع کتاب‌های درسی.
- ۱۳۵۲ تا بهمن ۱۳۵۷: کارشناس مسئول ریاضی در سازمان کتاب‌های درسی ایران.
- اسفند ۱۳۵۷ تا آبان ۱۳۵۸: مدیرکل سازمان کتاب‌های درسی ایران و سرپرست ادارهٔ کل تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.
- آبان ۱۳۵۸: بازنشسته بنا به درخواست شخصی.»

مصحفی در مورد تأسیس «مجلهٔ یکان» چنین می‌گوید: «در سال ۱۳۴۱ امتیاز انتشار مجله‌ای ریاضی را درخواست کردم. به دنبال آن در جلسهٔ آبان ۱۳۴۲ کمیسیون مطبوعات وزارت کشور با امتیاز **مجلهٔ ریاضی یکان** به نام من موافقت کرد. نخستین شمارهٔ این مجله در بهمن ماه ۱۳۴۲ منتشر شد که بیش از حد انتظار با استقبال روبه‌رو و سه بار تجدید چاپ شد. پس از آن هم این مجله به‌طور مرتب تا ۱۱۸ شمارهٔ ماهانه و هر سال همراه با شماره‌ای ویژهٔ امتحان‌های نهایی و کنکور و همراه با شماره‌ای برای دانش‌آموزان سال آخر سیکل اول متوسطه انتشار یافت. سرانجام در سال ۱۳۵۶ از ادامهٔ انتشار آن بازماندم. دربارهٔ این مجله و اثرش در گسترش ریاضیات در ایران و دربارهٔ تحولی که در آموزش ریاضی در ایران به‌وجود آورد، صاحب‌نظران بسیار سخن گفته‌اند و آن را در ترازوی سنجش قرار داده‌اند.

مجلهٔ یکان بدون هیچ وابستگی و بدون دریافت هرگونه کمک مادی منتشر می‌شد و هزینهٔ سنگین آن کلاً از راه تک‌فروشی و حق اشتراک تأمین می‌شد. دلیل توقف انتشار آن هم تنها این بود که دیگر توانایی ادامهٔ کار را نداشتم. پس از انقلاب به توصیهٔ مؤکد شهید **رجایی** و به تشویق بعضی از ریاضی‌دوستان، تقاضای تجدید امتیاز مجله را کردم که تصویب هم شد، اما باز هم توانایی لازم برای دنبال کردن کار را نداشته‌ام.»

در این شماره، مقاله‌ای داریم از **دکتر عین‌الله پاشا**، از دانشگاه تربیت معلم، با عنوان **ساقه و برگ**. در این مقاله آمده است: «نمودارها نقشی اساسی در درک مفاهیم دارند و فهم عمیق‌تر و روشن‌تری از شرایط موجود به ما می‌دهند. نمودارها و حالت کلی‌تر آن‌ها، یعنی شکل‌ها، در واقع نوعی زبان ابتدایی برای برقراری ارتباط و انتقال مفاهیم هستند. به همین سبب است که معمولاً ارائهٔ هر مفهومی با شکل و نمودار آغاز می‌شود و کم‌کم که مفاهیم جای خود را در ذهن باز کردند، مطالعه و تحقیق به صورت مجردتر ادامه می‌یابد. در مبحث آمار، برای روشن‌تر شدن ساختمان داده‌ها و در نهایت تجسم توزیع جامعه از نمودار استفاده می‌کنیم. هر یک از انواع نمودارها ویژگی‌هایی دارند و حتی برخی از آن‌ها برای موارد خاص مناسب‌ترند. در مباحث مقدماتی آمار با نمودارهایی از قبیل چند بر فراوانی، مستطیلی، میله‌ای و دایره‌ای آشنا شده‌ایم. این نمودارها در یک نگاه می‌توانند ایده‌هایی کلی دربارهٔ جامعه در اختیار بیننده بگذارند. رسالت بیشتر نمودارهای رایج در همین‌جا به پایان می‌رسد. اگر بخواهیم اطلاعات بیشتری دربارهٔ جامعه و یا نمونه به‌دست آوریم، لازم است محاسباتی روی داده‌ها و جدول فراوانی انجام دهیم. در این نوع نمودار سعی شده است که با حفظ رسالت‌های نمودارهای رایج (مثلاً میله‌ای) بتوان از نمودار استفاده‌های دیگری نیز برد. در واقع، در این نوع نمودار، داده‌ها کنار گذاشته نمی‌شوند، بلکه به نوعی سازمان‌دهی می‌شوند که هم کار نمودارها را انجام می‌دهند و هم برای برخی محاسبات دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند» (ص ۱۹۴).

در مقالهٔ «**تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران**» مطلبی می‌خوانیم دربارهٔ **کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که در آن چنین آمده است: «مجلهٔ یکان مقالاتی دارد با عنوان **خاطراتی از کنگره‌های بین‌المللی ریاضی‌دانان** که نویسندهٔ آن‌ها دکتر **محسن هشترودی** است. در این شماره، مرحوم هشترودی یادی از کنگرهٔ مسکو در سال ۱۹۳۵ کرده است و طی آن می‌نویسد: این کنگره آخرین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان قبل از جنگ جهانی دوم بود. شبی پس از پایان جلسهٔ رشتهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و ووپولوژی، **کارتان** فقید (**الی کارتان** بزرگ) و **اسخوتن** (Schow-ten که هم اکنون رئیس مرکز ریاضی آمستردام است)، **هرمان وایل** (Hermann Weyl) و دسته‌ای از محققین در حساب‌های تانسوری و نظریهٔ التصاق‌ها گفت‌وگو می‌کردند. کوچه‌های مسکو در نزدیکی کرملین همگی تقریباً رو به کرملین ره می‌برند، گویی



متمرکزند. وایل فقید این سؤال را مطرح کرد که: آیا هندسهٔ مقیاسی وجود دارد که ژئودزیک‌های آن (اقصر فاصله، در این‌جا باید اشاره کرد که در تمام فضاهای مقیاسی ژئودزیک‌ها و خطوط مستقیم برهم منطبق نیستند، یعنی بین دو نقطه، یک خط مستقیم و یک منحنی اقصر فاصله وجود دارد که از هم متمایزند) همه متمرکز باشند؟»

آن شب، پس از جدا شدن این عده از هم، اسخوتن شبانه این التصاق را پیدا کرد که هم‌اکنون به نام او در روسیهٔ شوروی به التصاق اسخوتن معروف است. عجیب است که در ممالک غربی، گاهی این التصاق را به نام التصاق مسکو می‌نامند.

نویسندهٔ این سطور قریب ۱۵ سال پیش، خواص محرض این التصاق را تعیین کرد و مقارن همان زمان، **آندره لیشنروویچ**، استاد **کلژدوفرانس** نیز ثابت کرد که بین فضاهای نقطه‌ای (فضاهایی که با نقطه معرفی می‌شوند نه با نقطه و یک امتداد یا با نقطه و یک سطح)، تنها فضایی که به سیستم‌های غیرهلنوم مکانیک تحلیلی مرتبط است، همین التصاق نیمه متقارن اسخوتن است. این التصاق را نیمه‌متقارن می‌نامند، زیرا به پیچش فضا از روی یک حامل تنها و به کمک تانسور اصلی معین می‌شود. (بدیهی است که این فضا فضایی عادی نیست، یعنی دارای انحناست. پیچش فضا انحنای مربوط به انتقال مبدأ مختصات است.)

نظیر این امر در بسیاری از کنگره‌ها اتفاق افتاده است که مسئله‌ای در جلسه‌ای از رشته‌های کنگره یا حتی در خارج از جلسه مطرح شده و یکشبه توسط یکی از ریاضی‌دانان مقتدر حل شده است.»

مقالهٔ «**آموزش مفهوم حد در دبیرستان**» از **پرویز شهریاری** چنین آغاز شده است: «از زمانی که با محاسبهٔ محیط و مساحت دایره (جسم دوار)، مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به ناچار به همراه آن‌ها، داوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها و روندهای بی‌پایانی که بی‌نهایت ادامه دارد، مطرح شد. در ضمن، در همین دوره روشن شد که درک مفهوم‌های دقیق دانش و استدلالی‌کردن آن‌ها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به همین مناسبت، مفهوم حد و روش‌های حدی، که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهوم‌های مربوط به آن دشواری‌هایی پدید می‌آید، خود را وارد کتاب‌های درسی دبیرستانی کرد.

ولی از دیرباز، به‌ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره به قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد π) و محاسبهٔ سطح و حجم جسم‌های دوار، از مفهوم حد، بدون این‌که نامی از آن برده شود و بدون این‌که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. **ارشمیدس** که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به جای محیط دایره، محیط چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و محیط بر دایره را در نظر گرفت و حد π را به تقریب برابر با $۳\frac{۱}{۴}$ به‌دست آورد. **جمشید کاشانی** هم در کتاب **رساله المحیطیه** همین راه را دنبال می‌کند! و ۳×۲^n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید n را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد. در این صورت تعداد ضلع‌های چند ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی برابر ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

در مقالهٔ «**تاریخچه و نقش مجله‌های آموزشی ریاضی**» که به قلم **حمیدرضا امیری** و **میرشهرام صدر** است، چنین آمده: «بنا به گفتهٔ پژوهشگر تاریخ ریاضیات، آقای پرویز شهریاری، قدیمی‌ترین نشریهٔ ریاضی **حل‌المسائل ریاضی** است که شامل حل مسائل شعب مختلفه علوم ریاضی بوده و با رهنمودهای آقای **ناصر هورفر** انتشار می‌یافته است. ناگفته نماند که ما قدیمی‌تر از این مجله را نیافته‌ایم. جلد اول این مجله در ۱۵ دی‌ماه ۱۳۰۶ شمسی، در مطبعهٔ **نهضت شرق تهران** به چاپ رسید و در اول و پانزدهم هر ماه منتشر می‌شد. در ضمن، در این مجله بعضی از مسائل امتحانات نهایی ایران و اروپا و... درج می‌شد. این مجله به قطع بزرگ و به خط نستعلیق و به خامهٔ **زرین خط** است. در این مجله با اسامی افراد معروفی نظیر، **تقی هورفر**، **محمدعلی مجتهدی**، **غلامحسین مصاحب**، **محمود مهران** و **محسن هشترودی** روبه‌رو می‌شویم.»

در «ادب ریاضی» این شماره مطلبی می‌خوانیم از **پی یر روسو** در کتاب «**تاریخ علوم**» وی، دربارهٔ **مونژ**. در بخشی از آن چنین آمده است: «کشور فرانسه هنگام انقلاب در خطر هجوم خارجی بود و مادر وطن با حالی خسته و مجروح فرزندان خود را به کمک می‌طلبید. فریاد برآمد که باید توپ ساخت! باید باروت تهیه کرد! باید شوره از زمین استخراج کرد! و در حالی‌که لازار کارنو مشغول تهیهٔ تشکیلات **فتح نظامی** بود، **گاسپار مونژ** فتح علمی را تدارک می‌دید. این مرد که فرزند فروشندهٔ دوره‌گردی بود و هندسهٔ ترسیمی را اختراع کرد، مانند وطن‌پرست پرشوری فعالیت کرد. وی طبق منویات کنوانسیون، درصدد تجهیز لشکری مرکب از ۳۰۰ هزار نفر برآمد و حال آن‌که تمام قورخانه‌ها خالی و انبارها از شوره تهی بود و این ماده را تا آن وقت از هندوستان وارد می‌کردند.

برنز لازم برای تهیهٔ توپ را از کجا باید تهیه کرد؟ مونژ فریاد برآورد: زنگ‌ها و ناقوس‌ها را آب کنید! شوره از کجا به‌دست آوریم؟ از زمین بکنید و آن وقت ما ظرف سه روز تمام توپ‌های شما را پر خواهیم کرد!

مونژ روزها اوقات خود را برای بازرسی قورخانه‌ها و توپ‌ریزی‌ها صرف می‌کرد و شب‌ها کتاب **فن تهیهٔ توپ** را می‌نوشت.»

در مقالهٔ «**مقالات کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان**»، از **غلامرضا یاسی‌پور** دربارهٔ «هندسهٔ **آفین**» و چندضلعی‌ها چنین می‌خوانیم: «به‌خاطر بیاورید که هندسهٔ آفین با ویژگی‌های هندسی‌ای سروکار دارد که **ناوردای آفین** (affine invariant) هستند، که بدین معنی است که تحت تبدیل‌های آفین (یعنی، تبدیل‌های خطی ناتکین ترکیب شده با انتقال‌ها) ناوردا (یا تغییرناپذیر) هستند. از لحاظ هندسی، می‌توان این تبدیلات را به صورت دوران‌ها، تقارن‌ها، انتقال‌ها و برش‌ها، یا هر ترکیبی از این‌ها در نظر گرفت. نسبت‌های طول‌های واقع بر خطوط موازی و نسبت‌های سطح‌ها تحت تبدیلات آفین محفوظ می‌مانند و در نتیجه به هندسهٔ آفین تعلق دارند، در حالی‌که طول‌ها، زاویه‌ها و سطح‌ها چنین نیستند. همهٔ نتایج ما به هندسهٔ آفین متعلق‌اند، اما به‌طور واضح در هندسهٔ اقلیدسی محدودتر نیز درست باقی می‌مانند.»

بد نیست که بررسی این شماره را با قسمت «عبرت‌آموز» **ادب ریاضی** خاتمه دهیم. در این ادب ریاضی چنین آمده است: «آورده‌اند که وقتی در یکی از شهرهای آدمان، حاکمی می‌زیست که از لحاظ درستی ضرب‌المثل بود. دزدان و رهزنان از او ترس بسیار داشتند، و مردان شرافتمند به او صمیمانه احترام می‌گذاشتند. اما روزی اهالی شهر به رازی صاعقه‌آسا پی بردند از این قرار که: حاکم هر شب لباس مبدل می‌پوشد، طپانچه‌ای در جیب می‌گذارد، آهسته و بی‌سروصدا از خانه خارج می‌شود و مردم را لخت می‌کند! داستان ریاضی در اواخر قرن نوزدهم نیز چنین بود. از ۲۰ قرن پیش تا این زمان، مردم در مقابل ریاضیات سر تعظیم فرود می‌آوردند و به آن ایمان فوق‌العاده داشتند. اما ناگهان اصل **اقلیدس** ضعف گریه‌آوری از خود نشان داد و مفهوم قدیمی اتصال با سروصدای بسیار فرو ریخت و نابود شد. قلمرو آشنای اعداد معمولی توسط بهمنی از اعداد اصم و اندازه نگرفتنی خرد شد و بنایی که این‌قدر مورد احترام و پرستش بود، ترک‌ها و شکاف‌های بزرگ داشت. و اما فقط بنای معظم ریاضیات نبود که گرفتار خرابی ویرانی می‌شد، تمام قصر بزرگ علوم به این حال دچار بود.»

***

شمارهٔ ۲۴ مجلهٔ ریاضی برهان را ورق می‌زنیم. این شماره در سال هفتم آن، در بهار ۱۳۷۷، به مبلغ ۲۰۰۰ ریال انتشار یافته است. مجله، علاوه بر مقالات متعارف خود که دربارهٔ کتاب‌های دبیرستانی است، مقالات نظری و تاریخی و گفت‌وگو را نیز شامل می‌شود.

در مقالهٔ «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**» از **پرویز شهریاری**، دربارهٔ **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** چنین آمده است: غیاث‌الدین جمشید کاشانی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و اخترشناسان ایرانی است که در زمان حکومت تیموریان می‌زیست و به خواست **الغ بیگ**، نوهٔ **تیمور**، به سمرقند رفت و با یاری چند ریاضی‌دان و اخترشناس دیگر، رصدخانهٔ بزرگ سمرقند را بنیان نهاد.

نوشته‌هایی از جمشید کاشانی، باقی مانده‌اند که توان بی‌اندازهٔ او را در حل مسئله‌های ریاضی به خوبی نشان می‌دهند. هم‌چنین، نامه‌ای از کاشانی به‌دست آمده که از سمرقند به پدرش در کاشان نوشته و یکی از پرارزش‌ترین اثرهای ماندگار در تاریخ دانش است. به ظاهر، پدر جمشید از **بدرالدین** نامی، به عنوان یکی از ریاضی‌دان‌ها یاد کرده که پسرش جمشید در پاسخ او چند سطری نوشته است. اگر سخن کاشانی را به زبان سادهٔ امروزی درآوریم، چنین گفته است: اگر کسی تنها برخی قضیه‌ها و دستورهای ریاضی را بداند و نتواند مسئله‌های تازهٔ ریاضیات و یا حالت‌های کاربردی آن را که در برابر او قرار می‌گیرد، حل کند، ریاضی‌دان نیست. ریاضی‌دان کسی است که از عهدهٔ حل مسئله‌های تازه برآید.»

مقالهٔ «**در باغ تجربه‌ها**» گفت‌وگویی دارد با آقای **میرزا جلیلی**، مؤلف و دبیر با سابقهٔ ریاضی. در این مقاله از قول استاد جلیلی چنین می‌خوانیم: «میرزا جلیلی هستم و در اول اردیبهشت‌ماه ۱۳۱۲ در بوشهر متولد شدم. تحصیلات ابتدایی را در دبستان فردوسی و متوسطه را در دبیرستان سعادت آن شهر به پایان رساندم. پس از گذراندن دورهٔ دانش‌سرای مقدماتی شیراز، از دانش‌سرای عالی تهران فارغ‌التحصیل شدم. ۲۰ سال در شهرستان کازرون تدریس کردم. یک دورهٔ یک‌سالهٔ آموزش ریاضی را در انستیتوی تربیتی دانشگاه لندن گذراندم و به دریافت دیپلم نائل آمدم که بعدها از طرف وزارت علوم فوق‌لیسانس شناخته شد. یک دورهٔ شش ماههٔ برنامه‌ریزی را هم در دانشگاه تکزاس در آستین گذراندم و پایان‌نامهٔ آن دوره را دریافت کردم.

از سال ۱۳۵۰، در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی مشغول به کار هستم. با این همه، کار تدریس را هیچ‌گاه رها نکرده‌ام و با معلمان ریاضی کشور در تمام دوره‌های تحصیلی، مرتب در تماس بوده‌ام و با جوّ آموزش کشور کاملاً آشنا هستم. برنامه‌ریزی چندین دوره تحصیلی را، از ابتدایی، راهنمایی



و دبیرســـتان تا دانش‌ســـرای مقدماتی، و مراکـــز تربیت معلم کارگردانی کرده‌ام و کتاب‌های درسی آن‌ها را به تألیف رسانده‌ام کـــه همگی کتاب‌های موفق ریاضی در مـــدارس بوده‌اند. در دو برنامه‌ریزی دبیرســـتان (از ۱۳۶۲ تا ۱۳۶۴ و از ۱۳۶۸ تا ۱۳۷۰) شـــرکت کردم و از مؤلفان کتاب‌های ریاضیات جدید دبیرستان هستم که برای اولین بار در ایران با همکاری کارشناسان، مفاهیم جدید و به‌روز ریاضی جهان را در سطح فهم دبیرستان، با زبان ساده و دانش‌آموزی، وارد کتاب‌های ریاضی کردیم. هم‌چنین، در تألیف کتاب‌های ریاضی ۱ تا ۴ نظام جدید نیز همکاری داشته‌ام. ســـال‌ها مدیر داخلی مجله رشـــد آموزش ریاضی و جزو هیئت تحریریهٔ آن بوده‌ام.

در کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در استرالیا، هم‌چنین در دو کنفرانس ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی در سوتمتون و هلند، حضور داشتم و در توکیو و مسکو پای صحبت کارشناسان و مؤلفان و برنامه‌ریزان ریاضی نشسته‌ام و از آن رهنمود برنامه‌ریزی گرفته‌ام.»

مجله مقالـــه‌ای دارد با عنوان «**رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ**» که در مقدمهٔ آن چنین آمده است: «یکی از موضوعات مهم در جوامع پیشرفته که آموزش آن مشکل به نظر می‌رسد، ریاضیات اســـت. ریاضیات موضوعی اســـت که خود را به شدت انتزاعی نشـــان می‌دهد، به‌طوری که کودکان هیچ‌گونه ارتباط منطقی بین آن با دنیای واقعی بیرون کلاس برقرار نمی‌کنند. به همین علت آن را بی‌معنا و بیهوده می‌پندارند. در نتیجه، کودکان در سراسر جهان، خود را در رشته‌های ریاضی مغلوب می‌دانند و حتی والدین آنان نیز ریاضیات را درک نمی‌کنند و معلمینشان ریاضیات را موضوعی سخت برای درک و فهم قلمداد می‌کنند.

اگر امروزه به مردم بگویم، من به آموزگاران کودکان شـــما ریاضی آمـــوزش می‌دهم، آنان تصور بدی دربـــارهٔ من خواهند داشـــت و به من به مانند یک موجود عجیب نگاه خواهند کرد. اگر هم بگویم، من از ریاضیات لذت می‌برم، مردم فکر می‌کنند من دیوانه شده‌ام و اگر بگویم من آماده هستم آنان را به ریاضیات علاقه‌منـــد کنم، مردم به حرف‌های مـــن گوش نخواهند کرد و حرف‌هایم را باور نمی‌کنند! نیمی از مردم از ریاضیات رنج می‌برند و آن را نوعی شـــکنجهٔ روحی می‌دانند! حتماً فکر خواهید کرد که آنان مایل هســـتند از برنامهٔ آموزشی ریاضیات خلاصی پیدا کنند، اما این‌طور نیست. آنان ریاضیات را خیلی مهم می‌دانند و همهٔ کودکان مدرسه‌ای باید آن را مطالعه کنند؛ حتی اگر از آن خوششان نیاید، چرا که ریاضیات برای آنان مفید است!»

همین مقاله مطلبی دارد دربارهٔ «اهمیت تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضـــی» که در آن چنین می‌خوانیم: «دومین پژوهش در ریاضی بومی، از تحقیقات تاریخی حاصل می‌شـــود که بیش از اندازه به آن پرداخته شده است و آموزشگران به اندازهٔ کافی با آن آشنا هستند. در حال حاضر، اکنون **انجمن پژوهش تاریخی**، مســـئول جمع‌آوری اســـناد تاریخی مختلف دربـــارهٔ ریاضی در قســـمت‌های گوناگون دنیاســـت. نمونه‌ای از تحلیل‌های جدید در کتاب **جوزف** (۱۹۹۱) «تاج رنگارنگ ریشـــه‌های غیراروپایی ریاضی» آمده است که به ذکر تنوع فرهنگ‌هایی که در اندوختهٔ جهانی اندیشه‌های ریاضی غنی سهم دارد، مربوط می‌شود. برای مثال، تاریخ فرهنگی ایران و جهان اســـلام مملو از اندیشه‌های ریاضی اســـت؛ گرچه اکثر این روایات بـــه دانش‌پژوهان معروف اســـلامی ایران مربوط می‌شـــود. ما از تاریخ ریاضیات مسلمانان موارد زیر را یاد گرفته‌ایم:

- قوانین وراثت؛
- طراحی مساجد و کاشی‌کاری آن‌ها؛
- تعیین قبله و تعیین حرکت مکه در قســـمت‌های مختلف دنیا؛
- نجوم؛
- گسترش براهین هندسی برای قضایای جبری؛
- آثـــار ریاضی‌دانانی مانند **خوارزمـــی**، **ثابت بن قره**، **کاشانی** و **خیام**.

با وجود اختلافات مشـــهودی کـــه در بعضی از موضوع‌های ریاضی، مانند دستگاه‌های شمار و روش‌های محاسبه‌ای مختلف ریاضی دیده می‌شود، پژوهش‌های تاریخی، شباهت‌های جالبی را مانند علاقه‌مندی انســـان به اثبات قضیهٔ فیثاغورس نشـــان می‌دهد. این قضیه مشهور قبل از ریاضی‌دانان یونانی مورد علاقهٔ چینی‌هـــا (رونان، ۱۹۸۱) و آفریقایی‌ها (جـــروس، ۱۹۹۵) بوده است. هم‌چنین، **ثابت بن قره**، به قضیهٔ **فیثاغورس** پی برده بود.»

مقالات دیگر این شماره عبارت‌اند از:

- دنباله/ احمد قندهاری
- آموزش ترجمهٔ متون ریاضی/ حمیدرضا امیری
- تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها/ میرشهرام صدر
- مصاحبه با یک عدد/ کریم احمدی دلیر
- جزء صحیح/ علی حسن‌زاده ماکویی
- طرح و حل مسائل اساسی/ غلامرضا یاسی‌پور
- n یا ۱-n/ عین‌الله پاشا
- مقاله‌هـــای کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان/ غلامرضا یاسی‌پور
- در حاشیهٔ تابع/ حمیدرضا امیری
- مکان هندسی/ محمدهاشم رستمی
- اثبات اتحاد مزدوج/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی





با مخاطبان

باز هم نامه‌ها و رایانامه‌هایی از دوستان مجله داشته‌ایم که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- همکار گرامی، آقای **قاسم حسین قنبری**، از دانشگاه فرهنگیان شهرستان سمنان، با سپاس از مطالب ارسالی، از یکی از دو مقاله‌تان در این شماره استفاده کرده‌ایم. مطلب ارسالی‌تان در بحث تشابه مثلث‌ها، ساده، همه فهم و کاملاً به دردبخور بود. با تشکر از شما می‌خواهیم که ما را از مطالب خوبتان محروم نفرمایید.
- همکار گرامی، خانم **صدیقهٔ بابایی**، با تشکر از ایمیل ارسالی، منتظر کارهای دیگرتان هستیم.
- همکار گرامی، آقای **مصطفی دیداری**، مطلب ارسالی‌تان را در یکی از شماره‌های آتی به چاپ می‌رسانیم. باز هم با مجلهٔ خودتان در ارتباط باشید.
- همکار گرامی سرکار خانم **مریم شفیعی**، از پژوهش‌سرای رازی شهرری، از مطلبی که از کارهای گروهی دانش‌آموزان آن مجموعه برایمان فرستاده‌اید، تشکر می‌کنیم. ان‌شاءالله بتوانیم در آینده‌ای نزدیک گزارشی مستند از فعالیت‌هایتان تهیه و منعکس کنیم.
- آقای دکتر **سعید علیخانی**، از دانشکدهٔ علوم دانشگاه صنعتی شیراز، ضمن سپاس از مطلب ارسالی‌تان با عنوان «زندگی در بعد چهارم»، متذکر می‌شویم که: البته استفاده از چنین مطالبی در مجلهٔ ما (یا هر مجلهٔ ریاضی دیگر)، گهگاه لازم است (و در یکی از شماره‌های آینده به آن می‌پردازیم). ولی اگر بتوانید مطالبی درخور استفادهٔ مخاطبان اصلی مجله (دانش‌آموزان در درجهٔ نخست و سپس معلمان ریاضی) برای ما بفرستید، بهتر است و سپاس‌گزارتان خواهیم بود. با ما در ارتباط باشید.
- همکار گرامی جناب آقای **رحمان کیومرثی**، با تشکر فراوان از مقالهٔ ارسالی‌تان، از شما دعوت می‌کنیم که ضمن حفظ ارتباط خود با ما، در صورت امکان به مطالب پایه‌ای‌تر در ریاضیات توجه کنید و در ارتباط با آن‌ها برای ما مطلب بفرستید.
- همکار عزیز سرکار خانم **فاطمهٔ صاحبی**، از گروه ریاضی منطقهٔ ۱۱، مطلبی که فرستاده‌اید تکراری است و در بسیاری از منابع اصلی و کتاب‌های کمک درســـی ریاضی گســـته آمده است. ضمن تشکر از توجهتان به مجلهٔ برهان، از شما می‌خواهیم مطالب مرتبط با تجربیات شخصی خودتان و نیز در صورت امکان مطالبی در ارتباط با ریاضیات پایه (و البته غیرتکراری!) برای ما بفرستید تا از آن‌ها استفاده کنیم.
- دوســـت دانش‌آموز آقای **علیرضا نمکی** از تهران، منطقهٔ ۱، کشـــف روابط عددی یکی از جنبه‌های زیبای ریاضیات (و شاخه‌ای به‌خصوص از آن به‌نام نظریهٔ عددها) است که از دیرباز مورد توجه انسان‌ها و به‌خصوص ریاضی‌دانان و علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی بوده است. تلاش شما البته قابل تقدیر است، ولی اولاً بیشتر این‌گونه روابط قبلاً کشف شده‌اند، ثانیاً سعی کنید نوشته‌هایتان مرتب و ساده باشند تا برای هر کس که برای نخستین بار آن‌ها را می‌خواند، به راحتی قابل درک باشند.

اثبات‌هایی کوتاه‌تر بر قضایای تشابه مثلث‌ها

قاسم حسین قنبری
دانشگاه فرهنگیان مرکز سمنان

مقدمه

قضا یا ی تشابه در کتاب هندسهٔ (۱) بیان و اثبات شده‌اند. اما اثبات این قضایا کمی طولانی است و دانش‌آموزان معمولاً به آن روی خوش نشان نمی‌دهند. در این مختصر سعی شده است اثبات‌های کوتاه‌تری برای این قضایا ارائه شود. آنچه که در این شکل ارائهٔ قضایا بیشتر جلوه می‌کند، تکیهٔ بیشتر بر «قضیهٔ تالس» است.

تشابه دو مثلث در این کتاب به این صورت بیان شده است:

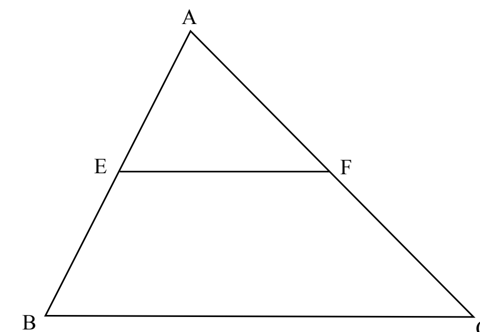
تعریف: دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه‌های نظیر در آن‌ها برابر و ضلع‌های نظیر متناسب باشند.

اگر مثلث‌های متناظر را با نمادهای $A'B'C'$ و ABC نشان دهیم، دو مثلث در صورتی متشابه هستند که:

$$\begin{cases}\angle A=\angle A'\\ \angle B=\angle B'\\ \angle C=\angle C'\end{cases},\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم که نتیجه‌ای مهم از قضیه تالس است.

لم: در مثلث ABC، اگر F و E دو نقطه روی AC و AB باشند، به‌طوری‌که $EF \parallel BC$، آنگاه دو مثلث AEF و ABC متشابه‌هستند.



کلیدواژه‌ها: تشابه، قضیهٔ تالس، مثلث‌های متشابه

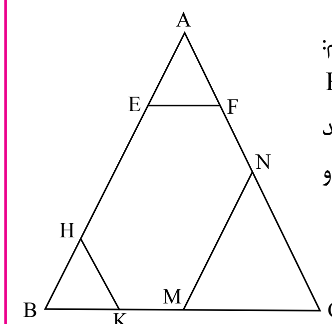
برهان:

$$EF \parallel BC \ \overset{\text{قضیهٔ تالس}}{\underset{\text{قضیهٔ خطوط}}{\Rightarrow}}\ \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC} \quad (۱)$$

$$EF \parallel BC \ \overset{\text{موازی و مورب}}{\Rightarrow}\ \angle E=\angle B,\ \angle F=\angle C,\ \angle A=\angle A \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ABC$$

مثال: در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$، $HK \parallel AC$ و $EF \parallel BC$. ثابت کنید مثلث‌های MNC، BHK و AEF با هم متشابه هستند



اثبات:

$$EF \parallel BC \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta AEF$$

$$MN \parallel AB \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta CMN$$

$$HK \parallel AC \overset{\text{لم}}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta BHK$$

بنابراین هر سه مثلث با مثلث ABC متشابه‌اند. در نتیجه هر سه با هم متشابه هستند.

قضیهٔ ۱. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، دو مثلث متشابه هستند.

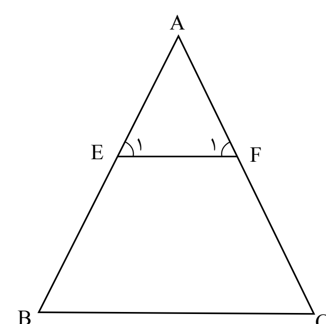
اثبات: چون دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگری برابر هستند، پس زاویهٔ سوم دو مثلث نیز با هم برابرند. یعنی در دو مثلث $A'B'C'$، ABC داریم:

$$\hat{B}=\hat{B}'\ ,\ \hat{C}=\hat{C}'$$

$$\Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=۱۸۰^\circ-(\hat{B}'+\hat{C}')=\hat{A}'$$

روی ضلع AB نقطهٔ E را طوری در نظر می‌گیریم که: $AE=A'B'$. از این نقطه خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع کند. با توجه به لم داریم:

$$\Delta AEF \sim \Delta ABC$$



اگر ثابت کنیم مثلث‌های $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت‌اند، اثبات کامل می‌شود.

$$EF \parallel BC \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{B},\ \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{B}'$$

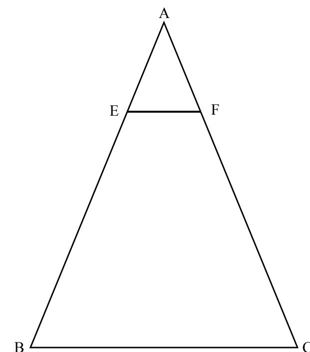
$$\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ AE=A'B' \Rightarrow \Delta AEF \cong \Delta A'B'C' \quad \text{(زضز)}$$

$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

قضیهٔ ۲. اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

فرض: $\angle A=\angle A',\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF=A'C'$ و $AE=A'B'$. بنابراین دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت (ضزض) با هم هم‌نهشت هستند (۱).



اگر ثابت کنیم EF و BC موازی‌اند، اثبات کامل می‌شود. اما داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\ ,\begin{matrix}A'B'=AE\\ A'C'=AF\end{matrix} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

$$\overset{\text{عکس}}{\underset{\text{قضیهٔ تالس}}{\Rightarrow}}\ EF \parallel BC \ (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲)، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه هستند. ■

قضیهٔ ۳. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند، آنگاه دو مثلث متشابه هستند.

فرض: در مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}.$$

اثبات: دو نقطهٔ F و E را روی AC و AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AF=A'C'$ و $AE=A'B'$ بنابراین داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow EF \parallel BC$$

اکنون اگر نشان دهیم دو مثلث $A'B'C'$ و AEF هم‌نهشت هستند، اثبات کامل می‌شود. به این منظور می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}\ ,\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC},$$

$$A'B'=AE,\ A'C'=AF \Rightarrow B'C'=EF$$

پس دو مثلث $A'B'C'$ و AEF در حالت سه ضلع هم‌نهشت هستند و اثبات کامل است. ■

هر چند این‌ها، اثبات‌های کاملاً جدیدی نیستند، ولی به هر حال از روشی متفاوت برخوردارند که نسبت به روش کتاب درسی کوتاه‌تر است.

منبع ....

هندسهٔ ۱، زهرا گویا، سهیلا غلام آزاد و...، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران، ۱۳۷۵.



کاربرد قدرمطلق در یک ضابطه‌ای کردن توابع

عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

کلیدواژه‌ها: قدرمطلق، تابع چندضابطه‌ای

اشاره

اغلب دانش‌آموزان با تبدیل توابع قدرمطلقی به توابع چندضابطه‌ای آشنایی دارند. در اینجا قصد داریم با استفاده از مفهوم قدرمطلق به عکس این موضوع بپردازیم.

قضیه: اگر $a < b$، هر تابع چند ضابطه‌ای به صورت:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a+b & (x<a)\\ b-a & (a\le x\le b)\\ 2x-a-b & (x>b)\end{cases}$$

را می‌توان به صورت:

$$f(x)=\begin{cases} -(x-a)-(x-b) & (x<a)\\ (x-a)-(x-b) & (a\le x\le b)\\ (x-a)+(x-b) & (x>b)\end{cases}$$

نوشت که با استفاده از خواص قدرمطلق، تابع f به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=|x-a|+|x-b|$$

حال به مثال زیر توجه کنید:

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} -2 & (x<-2)\\ x & (-2\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$ را در نظر بگیرید. ابتدا این تابع را به صورت زیر درآورده‌ایم:

$$f(x)=\begin{cases} -2=-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(x-2) & (x<-2)\\ x=\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(x-2) & (-2\le x\le 2)\\ 2=\frac{1}{2}(x+2)-\frac{1}{2}(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

حال به‌سادگی می‌توان دید که:

$$f(x)=\frac{1}{2}|x+2|-\frac{1}{2}|x-2|$$

تمرین: توابع زیر را به صورت یک ضابطه‌ای درآورید:

الف) $y=\begin{cases} 1 & (x<1)\\ -2x+3 & (1\le x\le 2)\\ -1 & (x>2)\end{cases}$

ب) $y=\begin{cases} -2x+2 & (x<1)\\ 4 & (-1\le x\le 2)\\ 2x-2 & (x>2)\end{cases}$

به مثال دیگری توجه کنید (این مسئله از کتاب «قدرمطلق» استاد پرویز شهریاری و با راه‌حل متفاوت از منبع مذکور است):

مثال: تابع با ضابطه‌های زیر مفروض است.

$$y=\begin{cases} x^2+x-2 & (x\le -3)\\ 4-3x-x^2 & (-3\le x\le 1)\\ x^2+3x-4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

با استفاده از علامت قدرمطلق، y را برحسب x به کمک تنها یک رابطه نشان دهید.

حل: با توجه به این‌که تابع در $x=-3$ و $x=1$ تغییر ضابطه می‌دهد، هر ضابطه را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد و نوشت:

$$y=\begin{cases} x^2+x-2=(x-1)(x+2) & (x\le -3)\\ \quad =(x-1)(x+3-1) & \\ \quad =(x-1)(x+3)-(x-1) & \\ 4-3x-x^2=-(x-1)(x+4) & (-3\le x\le 1)\\ \quad =-(x-1)(x+3+1) & \\ \quad =-(x-1)(x+3)-(x-1) & \\ x^2+3x-4=(x-1)(x+4) & (x\ge 1)\\ \quad =(x-1)(x+3+1) & \\ \quad =(x-1)(x+3)+(x-1) & \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$y=\begin{cases} (x^2+2x-3)-(x-1) & (x\le -3)\\ -(x^2+2x-3)-(x-1) & (-3\le x\le 1)\\ (x^2+2x-3)+(x-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

و با توجه به جدول تعیین علامت زیر:

X		-3		1	
X^2+2X-3	+		−		+
$X-1$	−		−		+

با استفاده از مفهوم قدرمطلق، می‌توان تابع y را به صورت زیر نوشت:

$$y=|x^2+2x-3|+|x-1|$$

تمرین: تابع با ضابطه‌های زیر داده شده است:

$$y=\begin{cases} x^2-7x+10 & (x\le 2)\\ -10+7x-x^2 & (2\le x\le 4)\\ x^2-5x+6 & (x\ge 4)\end{cases}$$

مانند مثال فوق عمل کنید و تابع را به یک تابع یک ضابطه‌ای تبدیل کنید.

مسائل ریاضی ۱

مصطفی دیداری

۱. جاهای خالی را با استفاده از اعداد گویای مناسب پر کنید.

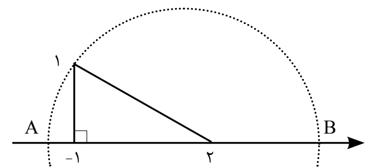
$-\frac{۴}{۵} < ... < ... < -\frac{۲}{۳}$

۲. درامد آقای خواجوی در هر ماه ۵۵۰/۰۰۰ تومان است. او $\frac{۱}{۵}$ این درامد را صرف پرداخت اجاره و $\frac{۷}{۱۱}$ باقی‌ماندهٔ آن را نیز صرف هزینه‌های جاری در ماه می‌کند.

الف) او در هر ماه چه مقدار می‌تواند پس‌انداز کند؟

ب) او بعد از چند ماه می‌تواند کالایی به قیمت ۴۰۰/۰۰۰ تومان بخرد؟

۳. در شکل زیر، دو نقطهٔ B و A نشان‌دهندهٔ چه اعدادی هستند؟



۴. مقدار تقریبی عبارت $\frac{\sqrt{۸/۹}+۳/۰۱۲}{\pi-\sqrt{۴/۱}}$ را به دست آورید.

۵. عبارت $|۱-\sqrt{۲}|+|\pi-۳|$ را بدون قدرمطلق‌بنویسید.

۶. عبارت «الف» را به ریاضی و عبارت «ب» را به فارسی بنویسید.

الف) اگر مربع هر عدد را با یک جمع کنیم، حاصل مثبت است.

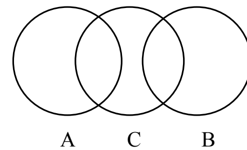
ب) اگر: $a<۰$، آنگاه: $a^۴>۰$.

۷. حاصل این عبارت را به‌دست آورید.

$-۲^۲+۰/۰۴\div ۱\frac{۳}{۵}-(۳/۰۱-۰/۷)$

۸. اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، $B=\{-۱,۰,۲,۶\}$ و $C=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$، حاصل $(A\cup B)-(A\cap C)$ را به‌دست آورید.

۹. حاصل $(A\cup B)\cap C$ را روی شکل هاشور بزنید.



۱۰. برای عبارت $A\subset B\not\subset C$ یک شکل‌بکشید.

۱۱. عضوهای مجموعهٔ $A=\{۲x-۱ \mid -۱<x^۲\le ۴, x\in N\}$ را بنویسید.

۱۲. مجموعهٔ $\{۰/۲, ۰/۰۲, ۰/۰۰۲, ...\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

۱۳. نماد علمی عدد $\frac{۱}{۴۰۰۰}$ را بنویسید.

۱۴. حاصل $\frac{(۳^۳)^۲\times ۸^{-۳}\times ۷^۰}{۱۸^{-۴}\times ۲^{۳^۲}}$ را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

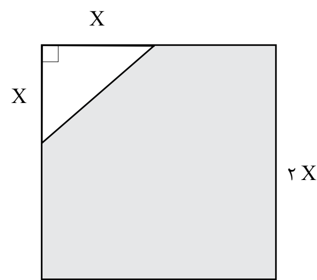
۱۵. اگر b و a دو عد مثبت باشند، عبارت $\sqrt{a^۲b^۳}\times\sqrt{۱۸a^۷b}$ را ساده کنید.

۱۶. حاصل $\frac{۱}{۵}\sqrt{۴۰}+\sqrt{۳^۲+۱}-۲\sqrt{۱۰}$ را به‌دست آورید.

۱۷. مخرج کسر $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳a}}$ را گویا کنید.

۱۸. قرینهٔ معکوس کسر $\frac{-xz}{y}$ را بنویسید

۱۹. مساحت ناحیهٔ رنگی را با یک عبارت جبری نمایش دهید. ضریب عددی و درجهٔ عبارت جبری را مشخص کنید



۲۰. اگر $A=۱+x+x^۲$ و $B=۱-x^۲$ باشد، حاصل $AB-۲(A+B)$ را به‌دست آورید.

۲۱. حاصل عبارات الف و ب را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(۳x-\sqrt{۲})(۳x+\sqrt{۲})+(x^۲-۱)^۲$

ب) $(۲a-۳)^۲$

۲۲. جاهای خالی را با استفاده از اتحادها پر کنید.

الف) $(...+...)(...+۴)=۴x^۲-۲x+...$

ب) $(...+۲)(x^۴-...+...)=...+۸$

۲۳. تجزیه کنید.

الف) $x^۳-۶x^۲+۵x$

ب) $\frac{x^۲}{y^۴}-۱۶$

۲۴. معادله زیر را حل کنید.

$\frac{x-۱}{۳}-\frac{۲x+۱}{۴}=۵x$

۲۵. اگر دو معادلهٔ $x-۱=۲$ و $ax+۱=۳$ هم‌ارز باشند، a چیست؟

۲۶. شمعی با طول اولیهٔ ۳۰cm در حال سوختن است، به‌طوری که در هر دقیقه ۳cm از طول آن کاسته می‌شود.

الف) جدولی بکشید که طول شمع را در هر دقیقه ارائه کند و نمودار آن را رسم کنید.

ب) رابطهٔ بین زمان (x) و طول شمع (y) را بنویسید.

۲۷. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

مسائل ریاضی ۲

مصطفی دیداری

۱. جملهٔ عمومی دنباله‌ای $a_n=\frac{۲n+۳}{n-۳}$ است:

الف) جملهٔ پنجم دنباله را به‌دست آورید.

ب) کدام جمله برابر با پنج است؟

۲. جاهای خالی را طوری پر کنید که اعداد به‌دست آمده دنبالهٔ حسابی تشکیل‌بدهند.

$\frac{۵}{۲},...,...,-۲,...$

۳. m را طوری بیابید که سه جملهٔ $m-۲$، $m+۴$ و $۵m+۲$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند (از چپ به راست). اگر دنباله کاهشی باشد، کدام m مورد قبول است؟

۴. دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\frac{۵}{۱۱}$ را تا سه رقم اعشار بیابید. این جملات به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ با تشکیل دنبالهٔ تفاضلات حدس خود را بیازمایید.

۵. عدد $\sqrt[۵]{۳\times\sqrt[۳]{۳^۴}}$ را با توان گویا بنویسید

۶. مقدار عبارت $\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{۵-\sqrt{۵}}(\sqrt[۴]{۳})^{۵+\sqrt{۵}}}{\sqrt[۴]{۹}}$ را به‌دست آورید.

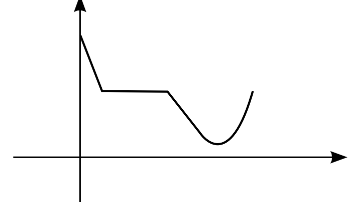
۷. a و b را به‌گونه‌ای بیابید که رابطهٔ

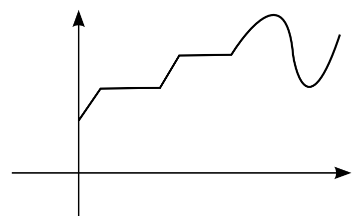
$R=\{(-۲,۱),(a+۱,۵),(a+۲,b+۱),(-۲,a+۵),(۱,-۲)\}$

تابع شود. دامنه و برد تابع را مشخص کنید

۸. تابعی بنویسید که ثابت و دارای دامنهٔ نامتناهی باشد.

۹. کدام یک از نمودارهای زیر می‌توانند نشان‌دهندهٔ میزان دما در یک سال باشند؟ چرا؟



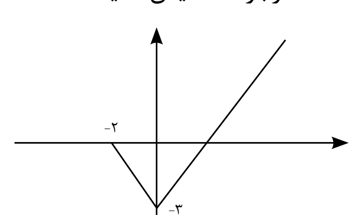


۱۰. ورودی یک شهربازی ۲۰۰۰ تومان و هزینهٔ استفاده از هر وسیله ۴۰۰ تومان است. تابعی بنویسید که هزینه را نسبت به تعداد وسایلی که هر فرد بازی کرده است، ارائه کند. دامنهٔ تابع چه مجموعه‌ای می‌تواند باشد؟

۱۱. در تابع خطی (f) داریم: $f(۱)=۳$ و $f(۲)=۶$. ضابطهٔ تابع را به‌دست آورید.

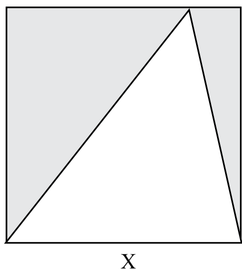
۱۲. ضابطهٔ معکوس تابع $۲x-۳y=۶$ را به‌دست آورید. نمودار تابع و معکوس آن نسبت به کدام خط قرینه‌اند.

۱۳. دامنه و برد تابع با نمودار زیر را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.



۱۴. اگر داشته باشیم: $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ و $g(x)=\frac{۳x+۱}{x+۱}$، $g(f(۲))$ و $f(x+۱)$ را به‌دست آورید.

۱۵. مساحت قسمت رنگی در مربع را به‌صورت تابعی از ضلع آن بیان کنید. اگر مساحت ناحیهٔ رنگی ۸ باشد، طول ضلع چه‌قدر است؟



۱۶. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-(x-۱)^۲+۲$ را با استفاده از انتقال رسم کنید (مراحل آن جداگانه رسم شود).

۱۷. دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\frac{x+۱}{x^۲-۲x}+\frac{x}{x-۳}$

ب) $y=\sqrt{\frac{۴-x^۲}{|x|(x+۱)}}$

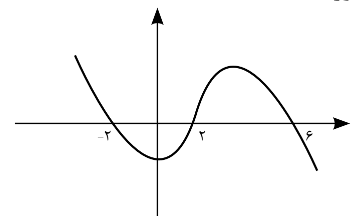
۱۸. نامعادلهٔ $\frac{۱}{x+۲}\ge\frac{x}{x-۱}$ را حل کنید.

۱۹. a را طوری بیابید تا $x^۲+ax+۱$ همواره مثبت باشد.

۲۰. اگر نمودار f به صورت زیر باشد،

الف) دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{f(x)}$ را به‌دست آورید.

ب) دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x)}$ را به‌دست آورید.



۲۱. نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{-۰/۸}$ را با استفاده از نمودار به‌دست آورید.

ب) نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}+۳$ را با انتقال رسم کنید.

مسائل هندسهٔ ۱

هوشنگ شرقی

۱. ثابت کنید نیم‌سازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس در امتداد یکدیگرند.

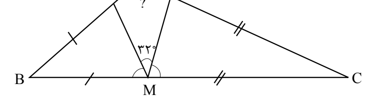
۲. نیم‌سازهای دو زاویهٔ مجاور، با یکدیگر زاویهٔ ۵۰° می‌سازند. اگر اندازهٔ یکی از دو زاویه سه برابر دیگری باشد، زاویهٔ کوچک‌تر چند درجه است؟

۳. خط d از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد. ثابت کنید A و B از d به یک فاصله‌اند.

۴. ثابت کنید هر مثلثی که در آن یک نیم‌ساز و یک میانه برهم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، نیمساز زاویهٔ B، AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AD = BD$ باشد، اندازه‌های زوایای مثلث ABC را به‌دست آورید.

۶. در شکل زیر داریم: $BN = BM$ و $CM = CP$. اگر $N\hat{M}P = ۳۲^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید.



۷. در متوازی‌الاضلاع ABCD، ضلع AB دو برابر ضلع AD است. از نقطهٔ M وسط ضلع AB به نقاط C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید MC و MD نیم‌سازهای دو زاویهٔ C و D هستند.

۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم: $AB = AC = ۸$ و $BC = ۴$. طول ارتفاع BH را به‌دست آورید.

۹. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را به‌دست آورید که محیط آن ۳۲ سانتی‌متر، طول قاعدهٔ بزرگ آن ۶ سانتی‌متر بیشتر از طول قاعدهٔ کوچک آن و طول قطر آن $\sqrt{۱۳۷}$ باشد.

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $AH^{-۲} = AB^{-۲} + AC^{-۲}$.

۱۱. قطرهای ذوزنقه‌ای آن را به چهار مثلث تفکیک کرده‌اند. اگر مساحت دو مثلثی که دو ضلع موازی دارند، ۴ و ۹ واحد باشد، مساحت ذوزنقه را به‌دست آورید.

مسائل هندسهٔ ۲

هوشنگ شرقی

۱. در مثلث ABC نیم‌ساز زاویهٔ A، BC را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. سپس طول‌های BD و CD را برحسب طول‌های سه ضلع مثلث به‌دست آورید.

۲. اولاً ثابت کنید هر سه عدد طبیعی متوالی و مخالف ۱ می‌توانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند. ثانیاً طول‌های اضلاع چنین مثلثی را بیابید؛ در صورتی که نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویهٔ آن، روی ضلع مقابل دو پاره‌خط ایجاد کند که پاره‌خط مجاور به کوچک‌ترین ضلع مثلث مساوی ۴/۲ سانتی‌متر باشد.

۳. طول قطرهای AC و BD از متوازی‌الاضلاع ABCD به ترتیب مساوی ۶cm و ۱۲cm است. اگر M وسط BC، $DM = ۹۰cm$ و نقطهٔ برخورد DM و AC نقطهٔ P و O مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، محیط مثلث ODP چه‌قدر است؟

۴. در مثلث ABC می‌دانیم: $AB > AC$ و میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

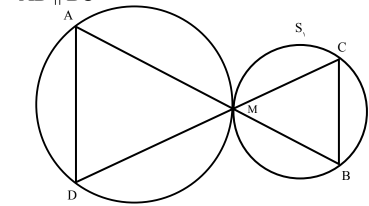
الف) $A\hat{M}C < ۹۰^\circ$

ب) $M\hat{A}B < \frac{\hat{A}}{۲}$

۵. ثابت کنید مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.

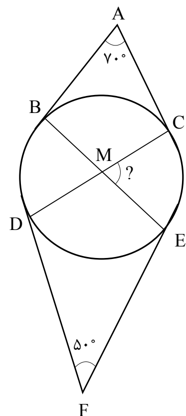
۶. مثلث ABC را با داشتن طول‌های $AB = c$ و $AC = b$ و میانهٔ $AM = m_a$ رسم کنید.

۷. در شکل زیر دایره‌های $S_۱$ و $S_۲$ در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. ثابت کنید: $AD \parallel BC$



۸. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المرکزین دو دایرهٔ متخارج در یک نقطه همرأس‌اند.

۹. مثلث ABC و دایرهٔ محاطی آن مفروض‌اند. اگر دایرهٔ فوق در نقطهٔ M بر AC مماس باشد، ثابت کنید: $AM = p - a$ (p نصف محیط مثلث و $CB = a$ است).



۱۰. در شکل بالا اندازهٔ زاویهٔ M را بیابید.

مسائل جبر و احتمال

معین کتابچی

۱. به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: $۱۷ | ۵^{۲n+۱} - ۳ \times ۸^{n+۲}$.

۲. اگر $\sqrt{۵}$ عددی گنگ باشد، ثابت کنید $۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۳. به کمک استدلال بازگشتی ثابت کنید: $(a, b \geq ۰)$ $a^۵ + b^۵ \geq a^۴b + ab^۴$.

۴. اگر m و n دو عدد طبیعی متوالی باشند، ثابت کنید $m^۲ + n^۲ + m^۲n^۲$ مربع کامل است.

۵. در یک نمایشگاه خودرو، ۳۳ دستگاه در سه مدل ب ام و، تندر و پژو در رنگ‌های قرمز، فیلی و زرد وجود دارند. حداقل چند خودروی یک رنگ و یک مدل وجود خواهد داشت؟

۶. آیا می‌توان یک جدول ۱۰×۱۰ را با اعداد ۱، ۰ و ۱- طوری پر کرد که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر دو قطر جدول همگی متمایز باشند؟

۷. هرگاه $A \cup B \subseteq A - B$ باشد، $P(P(P(B)))$ چند عضو دارد؟

۸. اگر تساوی روبه‌رو برقرار باشد، X را به‌دست آورید؟

$[X \cap (B' \cap C')] \cup [X \cap (B \cup C)] = A$

۹. درستی تساوی‌های زیر را اثبات کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$

ب) $(A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$

ج) $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B' = U$

۱۰. اگر داشته باشیم:
$A = \{x \in Z | \log_۲^{x^۲+۴} = ۳\}$،
و $B = \{m \in Z | -۲ \leq m, ۲^m \leq ۱\}$
$C = \{x || x | \leq ۲\}$، نمودار $(B \times A) \cap (A \times C)$ را رسم کنید.

۱۱. نمودار رابطهٔ زیر را رسم کنید:

$$\begin{cases} R: Z \to Z \\ xRy \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \leq ۴, y \geq x^۲ \end{cases}$$

۱۲. اگر داشته باشیم $A = \{x \in R | x^۲ \leq ۱\}$ و $B = \{x \in R | x^۲ \leq ۴\}$، آنگاه $B^۲ - A^۲$ را رسم کنید.

۱۳. رابطهٔ R روی $R - \{۱\}$ به صورت زیر تعریف شده است. هم‌ارزی بودن R را بررسی کنید.

$xRy \Leftrightarrow x + y - xy \leq ۱$

مسائل حسابان

سیدعباس موسوی

۱. چه تعداد از جملات این تصاعد عددی را جمع کنیم تا حاصل عددی بین ۲۴۰ و ۱۰۸۰ شود؟

$-۳, ۳, ۹, \ldots$

۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۹ + ۳x^۸ + x^۵ + x + ۱$ بر $(x-۲)(x+۲)(x^۲+۴)$ به‌صورت ax+b است. a+b را به‌دست آورید.

۳. در بسط $(\sqrt{x} + \frac{۱}{۲x})^۹$: الف) جملهٔ مستقل از x را به‌دست آورید؛ ب) تعداد جملات و مجموع ضرائب بسط را به‌دست آورید.

۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۱}{\alpha^۳ + ۳\alpha^۲}$ و $\frac{۱}{\beta^۳ + ۳\beta^۲}$ باشند.

۵. آلیاژی از دو فلز به نسبت ۱ به ۲ و آلیاژ دیگر از همان فلزات با نسبت ۲ به ۳ ساخته شده است. با چه نسبتی این دو آلیاژ را با هم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۱۷ به ۲۷ به‌دست آید.

۶. معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{۱}{x^۲ + ۲x} - \frac{۱}{x^۲ + ۲x + ۱} = \frac{۱}{۱۲}$

ب) $۴ + \sqrt{x - ۳} = \sqrt{۱۶ - \frac{۵}{\sqrt{x}}}$

۷. به روش هندسی تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{-x}e^{-x} = ۱$ را به‌دست آورید $(e \approx ۲/۷۱)$.

۸. نقاطی روی محور yها مشخص کنید که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه به عرض ۱- و ۲ روی محور yها، کمتر از ۳ نباشد.

۹. دامنه و برد تابع $f(x) = x + \sqrt{۴x - x^۲}$ را به‌دست آورید.

۱۰. اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد،

الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $-3f(2x+2)$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع $-3f(2x+2)$ را به‌دست آورید.

۱۱. اگر داشته باشیم: $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ و $g(x)=x^2$، دامنه و ضابطهٔ gof را به‌دست آورید.

۱۲. اگر داشته باشیم $f(x)=x-\frac{1}{x}$ و $(gof)_{(x)}=x^2+\frac{1}{x^2}$، ضابطهٔ $g(x)$ را به‌دست آورید.

۱۳. اگر نمودار $f(x)=\log(5x+\sqrt{1+ax^2})$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، a و b را طوری به‌دست آورید که تابع $y=|x+a|+|x+b|$ زوج باشد.

۱۴. حدود b و a را طوری به‌دست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases}ax^3+1: x<1\\ x^2+b: x\geq 1\end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد. سپس ضابطهٔ معکوس را برای $a=b=1$ به‌دست آورید.

۱۵. نمودار تابع مقابل را رسم کنید و موارد زیر را پاسخ دهید:

$$f(x)=\begin{cases}x\left[\frac{x}{2}\right]: & -2<x\leq -1\\ \sqrt{-x}: & -1<x\leq 0\\ \left[\frac{x}{2}\right]: & 0<x<2\\ \frac{1}{x}: & 2\leq x<4\end{cases}$$

الف) تابع در چه فواصلی صعودی، نزولی، اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، هم صعودی و هم نزولی است.

ب) برد تابع را بنویسید:

ج) آیا تابع معکوس‌پذیر است؟ چرا؟

د) تابع زوج است یا فرد؟

هـ) بازه‌ای بیان کنید که تابع در آن یکنوا نباشد.

۱۶. اگر f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $T=5$ باشد و برای $0<x<1$ داشته باشیم: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$، حاصل $f(-19/84)$ را به‌دست آورید.

۱۷. ثابت کنید هر تابع دل‌خواه f(x) را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت. این عمل را برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ انجام دهید.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!

● این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می‌دهم که آن را برای خیلی‌ها تعریف‌می‌کنید! با فرض درست بودن همهٔ تساوی‌ها، در سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

۱= ۵
۲= ۵۵
۳= ۵۵۵
۴= ۴۴۴۴
۵= ؟

جواب را در انتهای همین بخش ببینید

● این یکی هم جالب است: **کاوه** و **شهریار** را که یادتان هست؛ دو برادر دوقلو را می‌گویم! آن‌ها هر کدام یک ساعت شماطه‌دار داشتند که هر دوی آن‌ها، سر هر ساعت به تعداد آن ساعت، زنگ می‌زدند، ولی ساعت کاوه سریع‌تر زنگ می‌زد! به این صورت که در مدت زمانی که ساعت کاوه سه زنگ می‌زند، ساعت شهریار فقط دو زنگ می‌زند. یک روز سر ساعت معینی، هر دو ساعت هم‌زمان شروع کردند به زنگ‌زدن. بعد از آن‌که زنگ‌زدن ساعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که شما نمی‌دانید دربارهٔ چه چیزی باید صحبت کنید!

حل مسائل ریاضی ۱

۱.
$$\frac{-4\times 3}{5\times 3},\ \frac{-2\times 5}{3\times 5}$$
$$\frac{-12\times 2}{15\times 2},\ \frac{-10\times 2}{15\times 2}$$
$$\frac{-24}{30},\ \frac{-20}{30}$$
$$\Rightarrow \frac{-4}{5}<\frac{-23}{30}<\frac{-22}{30}<\frac{-20}{30}$$

۲.
اجاره $\frac{1}{5}\times 550/000=110/000$

باقی‌مانده $550/000-110/000=440/000$

هزینه‌های جاری $\frac{7}{11}\times 440/000=280/000$

کل هزینه‌ها $110/000+280/000=390/000$

پس‌انداز $550/000-390/000=160/000$

ب) پس از سه ماه چون:
$3\times 160/000=480/000>400/000$

۳.
$A: 2-\sqrt{10}$
$B: 2+\sqrt{10}$

۴.
$$\frac{\sqrt{8/9}+3/012}{\pi-\sqrt{4/1}}\approx\frac{\sqrt{9}+3}{3-\sqrt{4}}=\frac{3+3}{3-2}=6$$

۵.
$$\left|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{-}\right|+\left|\underbrace{\pi-3}_{+}\right|=-(1-\sqrt{2})+\pi-3=\sqrt{2}+\pi-4$$

۶. الف) $a^2+1>0$

ب) اگر a عددی منفی باشد، توان چهارم آن مثبت است.

۷.
$3/01-0/7=2/31$
$-2^2=-4$
$$0/04\div 1\frac{3}{5}=\frac{4}{100}\div\frac{8}{5}=\frac{4}{100}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{40}$$
$$\text{حاصل}=-4+\frac{1}{40}-\frac{231}{100}=\frac{-800+5-462}{200}=\frac{-1257}{200}$$

۸.
$A\cup B=\{1,2,3,4,5,-1,0,6\}$
$A\cap C=\{1,2\}$
$(A\cup B)-(A\cap C)=\{3,4,5,-1,0,6\}$

۹.
A C B

۱۰.
B A C

۱۱.
$$\left\{2x-1\ \middle|\ \underbrace{-1<x^2\leq 4, x\in N}_{1,2}\right\}=\{1,3\}$$

۱۲.
$$\left\{\frac{2}{10},\frac{2}{100},\frac{2}{1000},\dots\right\}=\left\{\frac{2}{10^n}\ \middle|\ n\in N\right\}$$

۱۳.
$$\frac{1}{4000}=\frac{1}{4\times 10^3}=\frac{1}{4}\times 10^{-3}$$
$$=0/25\times 10^{-3}$$
$$=2/5\times 10^{-1}\times 10^{-3}=2/5\times 10^{-4}$$

۱۴.
$$\frac{(3^3)^2\times 8^{-3}\times 7^0}{18^{-4}\times 2^{3^2}}=\frac{3^6\times(2^3)^{-3}\times 1}{(2\times 3^2)^{-4}\times 2^9}$$
$$=\frac{3^6\times 2^{-9}}{2^{-4}\times 3^{-8}\times 2^9}$$
$$=\frac{3^6\times 3^8}{2^5\times 2^9}=\frac{3^{14}}{2^{14}}=(\frac{3}{2})^{14}$$

۱۵.
$$\sqrt{a^2b^3}\times\sqrt{18a^7b}=\sqrt{18a^9b^4}$$
$$=\sqrt{2\times 9\times a^8\times a\times b^4}=3a^4b^2\sqrt{2a}$$

۱۶.
$$\frac{1}{5}\sqrt{40}+\sqrt{3^2+1}-2\sqrt{10}$$
$$=\frac{1}{5}\sqrt{4\times 10}+\sqrt{10}-2\sqrt{10}$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{10}+\sqrt{10}-2\sqrt{10}=(\frac{2}{5}+1-2)\sqrt{10}$$
$$x=-\frac{3}{5}\sqrt{x}$$

۱۷.
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3a}}\times\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}}=\frac{\sqrt{6a}}{3a}$$

۱۸.
$$\frac{y}{xz}$$

۱۹.
مساحت مربع $=(2x)^2=4x^2$

مساحت مثلث $=\frac{x.x}{2}=\frac{x^2}{2}$

مساحت هاشور $=4x^2-\frac{x^2}{2}=\frac{7}{2}x^2$

۲۰.
$$AB=(1+x+x^2)(1-x^2)$$
$$=1-x^2+x-x^3+x^2-x^4$$
$$=1+x-x^3-x^4$$
$$A+B=1+x+x^2+1-x^2=2+x$$
$$AB-2(A+B)=1+x-x^3-x^4-4-2x$$
$$=-3-x-x^3-x^4$$

۲۱.
الف) $(3x-\sqrt{2})(3x+\sqrt{2})+(x^2-1)^2$
$$=9x^2-2+x^4-2x^2+1=7x^2+x^4-1$$

ب) $(2a-3)^3=(2a)^3-3(2a)^2(3)+3(2a)(3)^2-(3^3)=8a^3-36a^2+54a-27$

۲۲.
$(2x-5)(2x+4)=4x^2-2x-20$ ( )(

$(x^2+2)(x^4-2x^2+4)=x^6+8$ ( )(x

۲۳.

$$x^{۳}-۶x^{۲}+۵x=x(x^{۲}-۶x+۵)$$
$$=x(x-۱)(x-۵)$$

$$\frac{x^{۲}}{y^{۴}}-۱۶=(\frac{x}{y^{۲}}-۴)(\frac{x}{y^{۲}}+۴)$$

۲۴.

$$\frac{x-۱}{۳}-\frac{۲x+۱}{۴}=۵x$$
$$\frac{۴(x-۱)-۳(۲x+۱)}{۱۲}=۵x$$
$$\Rightarrow ۴x-۴-۶x-۳=۶۰x$$
$$-۲x-۷=۶۰x\Rightarrow -۶۲x=۷$$
$$x=-\frac{۷}{۶۲}$$

۲۵. هم‌ارز بودن دو معادله به معنی یکسان‌بودن جواب‌هاست.

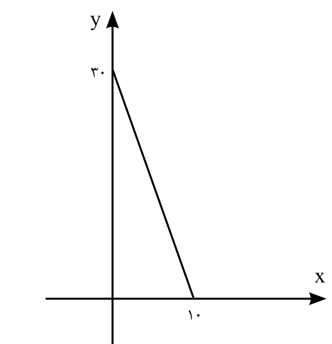
بنابراین: $x-۱=۲$ و لذا $x=۳$.

پس $x=۳$ جواب معادلهٔ دیگر هم باید باشد. $۳a+۱=۳\rightarrow ۳a=۲\rightarrow a=\frac{۲}{۳}$

۲۶.

دقیقه (x)	۰	۱	۲	۳	...	۱۰
طول شمع (y)	۳۰	۲۷	۲۴	۲۱	...	۰

$y=۳۰-۳x$



۲۷.

$$\sqrt{(۳-(-۱))^{۲}+(-۱-۲)^{۲}}$$
$$=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$



حل مسائل ریاضی ۲

۱.

الف) $a_{۵}=\frac{۲(۵)+۳}{۵-۳}=\frac{۱۳}{۲}$

ب) $\frac{۲n+۳}{n-۳}=۵\Rightarrow ۲n+۳=۵n-۱۵$

$-۳n=-۱۸\Rightarrow n=۶\Rightarrow a_{۶}=۵$

۲.

$a_{۲}=-۲\Rightarrow a_{۱}+d=-۲$

$a_{۵}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a_{۱}+۴d=\frac{۵}{۲}$

$۳d=\frac{۹}{۲}$

$d=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow -\frac{۷}{۲},-۲,-\frac{۱}{۲},۱,\frac{۵}{۲}$

۳.

$(m+۴)^{۲}=(m-۲)(۵m+۲)$

$\Rightarrow m^{۲}-۴m-۵=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} m=۵ \overset{\text{دنباله}}{\Rightarrow} ۲۷,۹,۳ \\ m=-۱\Rightarrow -۳,۳,-۳ \end{cases}$

$m=۵$ قابل قبول است.

۴.

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۱۱ \\ \underline{۴۴} & ۰/۴۵۴ \\ ۶۰ & \\ \underline{۵۵} & \\ ۵۰ & \\ \underline{۴۴} & \\ ۶ & \end{array}$$

$۰/۴,۰/۴۵,۰/۴۵۴,...$

$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴}{۱۰}=\frac{۵۰-۴۴}{۱۱۰}=\frac{۶}{۱۱۰}$

$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴۵}{۱۰۰}=\frac{۵۰۰-۴۹۵}{۱۱۰۰}=\frac{۵}{۱۱۰۰}$

$\frac{۵}{۱۱}-\frac{۴۵۴}{۱۰۰۰}=\frac{۵۰۰۰-۴۹۹۴}{۱۱۰۰۰}=\frac{۶}{۱۱۰۰۰}$

دنبالهٔ تفاضلات به سمت صفر و بنابراین دنباله تقریبات اعشاری به سمت $\frac{۵}{۱۱}$ می‌رود.

۵.

$$\sqrt[۸]{۳\times ۳^{\frac{۴}{۳}}}=\sqrt[۸]{۳^{۱+\frac{۴}{۳}}}=\sqrt[۸]{۳^{\frac{۷}{۳}}}=۳^{\frac{\frac{۷}{۳}}{۸}}=۳^{\frac{۷}{۲۴}}$$

۶.

$$\frac{\sqrt[۴]{۳}^{۵-\sqrt{۵}}(\sqrt[۴]{۳})^{۵+\sqrt{۵}}}{\sqrt[۴]{۹}}=\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{(۵-\sqrt{۵})+(۵+\sqrt{۵})}}{\sqrt[۴]{۳^{۲}}}$$
$$=\frac{(\sqrt[۴]{۳})^{۱۰}}{\sqrt[۴]{۳^{۲}}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۲}}}{۳^{\frac{۲}{۴}}}=۳^{\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}}=۳^{۲}=۹$$

۷.

$a+۵=۱\Rightarrow a=-۴$

$\xrightarrow{\text{قرار می‌دهیم}}\{(-۲,۱),(-۳,۵),(-۲,b+۱),(-۲,۱),(۱,-۲)\}$

$\Rightarrow b+۱=۱\Rightarrow b=۰$

دامنه $=\{-۲,-۳,۱\}$

برد $=\{۱,۵,-۲\}$

۸.

$\begin{cases} f:N\rightarrow N \\ f(n)=۱ \end{cases}$

۹. الف) با توجه به دما در چهار فصل سال.

۱۰.

$y=۲۰۰۰+۴۰۰x$

$D=\{۰,۱,۲,...\}$

۱۱.

$f(x)=ax+b$

$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=a+b=۳ \\ f(۲)=۲a+b=۶ \end{cases}$

$a=۳$

$b=۰$

$f(x)=۳x$

۱۲.

$۲x-۳y=۶\Rightarrow ۲x=۳y+۶$

$\Rightarrow x=\frac{۳y+۶}{۲}\Rightarrow y=\frac{۳x+۶}{۲}$

نمودار تابع معکوس و اصلی نسبت به خط y=x قرینه‌اند.

۱۳.

$D=(-۲,+\infty)$

$R=[-۳,+\infty)$

۱۴.

$f(۲)=\sqrt{۴-۳}=۱\Rightarrow g(f(۲))$

$=g(۱)=\frac{۴}{۲}=۲$

$f(x+۱)=\sqrt{۲(x+۱)-۳}=\sqrt{۲x-۱}$

۱۵.

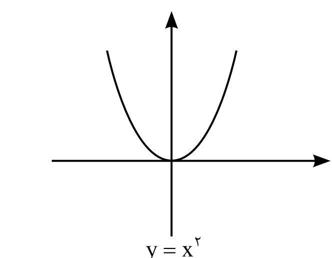
$S_{\text{مربع}}=x^{۲}$

$S_{\text{مثلث}}=\frac{x.x}{۲}=\frac{x^{۲}}{۲}$

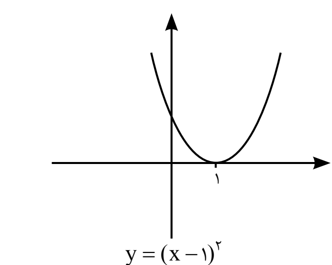
$S_{\text{هاشور}}=x^{۲}-\frac{x^{۲}}{۲}=\frac{x^{۲}}{۲}$

$\frac{x^{۲}}{۲}=۸\Rightarrow x^{۲}=۱۶\Rightarrow x=۴$

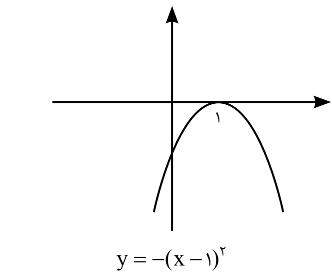
۱۶.



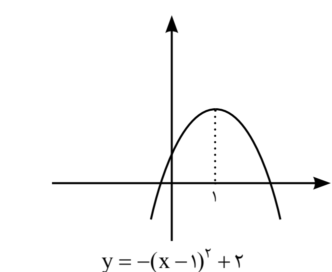
$y=x^{۲}$



$y=(x-۱)^{۲}$



$y=-(x-۱)^{۲}$



$y=-(x-۱)^{۲}+۲$

۱۷.

الف) $\begin{cases} x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow x(x-۲)=۰\begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases} \\ x-۳=۰\Rightarrow x=۳ \end{cases}$

$D=R-\{۰,۲,۳\}$

ب) $۴-x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm ۲$

$|x|=۰\Rightarrow x=۰$

$(x+۱)=۰\Rightarrow x=-۱$

x		−۲		−۱		۰		+۲	
$۴-x^{۲}$	−	۰	+		+		+	۰	−
$\|x\|$	+		+		+	۰	+		+
$x+۱$	−		−	۰	+		+		+
	+	۰	−	ت.ن	+	ت.ن	+	۰	−

$D=(-\infty,-۲]\cup(-۱,۰)\cup(,۰۲]$

۱۸.

$\frac{x}{x-۱}\geq\frac{۱}{x+۲}\Rightarrow\frac{x}{x-۱}-\frac{۱}{x+۲}\geq ۰$

$\frac{x(x+۲)-(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{x^{۲}+x+۱}{(x-۱)(x+۲)}\geq ۰$

x		−۲		۱	
$x^{۲}+x+۱$	+		+		+
$x-۱$	−		−	۰	+
$x+۲$	−		+		+
	+	ت.ن	−	ت.ن	+

جواب: $(-\infty,-۲)\cup(۱,+\infty)$

۱۹.

$\begin{cases} \Delta<۰\Rightarrow a^{۲}-۴<۰\Rightarrow (a-۲)(a+۲)<۰ \\ ۱>۰ \end{cases}$

a		−۲		۱	
$a^{۲}-۴$	+	۰	−	۰	+

$a\in(-۲,۲)$

۲۰.

الف) $f(x)=۰\Rightarrow x=-۲,۲,۶$

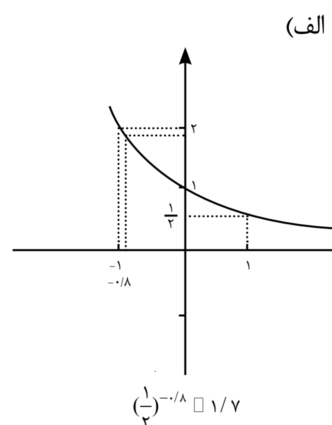
$\Rightarrow D=R-\{-۲,۲,۶\}$

ب) $\underbrace{f(x)\geq ۰}_{\text{بالای محور xها}}\Rightarrow D=(-\infty,-۲]\cup[۲,۶]$

۲۱.

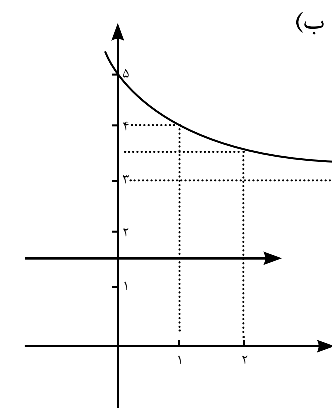
x	۰	۱	−۱	۲
y	۱	$\frac{۱}{۲}$	۲	$\frac{۱}{۴}$

الف)



$(\frac{۱}{۲})^{-۰/۸}\simeq ۱/۷$

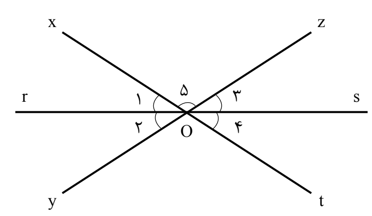
ب)



چهار نقطهٔ به‌دست آمده را یک واحد به راست و ۳ واحد به بالا می‌بریم.

حل مسائل هندسهٔ ۱

۱. مطابق شکل، زوایای متقابل به رأس xoy و zot را در نظر می‌گیریم. با توجه به برابری دو زاویه و ویژگی نیم‌سازها داریم (or و os نیم‌سازهای این دو زاویه هستند):



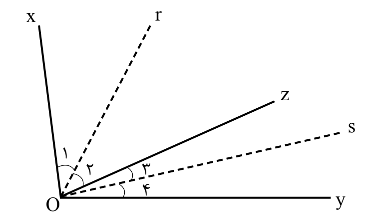
$\hat{o}_1 + \hat{o}_2 = \hat{o}_3 + \hat{o}_4 \Rightarrow 2\hat{o}_1 + 2\hat{o}_3$

$\Rightarrow \hat{o}_1 = \hat{o}_3 = \hat{o}_2 = \hat{o}_4$

$\hat{o}_5 + \hat{o}_3 + \hat{o}_4 = 180^\circ \Rightarrow \hat{o}_5 + \hat{o}_3 + \hat{o}_1 = 180^\circ$

$r\hat{o}s = 180^\circ \Rightarrow$ or و os در یک امتدادند.

۲. طبق فرض مسئله داریم:



$\hat{o}_1 = \hat{o}_2 ,\ \hat{o}_3 = \hat{o}_4 ,\hat{o}_2 + \hat{o}_3 = 50^\circ$

$\Rightarrow 2\hat{o}_2 + 2\hat{o}_3 = 50 \times 2$

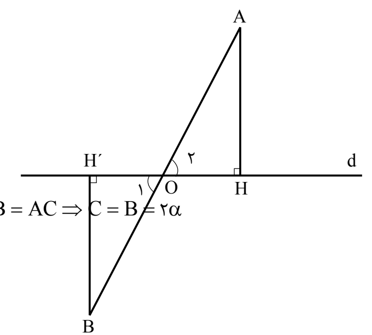
$\Rightarrow \hat{o}_1 + \hat{o}_2 + \hat{o}_3 + \hat{o}_4 = 100^\circ$

$\Rightarrow x\hat{o}y = 100^\circ \Rightarrow x\hat{o}z + z\hat{o}y = 100^\circ,$

$x\hat{o}z = 3z\hat{o}y$

$\Rightarrow 4z\hat{o}y = 100^\circ \Rightarrow z\hat{o}y = 25^\circ , x\hat{o}z = 75^\circ$

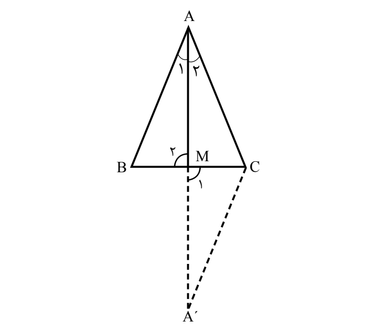
۳. خط d از وسط AB می‌گذرد $(OA = OB)$ و فاصلهٔ A و B از d طول عمودهایی است که از A و B بر d رسم می‌شود (AH و BH′). به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های OAH و OBH′ حکم را ثابت می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \hat{o}_1 = \hat{o}_2 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \quad \text{(وتر و یک زاویه)}$$

$\Rightarrow AH = BH'$

۴. مطابق شکل، میانهٔ AM از مثلث ABC، نیم‌ساز زاویهٔ $\hat{A}$ هم هست؛ یعنی: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $BM = MC$. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A′ امتداد می‌دهیم و A′ را به C وصل می‌کنیم.



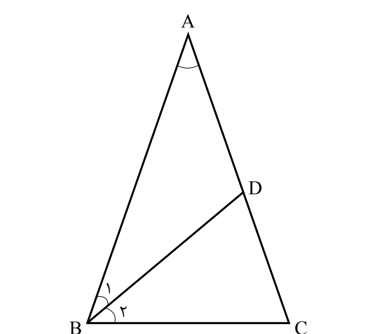
$$\left.\begin{array}{l} AM = A'M \\ MB = MC \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta A'MC \quad \text{(ض‌زض)}$$

$\Rightarrow A'C = AB,\ \hat{A}' = \hat{A}_1 , \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\Rightarrow \hat{A}' = \hat{A}_2$

$\Rightarrow A'C = AC \Rightarrow AB = AC$

۵.



$AD = BD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \alpha$

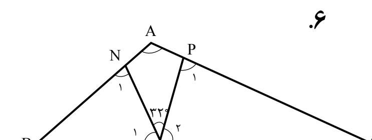
$AB = AC \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} = 2\alpha$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$

$\Rightarrow 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ$

$\Rightarrow \hat{A} = 36^\circ , \hat{B} = \hat{C} = 72^\circ$

۶.



$BM = BN \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1$

$\Rightarrow \Delta BNM : \hat{M}_1 = \frac{180 - \hat{B}}{2}$

$CM = CP \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{P}_1$

$\Rightarrow \Delta CMP : \hat{M}_2 = \frac{180 - \hat{C}}{2}$

$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + 32^\circ = 180^\circ$

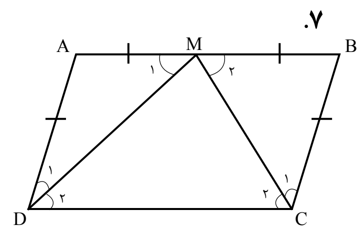
$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 148^\circ$

$\Rightarrow \frac{180 - \hat{B}}{2} + \frac{180 - \hat{C}}{2} = 148^\circ$

$\Rightarrow 180^\circ - \hat{B} + 180 - \hat{C} = 296^\circ$

$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 64^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 116^\circ$

۷.



$AB = 2AD,\ MA = MB$

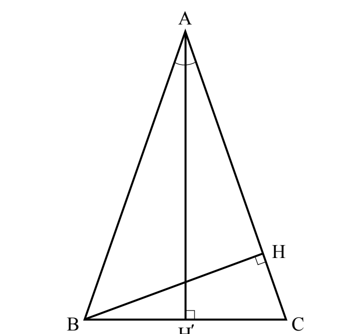
$\Rightarrow MA = MB = AD = BC$

$MA = AD \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1 ,\ AM \parallel CD,$ MD مورب

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا MC و MD نیم‌سازهای زوایای C و D هستند.

۸. ارتفاع AH′ را که میانه هم هست، رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:



$BH' = CH' = \frac{BC}{2} = 2$

$\Delta AH'B : AH'^2 + BH'^2 = AB^2$

$\Rightarrow AH'^2 = AB^2 - BH'^2 = 8^2 - 2^2 = 60$

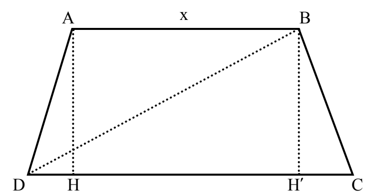
$\Rightarrow AH' = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} ,\ S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH'$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH.AC = \frac{1}{2} BH \times 8 = 4\sqrt{15}$

$\Rightarrow BH = \sqrt{15}$

۹. ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم می‌کنیم. واضح است که مثلث‌های ADH و BCH′ هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:



$DH = CH',\ HH' = AB$

$\Rightarrow DH = CH' = \frac{CD - AB}{2}$

طبق فرض داریم:

$AB = x,\ CD = y,\ AD = BC = z,$

$x + y + 2z = 32,$

$y - x = 6 \Rightarrow DH = CH' = \frac{y - x}{2} = 3$

$\Rightarrow DH' = x + 3$

$\Delta BDH' : BD^2 = BH'^2 + DH'^2$

$\Rightarrow 137 = (BC^2 - CH'^2) + DH'^2$

$\Rightarrow z^2 - 9 + (x + 3)^2 = 137$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + z^2 = 137$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 + 6x = 137 \\ x + y + 2z = 32 \\ y - x = 6 \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات بالا، به صورت زیر، x، y و z و از آنجا مساحت ذوزنقه را می‌یابیم. ابتدا طرفین دو معادلهٔ دوم و سوم را از هم کم می‌کنیم:

$(x + y + 2z) - (y - x) = 26$

$\Rightarrow 2x + 2z = 26 \Rightarrow x + z = 13$

$\Rightarrow z = 13 - x$

سپس نتیجه را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$x^2 + (13 - x)^2 + 6x = 137$

$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x - 8)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 8$ یا $x = 2$

با توجه به معادلات دیگر دو دسته جواب به صورت‌های زیر به‌دست می‌آید:

$(I)\ x = 8, y = 14, z = 5$ یا

$(II)\ x = 2, y = 8, z = 11$

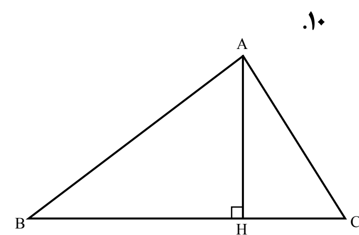
از جواب اول نتیجه می‌شود:

$S = \frac{8 + 14}{2} \times 4 = 44 ,\ AH = 4$

و از جواب دوم:

$S = \frac{2 + 8}{2} \times \sqrt{112} = 20\sqrt{7} ,\ AH = \sqrt{112}$

۱۰.



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} AB.AC$

$\Rightarrow AH.BC = AB.AC$

$\Rightarrow AH^2.BC^2 = AB^2.AC^2$

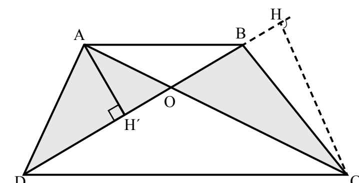
$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2.AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2}$

$= \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH^{-2} = AB^{-2} + AC^{-2}$

۱۱. مطابق شکل داریم:

$S_{OAB} = 4 ,\ S_{CDO} = 9$.



ولی مثلث‌های ADC و BDC هم مساحت‌اند (چرا؟).

بنابراین: (چرا؟) $S_{AOD} = S_{BOC}$.

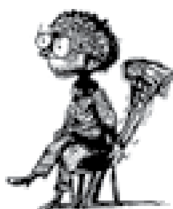
$\Rightarrow \frac{1}{2} OD.AH' = \frac{1}{2} OB.CH = S$

$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} OD.AH'.OB.CH$

$= (\frac{1}{2} OD.CH).(\frac{1}{2} OB.AH')$

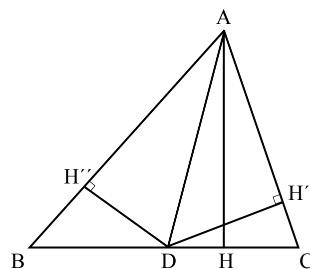
$= S_{OCD}.S_{OAB} = 9 \times 4 = 36$

$\Rightarrow S = 6 \Rightarrow S_{ABCD} = 9 + 4 + 6 + 6 + 25$



حل مسائل هندسهٔ ۲

۱. نیم‌ساز AD و ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. AH ارتفاع رأس A برای هر دو مثلث ABD و ADC است. مساحت‌های این دو مثلث را با این ارتفاع می‌نویسیم و برهم تقسیم می‌کنیم:



$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD.AH}{\frac{1}{2} CD.AH} = \frac{BD}{CD} \quad (I)$

از طرف دیگر می‌دانیم که هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DH'' = DH'$.

بنابراین بار دیگر داریم:

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH''.AB}{\frac{1}{2} DH'.AC} = \frac{AB}{AC} \quad (II)$

و از مقایسهٔ روابط I و II نتیجه می‌شود:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

از ترکیب تناسب فوق در صورت خواهیم داشت:

$\frac{AB + AC}{AC} = \frac{BD + CD}{CD} = \frac{BC}{CD}$

$\Rightarrow CD = \frac{AC.BC}{AB + AC}$

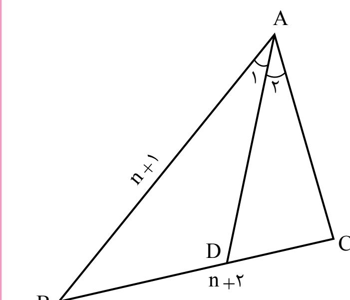
$\Rightarrow BD = BC - CD = BC - \frac{AC.BC}{AB + AC}$

$\Rightarrow BD = \frac{AB.BC}{AB + AC}$

۲. اولاً، اگر این سه عدد را $a=n+۲$ ، $b=n+۱$ و $c=n$ در نظر بگیریم، کافی است ثابت کنیم که مجموع هر جفت از این عدد، از سومی بزرگ‌تر است (نامساوی مثلثی):

$$a+b=۲n+۳>n(n+۳>۰)\Rightarrow a+b>c$$
$$a+c=۲n+۲>n(n+۲>۰)\Rightarrow a+c>b$$
$$b+c=۲n+۱>n+۲(n>۱)\Rightarrow b+c>a$$

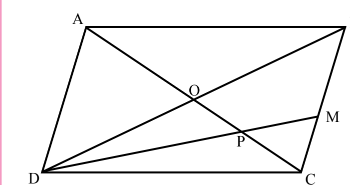
ثانیاً، مطابق شکل اگر AD نیم‌ساز وارد بر بزرگ‌ترین ضلع $(BC=n+۲)$ باشد، طبق نتیجهٔ مسئلهٔ ۱ داریم:



$$CD=\frac{BC.AC}{AB+AC}=\frac{(n+۲)n}{۲n+۱}=۴/۲$$
$$\Rightarrow n^{۲}+۲n=۸/۴n+۴/۲$$
$$\Rightarrow n^{۲}-۶/۴n-۴/۲=۰$$
$$\Rightarrow (n-۷)(n+۰/۶)=۰\Rightarrow n=۷$$

یعنی طول‌های اضلاع این مثلث ۷، ۸ و ۹ سانتی‌متر هستند.

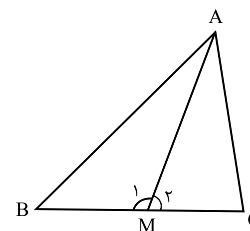
۳. در مثلث BDC، OC و DM دو میانهٔ مثلث هستند. پس P مرکز ثقل مثلث است و از آنجا داریم:



$$DP=\frac{۲}{۳}DM=\frac{۲}{۳}\times۹=۶$$
$$OP=\frac{۱}{۳}OC=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}AC=۱\ ,\ OD=۶$$
$$\Rightarrow \text{محیط}\ \Delta ODP=۶+۶+۱=۱۳$$

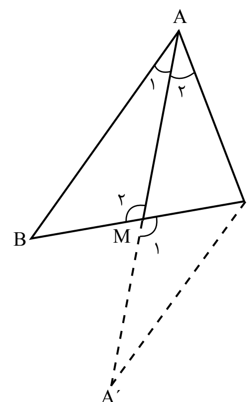
۴. الف)

$$\left.\begin{matrix}AM=AM\\BM=CM\\AB>AC\end{matrix}\right\}\overset{\text{عکس قضیهٔ لولا}}{\Rightarrow}\hat{M}_۱>\hat{M}_۲$$
$$\Rightarrow \hat{M}_۱>\hat{M}_۲>۲\hat{M}_۲$$
$$\Rightarrow ۲\hat{M}_۲<۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{M}_۲<۹۰^\circ$$



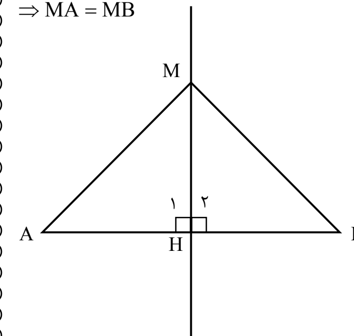
ب) میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم:

$$\left.\begin{matrix}AM=A'M\\MB=MC\\\hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{matrix}\right\}\overset{\text{ضزض}}{\Rightarrow}\Delta AMB\cong\Delta A'MC$$
$$\Rightarrow AB=A'C\ ,\ \hat{A}_۱=\hat{A}'$$
$$AB>AC\Rightarrow A'C>AC$$
$$\Delta AA'C: A'C>AC\Rightarrow \hat{A}_۲>\hat{A}'\Rightarrow \hat{A}_۲>\hat{A}_۱$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲>۲\hat{A}_۱\Rightarrow ۲\hat{A}_۱<\hat{A}\Rightarrow \hat{A}_۱<\frac{\hat{A}}{۲}$$



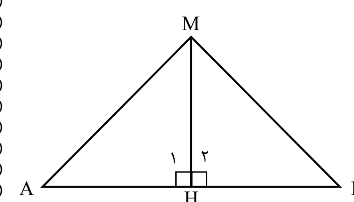
۵. اولاً ثابت می‌کنیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی با فرض این‌که مطابق شکل خط d، عمودمنصف پاره‌خط AB و M نقطه‌ای دل‌خواه روی d است، ثابت می‌کنیم: $MA=MB$. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}MH=MH\\AH=BH\\H_۱=H_۲=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\overset{\text{ضزض}}{\Rightarrow}\Delta MAH\cong\Delta MBH$$
$$\Rightarrow MA=MB$$



ثانیاً ثابت می‌کنیم اگر M از A و B به یک فاصله باشد، M روی عمودمنصف AB قرار دارد. از M به وسط AB وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}MA=MB\\HA=HB\\MH=MH\end{matrix}\right\}\overset{\text{(ضضض)}}{\Rightarrow}\Delta MAH\cong\Delta MBH$$
$$\Rightarrow \hat{H}_۱=\hat{H}_۲\ ,\ \hat{H}_۱+\hat{H}_۲=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\Rightarrow MH\perp AB$$

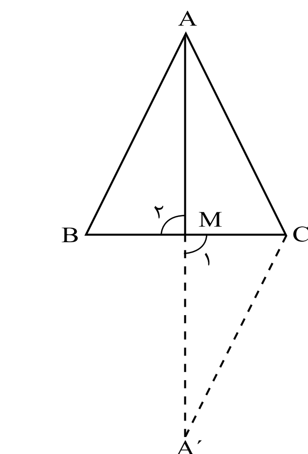


یعنی M روی عمودمنصف AB است.

۶. مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' ادامه می‌دهیم و A' را به C وصل می‌کنیم. می‌توان نوشت:

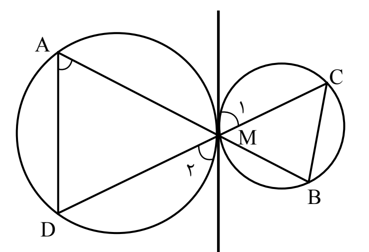
$$\left.\begin{matrix}AM=A'M\\MB=MC\\\hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{matrix}\right\}\overset{\text{(ضزض)}}{\Rightarrow}\Delta AMB\cong\Delta A'MC$$
$$\Rightarrow A'C=AB\ ,\ AA'=۲AM$$

پس مثلث ACA' با داشتن طول‌های سه ضلع آن ($AC=b$ ، $A'C=c$ و $AA'=۲m_a$) قابل رسم است و از آنجا به سادگی می‌توان مثلث ABC را رسم کرد.



طریقهٔ رسم: ابتدا پاره‌خط AA' را به طول معلوم $۲m_a$ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع b و به مرکز A' و به شعاع c، کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد دو کمان نقطهٔ C است. از C به M (وسط AA') وصل می‌کنیم و به اندازهٔ CM از طرف M امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم. A را به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.

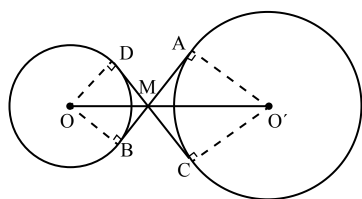
۷. مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ M رسم می‌کنیم. به کمک زوایای محاطی و ظلّی داریم:



$$\hat{M}_۱=\frac{\overset{\frown}{MC}}{۲},\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{MC}}{۲}\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{B}$$
$$\hat{M}_۲=\frac{\overset{\frown}{MD}}{۲},A=\frac{\overset{\frown}{MD}}{۲}$$
$$\Rightarrow \hat{M}_۲=\hat{A}\ ,\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲$$
$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}\Rightarrow AD\parallel BC$$

(عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب)

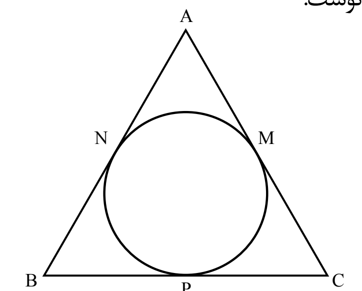
۸. مماس مشترک‌های داخلی دو دایره به مراکز O و O' مطابق شکل در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. حال اگر از M به O و O' وصل کنیم، چون شعاع بر مماس عمود است، داریم:



$$OD=OB=R\ ,\ O'A=O'C=R$$

بنابراین O از MB و MD به یک فاصله است و در نتیجه روی نیم‌ساز زاویهٔ DMB قرار دارد. به همین ترتیب، O' هم روی نیم‌ساز زاویهٔ AMC واقع است. پس OM و $O'M$ نیم‌سازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس AMC و DMB هستند و در یک راستا قرار دارند. یعنی OO' از M (نقطهٔ برخورد AB و CD) می‌گذرد.

۹. با توجه به برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره، می‌توان نوشت:



$$AM=AN,\ CM=CP,\ BN=BP$$
$$\Rightarrow AM+AN=۲P-(CM+CP+BP$$
$$+BN)=۲P-(۲CP+۲BP)$$
$$\Rightarrow ۲AM=۲P-۲(CP+BP)$$
$$\Rightarrow ۲AM=۲P-۲BC$$
$$\Rightarrow AM=P-BC=P-a$$

۱۰. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BDEC}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$
$$=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC}-\overset{\frown}{BC}}{۲}=۷۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EC}-\overset{\frown}{BC}=۱۴۰^\circ\ (I)$$
$$\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{DBCE}-\overset{\frown}{DE}}{۲}$$
$$=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{DE}}{۲}=۵۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{DE}=۱۰۰^\circ\ (II)$$

و از جمع روابط (I) و (II) خواهیم داشت:

$$۲\overset{\frown}{BD}+۲\overset{\frown}{EC}=۲۴۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CE}=۱۲۰^\circ$$
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CE}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

حل مسائل جبر و احتمال

۱.

$$n=۱\Rightarrow ۵^{۳}-۳\times۸^{۳}=۱۷q(q=-۸۳)$$
$$\text{فرض}: n=k\Rightarrow ۵^{۲k+۱}-۳\times۸^{k+۲}=۱۷q'$$
$$\text{حکم}: n=k+۱\Rightarrow ۵^{۲k+۳}-۳\times۸^{k+۳}=۱۷q''$$

طرفین فرض را در $۵^{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$۵^{۲k+۳}-۷۵\times۸^{k+۲}=۲۵\times۱۷q'$$
$$\Rightarrow ۵^{۲k+۳}-(۱۷+۸)\times۳\times۸^{k+۲}=۲۵\times۱۷q'$$
$$\Rightarrow ۵^{۲k+۳}-۳\times۸^{k+۳}=۱۷\times۸^{k+۲}\times۳$$
$$+۲۵\times۱۷q'=۱۷(\underbrace{۸^{k+۲}\times۳+۲۵q'}_{q''})$$

۲. اثبات (برهان خلف): فرض می‌کنیم $۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۷}$ عددی گویا باشد:

$$۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۷}=\frac{m}{n},\ m,n\in Z,n\neq۰$$
$$\Rightarrow ۳\sqrt{۷}=\frac{m}{n}-۲\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow (۳\sqrt{۷})^{۲}=(\frac{m}{n}-۲\sqrt{۵})^{۲}$$
$$۶۳=\frac{m^{۲}}{n^{۲}}+۲۰-\frac{۴m}{n}\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{۴m}{n}\sqrt{۵}=\frac{m^{۲}}{n^{۲}}-۴۳$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{\frac{m^{۲}-۴۳n^{۲}}{n^{۲}}}{\frac{۴m}{n}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{m^{۲}-۴۳n^{۲}}{۴mn}=\frac{m'}{n'},m',n'\in Z$$
$$\Rightarrow \sqrt{۵}\in Q\ \text{(تناقض)}$$

۳.

$$a^۵-a^۴b+b^۵-ab^۴\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۴(a-b)-b^۴(a-b)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^۴-b^۴)\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲(a+b)(a^۲+b^۲)\geq ۰$$

که با توجه به مثبت‌بودن a و b درستی نابرابری آخر واضح است.

۴.

$$m=x,\ n=x+۱$$
$$\Rightarrow m^۲+n^۲+m^۲n^۲$$
$$=x^۲+(x+۱)^۲+x^۲(x+۱)^۲$$
$$=x^۴+۲x^۳+۳x^۲+۲x+۱=(x^۲+x+۱)^۲$$

۵. با توجه به اصل ضرب، ۳×۳=۹ نوع خودرو از نظر رنگ و مدل داریم. پس لااقل به اندازهٔ $\left[\frac{۳۳-۱}{۹}\right]+۱=۴$ خودرو از یک رنگ و یک مدل داریم.

۶. اگر همهٔ اعداد یک سطر یا ستون یا قطر ۱ باشند، مجموع آن‌ها مساوی ۱۰ و اگر همه ۱- باشند، مجموع آن‌ها ۱۰- خواهد بود. پس مجموع عددهای سطرها، ستون‌ها و قطرها یکی از اعداد مجموعهٔ $\{-۱۰,-۹,...,۹,۱۰\}$ است و در نتیجه ۲۱ حالت متفاوت دارند. اما ده سطر، ده ستون و ده قطر، یعنی ۲۲ عدد در مجموع داریم. پس طبق «اصل لانهٔ کبوتر»، لااقل دوتا از این مجموع‌ها باید برابر باشند و پاسخ سؤال منفی است.

۷.

$$(A\cup B)\subseteq A\cap B'$$
$$\Rightarrow B\cap(A\cup B)\subseteq B\cap(A\cap B')$$
$$\Rightarrow B\subseteq \underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}\cap A\Rightarrow B\subseteq\varnothing$$
$$\Rightarrow B=\varnothing$$

پس $P(B)$ یک عضو دارد و $P(P(B))$ دو عضو و $P(P(P(B)))$، ۴=۲^۲ عضو دارد.

۸.

$$X\cap[(B'\cap C')\cup(B\cup C)]=A$$
$$\Rightarrow X\cap[(B\cup C)'\cup(B\cup C)]=A$$
$$\Rightarrow X\cap U=A\Rightarrow X=A$$

۹.

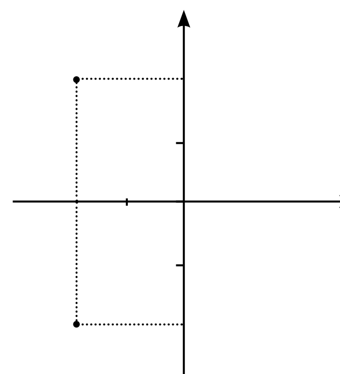
الف) $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')$
$$=(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{U}=A\cup B=B$$

ب) $B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)$
$$=(B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cup B)\cap C=C\cap(A\cup C)=C$$

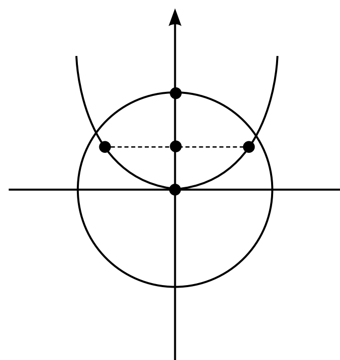
ج) $B\subseteq A\Rightarrow A\cup B=A$
$$\Rightarrow B'\cup(A\cup B)=B'\cup A$$
$$\Rightarrow \underbrace{(B'\cup B)}_{U}\cup A=B'\cup A$$
$$\Rightarrow B'\cup A=U$$

۱۰.

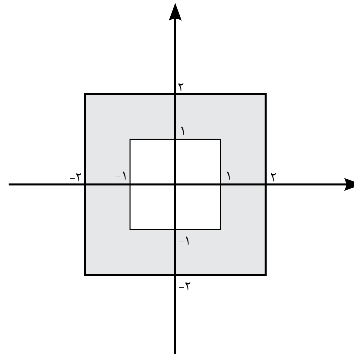
$$A: x^۲+۴=۲^۳\Rightarrow x^۲=۴, x=\pm ۲$$
$$\Rightarrow A=\{-۲,۲\}$$
$$B:\{-۲,-۱,۰\},\ C=[-۲,۲]$$
$$B\times A=\{(-۲,-۲),(-۲,۲),(-۱,-۲),(-۱,۲),(۰,-۲),(۰,۲)\}$$
$$A\times C=\{(-۲,\alpha),(۲,\beta)\mid -۲\leq\alpha,\beta\leq ۲\}$$
$$\Rightarrow (B\times A)\cap(A\times C)=\{(-۲,-۲),(-۲,۲)\}$$



۱۱. فقط پنج نقطهٔ با مختصات صحیح که در شکل نشان داده شده‌اند، نمودار رابطه با مشخص می‌کنند.



۱۲.



$$A=[-۱,۱]$$
$$B=[-۲,۲]$$

۱۳.

$$xRx: x+x-x^۲\leq ۱\Leftrightarrow x^۲-۲x+۱\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲\geq ۰$$

خاصیت بازتابی وجود دارد.

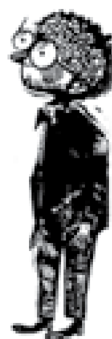
$$xRy\Leftrightarrow yRx: x+y-xy\leq ۱$$
$$\Rightarrow y+x-yx\leq ۱$$

خاصیت تقارنی وجود دارد.

$$xRy, yRz\Rightarrow xRz$$
$$\begin{cases}x+y-xy\leq ۱\\ y+z-yz\leq ۱\end{cases}\Rightarrow x+z-xz\leq ۱$$
$$\begin{cases}x(۱-y)+y-۱\leq ۰\\ y(۱-z)+z-۱\leq ۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(۱-y)(x-۱)\leq ۰\\ (۱-z)(y-۱)\leq ۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(y-۱)(x-۱)\geq ۰\\ (y-۱)(z-۱)\geq ۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow (y-۱)^۲(x-۱)(z-۱)\geq ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)(z-۱)\geq ۰\Rightarrow xz-x-z+۱\geq ۰$$
$$\Rightarrow x+z-xz\leq ۱\Rightarrow$$

خاصیت تعدّی وجود دارد

$\Rightarrow$ R هم ارزی است.



حل مسائل حسابان

۱.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$$
$$\Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(-۶+(n-۱)۶)=۳n(n-۲)$$
$$۲۴۰<۳n^۲-۶n<۱۰۸۰$$
$$\Rightarrow ۸۰<n^۲-۲n<۳۶۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}n^۲-۲n-۸۰>۰\\ n^۲-۲n-۳۶۰<۰\end{cases}$$
$$\begin{cases}(n-۱۰)(n+۸)>۰\Rightarrow n>۱۰\ \text{یا}\ n<-۸\\ (n+۱۸)(n-۲۰)<۰\Rightarrow -۱۸<n<۲۰\end{cases}$$
$$\Rightarrow ۱۰<n<۲۰\Rightarrow n=۱۱\ \text{یا}\ ۱۲\ \text{یا} ...\ \text{یا}\ ۱۹$$

۲.

$$(x-۲)(x+۲)(x^۲+۴)=۰$$
$$x^۴-۱۶=۰\Rightarrow x^۴=۱۶$$
$$R(x)=x(۱۶)^۲+۳(۱۶)^۲+x(۱۶)+x+۱$$
$$=۲۷۳x+۷۶۹\Rightarrow a=۲۷۳, b=۷۶۹$$
$$a+b=۱۰۴۲$$

۳.

$$T_{k+۱}=\binom{۹}{k}(x^{\frac{۱}{۲}})^{۹-k}(\frac{۱}{۲}x^{-۱})^k$$
$$\Rightarrow\frac{۹-k}{۲}-k=۰\Rightarrow k=۳$$

جملهٔ مستقل از x: $\binom{۹}{k}\times(\frac{۱}{۲})^۳$

جملهٔ دوم مستقل از x است.

بسط دارای ۱۰ جمله و مجموع ضرایب به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید؛ یعنی: $(\frac{۳}{۲})^۹$.

۴. راه‌اول: چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند. بنابراین: $\beta^۲+۳\beta+۱=۰$ و با ضرب در β نتیجه می‌شود:

$$\beta^۳+۳\beta^۲+\beta=۰\Rightarrow\beta^۳+۳\beta^۲=-\beta$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{\beta^۳+۳\beta^۲}=\frac{۱}{-\beta},\ \frac{۱}{\alpha^۳+۳\alpha^۲}=-\frac{۱}{\alpha}$$

$$S_{\text{جدید}}=x'_۱+x'_۲=-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})=-\frac{S}{P}=\frac{۳}{۱}=۳$$
$$P_{\text{جدید}}=x'_۱x'_۲=\frac{-۱}{\alpha}.\frac{-۱}{\beta}=+\frac{۱}{P}=\frac{۱}{۱}$$
$$\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

راه دوم: ریشه‌های معادلهٔ جدید عکس قرینهٔ معادله قبل است. یعنی جای a و c عوض و ضریب x قرینه می‌شود: $x^۲-۳x+۱=۰$.

۵. اگر نسبت دو آلیاژ جدید $\frac{x}{y}$ باشد، از فلز اول $\frac{x}{۳}+\frac{۲}{۵}y$ و از فلز دوم $\frac{۲x}{۳}+\frac{۳y}{۵}$ در آن موجود است. لذا:

$$\frac{\frac{x}{۳}+\frac{۲y}{۵}}{۱۷}=\frac{\frac{۲x}{۳}+\frac{۳}{۵}y}{۲۷}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۹}{۳۵}$$

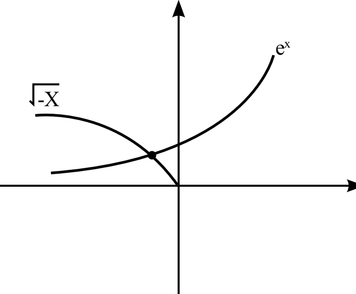
یعنی از آلیاژ اول ۹ و از آلیاژ دوم ۳۵ قسمت موجود باشد.

۶.

الف) $x^۲+۲x=a\Rightarrow\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+۱}=\frac{۱}{۱۲}$
$$\Rightarrow ۱۲a+۱۲-۱۲a=a^۲+a$$
$$a^۲+a-۱۲=۰\quad (a-۳)(a+۴)=۰$$
$$\begin{cases}a=۳\Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰\begin{cases}x=۱\\ x=-۳\end{cases}\\ a=-۴\Rightarrow x^۲+۲x+۴=۰\Rightarrow\Delta<۰\ \text{فاقد ریشه}\end{cases}$$

ب) طرف راست کمتر از ۴ و طرف چپ بیشتر یا مساوی ۴ $\Leftarrow$ معادله ریشه ندارد

۷.



$$\sqrt{-x}e^{-x}=۱\Rightarrow\sqrt{-x}=\frac{۱}{e^{-x}}\Rightarrow\sqrt{-x}=e^x$$

یک ریشهٔ منفی دارد.

۸.

$|y-۲|+|y+۱|\geq ۳\Rightarrow$ تمام نقاط دارای این خاصیت‌اند!

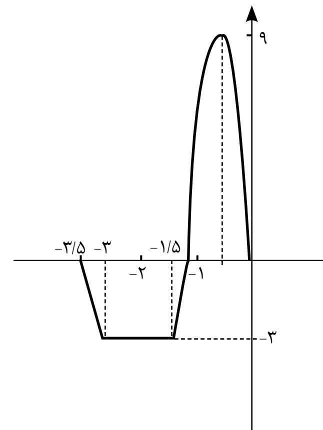
زیرا با توجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$|y-۲|+|y+۱|$$
$$=|۲-y|+|y+۱|\geq|\underbrace{۲-y+y+۱}_{۳}|$$
$$\Rightarrow|y-۲|+|y+۱|\geq ۳$$

۹.

$$f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}\Rightarrow ۴x-x^۲\geq ۰$$
$$\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\Rightarrow D_f=[۰,۴], y\geq x$$
$$y-x=\sqrt{۴x-x^۲}$$
$$\Rightarrow y^۲+x^۲-۲xy+x^۲-۴x=۰$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-(۲y+۴)x+y^۲=۰$$
$$\Delta\geq ۰\Rightarrow ۴y^۲+۱۶+۱۶y-۸y^۲\geq ۰$$
$$-۴y^۲+۱۶y+۱۶\geq ۰\Rightarrow y^۲-۴y-۴\leq ۰$$
$$y_{۱,۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۱۶}}{۲}=۲\pm ۲\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow[y\geq x\ \text{شرط اولیه}]{\text{با توجه به}} ۰\leq y\leq ۲+۲\sqrt{۲}$$

۱۰. الف) ابتدا f(۲x) را رسم می‌کنیم. یعنی تابع f را با نسبت $\frac{۱}{۲}$ منقبض و بعد تابع را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و در انتها خروجی را (۳-) برابر می‌کنیم. حاصل چنین است:



ب) $D_f: -۶\leq x\leq ۲\Rightarrow -۶\leq ۲x+۲\leq ۲$
$$\Rightarrow -۸\leq ۲x\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۰$$
$$R_f: -۳\leq y\leq ۱\Rightarrow -۳\leq f(۲x+۲)\leq ۱$$
$$\Rightarrow -۳\leq -۳f(۲x+۲)\geq ۹$$

۱۱.

$D_g = R$
$D_f = (-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$
$gof = g(f(x)) = (\sqrt{x^۲+x})^۲ = x^۲+x$
$D_{gof} = \{x \mid x\in D_f, f(x)\in D_g\}$
$\Rightarrow (x\le ۱$ یا $x\ge ۰),\ \sqrt{x^۲+x}\in R$
$\Rightarrow D_{gof} = (-\infty,-۱]\cup[۰,+\infty)$

دقت: اگر دامنه را با تشکیل ضابطه محاسبه می‌کنیم، باید قبل از ساده‌سازی دامنه را بیابیم؛ یعنی زیر رادیکال $\sqrt{x^۲+x}$ را نامنفی قرار دهیم.

۱۲.

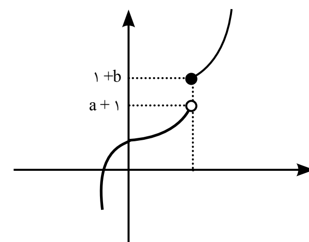
$gof(x) = x^۲+\frac{۱}{x^۲} = (x-\frac{۱}{x})^۲+۲$
$\Rightarrow g(f(x)) = f^۲(x)-۲ \Rightarrow g(x) = x^۲-۲$

۱۳.

$f: f(-x)+f(x)=۰$ فرد است
$\log(۵x+\sqrt{۱+ax^۲})+\log(-۵x+\sqrt{۱+ax^۲}) = ۰$
$\Rightarrow \log(۱+ax^۲-۲۵x^۲) = ۰$
$\Rightarrow ۱+ax^۲-۲۵x^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۲۵$
$y = |x+۲۵|+|x+b|$
$\xrightarrow{\text{زوج}} f(-۲۵) = f(۲۵)$
$\Rightarrow ۰+|b-۲۵| = ۵۰+|b+۲۵| \Rightarrow b = -۲۵$

۱۴. بدیهی است اگر $a<۰$ باشد، تابع یک‌به‌یک نخواهد بود و این با رسم شکل به خوبی مشخص می‌شود. هم‌چنین، باید $a+۱$ پایین‌تر از $b+۱$ واقع شود و یا مساوی آن باشد.

$a+۱\le b+۱ \Rightarrow ۰<a\le b$



ب) $f(x) = \begin{cases} x^۳+۱: x<۱ \Rightarrow x^۳<۱ \\ \quad \Rightarrow x^۳+۱<۲ \\ x^۲+۱: x\ge ۱ \Rightarrow x^۲\ge ۱ \\ \quad \Rightarrow x^۲+۱\ge ۲ \end{cases}$

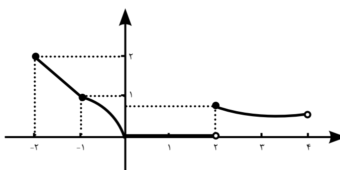
$\begin{cases} y = x^۳+۱ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱} \\ y = x^۲+۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱-y} \end{cases}$

با توجه به دامنهٔ غیرقابل قبول است.

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x-۱}: x<۲ \\ \sqrt{۱-x}: x\ge ۲ \end{cases}$

۱۵.

$-۲<x<-۱ \Rightarrow -۱<\frac{x}{۲}<-\frac{۱}{۲}$
$\Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = -۱ \Rightarrow x\left[\frac{x}{۲}\right] = -x$
$۰<x<۲ \Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$



الف)
$(-۲,۰]$ ← اکیداً نزولی
$(-۲,۲)$ ← نزولی
$[۲,۴)$ ← اکیداً نزولی
$[۰,۲)$ ← هم صعودی، هم نزولی (تابع ثابت)

ب) برد: $[۰,۲)$
ج) خیر زیرا یک به یک نیست.
د) نه زوج، نه فرد
هـ) $(۰,۴)$

۱۶.

$f(-۱۹/۸۴) = f(-۲۰+۰/۱۶) = f(۰/۱۶)$
$= \frac{۱}{\sqrt{۰/۱۶}} = \frac{۱}{۰/۴} = ۲/۵$

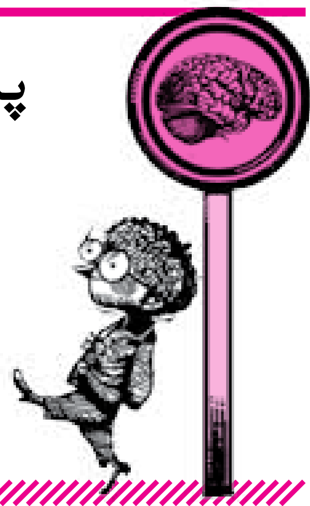
چون $T=۵$ دورهٔ تناوب است، پس هر مضربی از T در محاسبهٔ f بی‌تأثیر خواهد بود.

۱۷.

$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}_{\text{تابع فرد}}$

$\sqrt[۳]{x} = \underbrace{\frac{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{-x}}{۲}}_{\text{تابع زوج}} + \underbrace{\frac{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{-x}}{۲}}_{\text{تابع فرد}}$

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشهٔ همین شماره



- **معمای اول:** هنوز دارید فکر می‌کنید؟! این‌که کاری ندارد! وقتی ۵=۱ باشد، خُب ۱=۵ است!!
- **معمای دوم:** یک پاسخ اشتباه که خیلی‌ها می‌دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار هم‌زمان می‌شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می‌زند.

پاسخ‌های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی برهان شمارهٔ ۷۵



ایستگاه اول:
جدول مشاهیر ایرانی

پاسخ جدول **محمدبن حسن کرجی**، ریاضی‌دان بنام ایرانی بود. شرحی از زندگی او را به قلم زنده‌یاد استاد **پرویز شهریاری** در همین شماره آورده‌ایم.

ایستگاه سوم:
یک مسئله و سه جواب

گفتیم که یک فروشندهٔ ابزارهای دست دوم و کار کرده، وسیلهٔ کار کرده‌ای را به قیمت ۱۰ هزار تومان به فروشندهٔ دیگری فروخت. کمی بعد فروشندهٔ دوم چون نیازی به آن نداشت، آن را به فروشندهٔ اول به قیمت هشت هزار تومان دوباره فروخت. سپس فروشندهٔ دیگری آمد و آن را از همان فروشنده به قیمت نه هزار تومان خرید. فروشندهٔ اول چه‌قدر سود برد؟

سه پاسخ متفاوت به این سؤال را مطرح کردیم که اولی می‌گفت سه هزار تومان، دومی می‌گفت هزار تومان و سومی می‌گفت دو هزار تومان! نظرات متفاوتی را از

شما دریافت کردیم، اما شاید پاسخ دقیق چنین باشد: ما نمی‌توانیم بگوییم سود فروشندهٔ اول چه‌قدر بوده، مگر آن‌که بدانیم ابتدا برای خرید آن چه‌قدر پول داده است! سود عبارت است از اختلاف بین مقداری که از فروش یک محصول دریافت می‌شود و مقداری که بابت آن پرداخت شده است. فروشندهٔ ما ۱۱ هزار تومان به‌دست آورده است: او نخست ۱۰ هزار تومان به‌دست آورده، سپس هشت هزار تومان داده، پس دو هزار تومان می‌ماند، آنگاه نه هزار تومان دیگر گرفته که در مجموع می‌شود یازده هزار تومان. ولی معلوم نیست ابتدا برای این جنس چه‌قدر پول داده است تا بتوان سود او را از مجموع این معاملات به‌دست آورد. پس هیچ‌یک از پاسخ‌ها درست نیست!

ایستگاه چهارم:
چند معمای خواندنی

معمای اول: هفت ایستگاه!

معمای دوم: از یکی از آن‌ها می‌پرسیم: «آیا کاوه دروغ‌گوست؟»

پاسخ به این سؤال در جدول زیر و در چهار حالت تجزیه و تحلیل شده است: سؤال‌شونده ممکن است کاوه باشد و راست‌گو، یا کاوه باشد و دروغ‌گو. شهریار باشد و راست‌گو یا شهریار باشد و دروغ‌گو (توجه داشته باشید که اگر کاوه راست‌گو باشد، شهریار دروغ‌گوست و برعکس).

سؤال‌شونده	شهریار ـ دروغ‌گو	شهریار ـ راستگو	کاوه ـ دروغ‌گو	کاوه ـ راستگو
پاسخ	بله	بله	نه	نه

پس در پاسخ به این سؤال، شهریار همواره پاسخ بله و کاوه همواره پاسخ نه می‌دهد و از آنجا به راحتی می‌توان کاوه را شناسایی کرد.

معمای سوم: چون برادر دوم گفته است که من کاوه هستم و کارت سیاه به همراه دارم، پس او نمی‌توانسته راست‌گو باشد (زیرا راست‌گو کارت سیاه به همراه ندارد). یعنی او دروغ‌گوست و لذا جملهٔ او نادرست است. پس او کاوه نیست یا این‌که کارت سیاه به همراه ندارد. ولی چون او دروغ گفته است، پس کارت سیاه دارد، لذا باید کاوه نباشد، پس او شهریار است.

سخن آخر: یک پارادوکس

سؤال: آیا پاسخ این سؤال نه است؟

منظور از این سؤال، همان سؤال است! اگر بگوییم آری، پس پاسخ سؤال نه است و در نتیجه نباید بگوییم آری!! اگر هم بگوییم نه، پس یعنی باید بگوییم آری!!



مربع‌های جادویی

دنیایی از رمز و راز اعداد

صدیقه بابایی
کارشناس ارشد ریاضی محض



چکیده

در این مقاله سعی شده است به‌طور خلاصه مربع‌های جادویی تشریع شوند. ابتدا تاریخچه‌ای دربارهٔ خواستگاه مربع‌های جادویی بیان شـده است. پس از تعریف اصلی مربـع جادویی و ثابـت جادویی، به معرفـی چند مربع جادویی شناخته شـده می‌پردازیم. در میان این مربع‌ها بیشتر مطالب به مربع وفقی و ویژگی‌های آن اختصاص داده شـده اسـت. آن‌چه اهمیت دارد آن است که بتوان به‌راحتی مربع وفقی تولید کرد. در ادامه، روشی کلی برای تولیـد مربع‌های وفقی مرتبهٔ فـرد و دو روش مجزا برای سـاخت مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷ آورده شـده است. در انتها ارتباط مربع وفقی با «فنگ‌شویی»، نظم بخشیدن به همه‌چیز، به‌طور خلاصه آمده است، زیرا جنبه‌های ریاضی آن در مربع وفقی بررسی شده است.

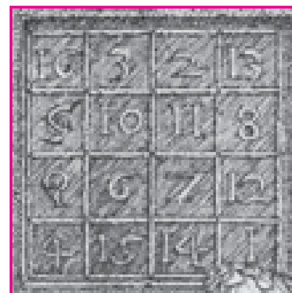
کلیدواژه‌ها: مربـع جادویی، مربع وفقی، سـودوکو، مربع لوشو، مربع لاتین، بازی ریاضی

مقدمه

بشـر از دیربـاز مجذوب نیروی شـگفت‌آور اعـداد بوده، به‌طوری که یکی از سـرگرمی‌های او بازی با اعداد بوده است. از میان اعداد، اعداد طبیعی بیشتر از سایر اعداد مورد بررسی قرار گرفته‌اند و سرگرمی‌های متفاوتی را تولید کرده‌اند. به مرور زمان اعداد از حالت بازی خارج شدند و جنبهٔ سحر و جادو به خود گرفتند. عده‌ای عوام فریب برای پیشـبرد اهداف خود از اعداد اسـتفاده می‌کردند. حتی برخی از شعرها و نویسندگان نامی جهان نیز در آثار بی‌نظیر خود از اعداد سـود جسته‌اند. از جمله **گوته**، شـاعر بزرگ آلمانی، در شاهکار فناناپذیر خود «فاوست»، صحنه‌ای را به ساختن اکسیر جوانی با فرمول مربع وفقی اختصاص داده اسـت. قدر مسـلم او با مربع‌های وفقی آشنایی داشت، زیرا بارها از تابلوی «افسردگی» نقاش بزرگ آلمانی، **آلبرشـت دیورر**[1]، سخن گفته و به نکات علمی آن اشـاره کرده است.

با گذشت زمان و با پیشرفت‌هایی که در علم ریاضی صـورت گرفت، این بازی‌ها شـکلی کاملاً علمی به خود گرفتند و حتی در برخـی موارد به عنوان یک رشـتهٔ مجزا به آن پرداخته می‌شـود. در این زمینه می‌توان به مربع‌های لاتین اشاره کرد که با استفاده از مبحث ترکیبیات، می‌توان مطلبی را به صورت رمز درآورد.

در میـان انواع بازی‌ها با اعداد، مربع‌های جادویی همواره مقـام بالاتری داشـته‌اند. از آغـاز پیدایش هندسـه و جبر، ویژگی‌های ریاضی مربع‌های جادویی مورد توجه ریاضی‌دانان بوده اسـت. مربع‌های جادویی مربع‌هایی هستند که از اعداد طبیعی پر می‌شوند و هر یک ویژگی خاص خود را دارند که در این مقاله به معرفی تعدادی از آن‌ها را معرفی می‌کنیم. طبق اسناد و مدارک موجود، می‌باید کشور چین را زادگاه مربع‌های جادویی جهان دانسـت. زیـرا قدیمی‌ترین منبعی که از آن‌ها نام برده، کتابی اسـت چینی که حدود پنج هزار سال پیش از میلاد مسیح نوشته شده است. مربعی که در این کتاب مطرح شـده، مربعی ۹ خانه‌ای اسـت که در آن اعداد فرد به صورت دایره‌های سفید و اعداد زوج به صورت دایره‌های مشکی ترسیم شده‌اند. با جای‌گذاری اعداد زوج و فرد به جای رنگ‌های مورد نظر، خواص جالبی در مربع دیده می‌شود. اما قدیمی‌ترین مربع جادوی اروپا در تابلوی افسـردگی دیورر نقش بسته است که سال ترسیم آن ۱۵۱۴ میلادی است.



شکل ۱. مربع جادویی آلبرشت دیورر

مربـع جادویی آلبرشـت دیورر، حکاکی شـده در «ملن کولیا۱»[2] به نظر اولین مربع جادویی در اروپاسـت که بسـیار شـبیه مربع جادویی **یانگ هوی**[3] اسـت که ۲۵ سال قبل از دیورر در چین ساخته شده است. عدد جادویی این مربع برابر ۳۴ است. به این معنا حاصل جمع کلیه اعداد واقع بر سطرها و ستون‌ها و قطرها و همچنین مربع چهارتایی وسط و مربع‌های چهارتایی چهارگوشه همگی برابر ۳۴ هستند.

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

شکل ۲. مربع جادویی آلبرشت دیورر

از نکات قابل توجه این مربع دو عدد وسطی در سطر است که تاریخ کنده‌کاری را نشان می‌دهد و برابر ۱۵۱۴ است.

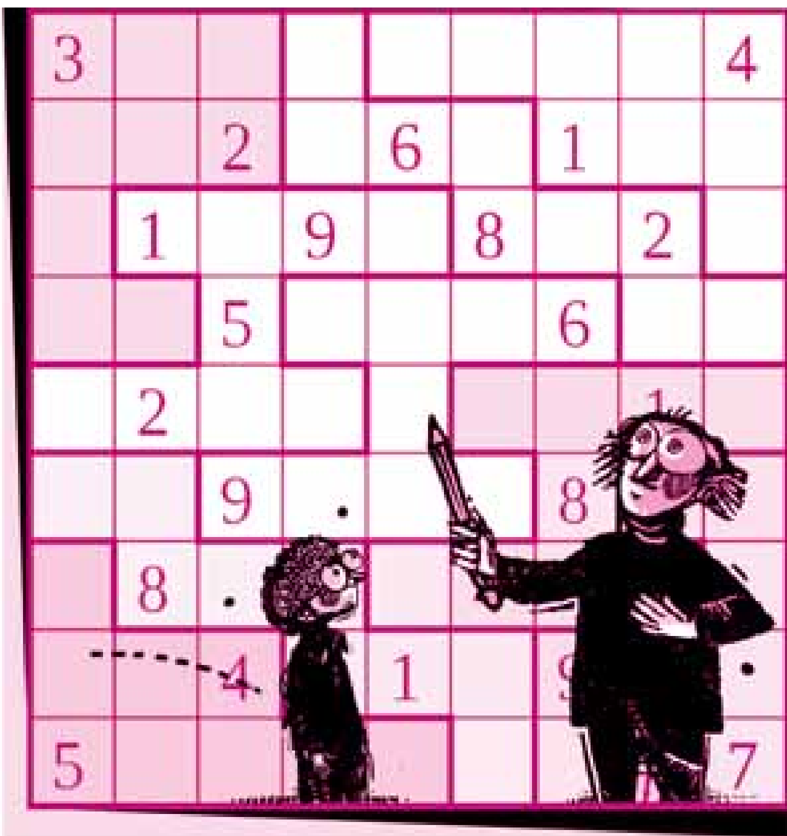
■ مربع جادویی چیست؟

مربع جادویی مرتبهٔ n، جدولی n×n است که خانه‌های آن را بـا اعداد (معمولاً ۱ تا n^2) پر می‌کنند؛ به‌صورتی که ویژگی خاصی داشته باشد. برای مثال، مجموع همهٔ سطرها یا ستون‌ها با هم برابر باشـند یا در هر سطر یا هر ستون از هر عدد به‌کار رفته، تنها یکی وجود داشـته باشد یا اعدادی که در کنار هم نوشته می‌شوند، برهم بخش‌پذیر نباشند و...

مربع‌های جادویی طی قرن‌ها برای انسان جذاب بوده‌اند و بیش از ۴۰۰۰ سال است که در فرهنگ‌های مختلف از جمله هند، اروپا و... دیده شده‌اند. این مربع بیشتر به صورت حکاکی شده روی سنگ یا فلز بوده‌اند و اکثر دانشمندان دوران باستان خصلت‌های سحرآمیزی را به آن‌ها نسبت می‌دادند.

■ تاریخچهٔ مربع‌های جادویی

مربع‌های جادویی پایه‌های نجومی و پیشگویی داشته‌اند و از آن‌هـا برای اندازه‌گیری طول عمر یا جلوگیری از بیماری استفاده می‌کردند. مثلاً یک مورد از آن‌ها در هندوستان، مربعی



۳×۳ به نام «کوبراکولام»[4] است که آن را روی زمین به شکل ۳ می‌کشند و عدد جادویی آن ۷۲ است.

۲۳	۲۸	۲۱
۲۲	۲۴	۲۶
۲۷	۲۰	۲۵

شکل ۳. مربع جادویی کوبراکولام

یکی از ویژگی‌های این مربع جادویی آن اسـت که همان مربع جادویی درجهٔ ۳ شکل با عدد جادویی ۱۵ است که به هر یک از خانه‌های آن ۱۹ واحد اضافه شده است.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۴. مربع جادویی با عدد جادویی ۱۵

یک مربع جادویی بسیار شناخته شدهٔ دیگر در هندوستان در معبـد «پارش راناس جین»[5] وجـود دارد. عدد جادویی آن

برابر ۳۴ است و در قرن ۱۰ میلادی بر دیوار معبد حکاکی شده است.

۷	۱۲	۱	۱۴
۲	۱۳	۸	۱۱
۱۶	۳	۱۰	۵
۹	۶	۱۵	۴

شکل ۵. مربع جادویی معبد پارش راناس جین

مربع‌های جادویی توسط اعراب به مغرب زمین انتقال یافتند. طی دوران رنسانس ـ دوران تحقیق وسیع ـ ریاضی‌دانی به نام **کارنلینوس آگریپا** روی مربعات جادویی که رتبه‌های آن‌ها بالاتر از ۲ بود، تحقیق کرد. مربع با رتبهٔ ۱ بی‌معناست و می‌توان ثابت کرد که مربع جادویی با مرتبهٔ ۲ وجود ندارد. آگریپا آن دسته از مربعات جادویی را تشکیل داد که رتبه‌های آن‌ها از ۳ تا ۹ بود و به آن‌ها مفهوم نجومی داد. آن‌ها را نمادی برای هفت جرم آسمانی (زحل، مشتری، مریخ، خورشید، زهره، عطارد و ماه) که تا آن زمان شناخته شده بودند، در نظر گرفت. اشکال مربعات روی چوب و موارد دیگر حک شدند و در خدمت سحر و جادو قرار گرفتند. حتی امروزه نیز در بخشی از مشرق زمین به‌خاطر این مقاصد از مربع‌های جادویی استفاده می‌شود. در قرن‌های ۱۶ و ۱۷ مردم بر این باور بودند که اگر مربع جادویی بر لوح نقره‌ای حک شود، آن‌ها را از آفت و بلا محفوظ می‌دارد.

ریاضی‌دانان ایرانی نیز با مربع‌های جادویی در ابتدای قرن ۱۷ آشنا شدند؛ یعنی زمانی که مسلمانان با فرهنگ هندی و آسیای جنوبی آشنا شدند و ریاضیات هندی و بعضی چیزهای دیگر ترکیبیات و بخشی از نجوم را آموختند. البته این نظریه هم وجود دارد که آن‌ها با مربع‌های جادویی از طریق چین آشنا شدند. اولین مربع جادویی از درجه‌های ۵ و ۶ در یک دایره‌المعارف بغدادی در حدود سال ۹۸۳ میلادی توسط **رسائل اینکوان الصفا**[۶] آمده است و مربع‌های جادویی ساده‌تر قبل از آن توسط سایر ریاضی‌دانان ایرانی شناخته شده بودند. **امام محمد غزالی**، فیلسوف و دانشمند بزرگ ایرانی نیز در این باب رساله‌ای به زبان فارسی دارد.

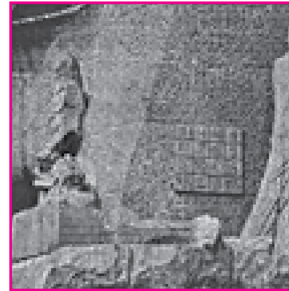
از دیگر مربع‌های جادویی شناخته شده می‌توان به مربع **جوزف سابیراچز** اشاره کرد که مربعی از مرتبهٔ ۴ است، و در کلیسای «ساگرادا فامیلیا»[۷] کنده‌کاری شده و عدد جادویی آن ۳۳ است. در حقیقت بسیار شبیه مربع جادویی دیورر است، اما مقدار ۵ تا از خانه‌ها را یکی کاهش داده است.

۱	۱۴	۱۴	۴
۱۱	۷	۶	۹
۸	۱۰	۱۰	۵
۱۳	۲	۳	۱۵

شکل ۶. مربع سابیراچز

۱	۱۴	۱۵	۴
۱۲	۷	۶	۹
۸	۱۱	۱۰	۶
۱۳	۲	۳	۱۶

شکل ۷. مربع دیورر



شکل ۸. مربع جادویی سابیراچز در کلیسای فامیلیا

در ادامه به معرفی چند مربع جادویی شناخته شده می‌پردازیم.

■ سودوکو

جدول اعدادی است که امروزه یکی از سرگرمی‌های رایج در کشورهای مختلف جهان به‌شمار می‌آید. سودوکو، مخفف عبارت ژاپنی «**سوجی وادوکوشین نی گ اگیرو**» است به معنی «ارقام باید تنها باشند». یک سودوکوی مرتبهٔ n مربعی n×n است که با اعداد ۱ تا n به گونه‌ای پر می‌شود که در هر سطر و هر ستون آن از اعداد ۱ تا n فقط یک بار استفاده می‌شود. در شکل‌های ۹ و ۱۰ دو سودوکوی ۳ در ۳ و ۴ در ۴ نمایش داده شده‌اند.

۱	۳	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۳	۱	۴	۲
۴	۲	۱	۳

شکل ۹. سودوکوی مرتبهٔ ۴

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

شکل ۱۰. سودوکوی مرتبهٔ ۳

هر چند این بازی برای اولین بار در یک مجلهٔ پازل آمریکایی در سال ۱۹۷۹ انتشار یافت، ولی انتشار آن به‌طور مستمر و پی‌گیر برای نخستین مرتبه به ژاپن در ۱۹۸۶ برمی‌گردد. از سال ۲۰۰۵ این سرگرمی به محبوبیت جهانی دست یافت و نخستین مسابقهٔ ملی آن در سال ۲۰۰۸ در فیلادلفیای آمریکا برگزار شد. در ایران برای اولین بار «روزنامهٔ همشهری» در سال ۱۳۸۵ به چاپ سودوکو به صورت روزانه دست زد.

از این مربع جادویی در بسیاری از مجلات سرگرمی و هوش استفاده می‌شود. نوع متداول سودوکو یک جدول ۹ در ۹ است که کل جدول هم به ۹ جدول کوچک‌تر ۳ در ۳ تقسیم شده است. در این جدول چند عدد به‌طور پیش فرض قرار داده شده‌اند که باید باقی اعداد را با رعایت سه قانون زیر یافت:

۵	۳			۷				
۶			۱	۹	۵			
	۹	۸					۶	
۸				۶				۳
۴			۸		۳			۱
۷				۲				۶
	۶					۲	۸	
			۴	۱	۹			۵
				۸			۷	۹

↓ **پس از حل**

۵	۳	۴	۶	۷	۸	۹	۱	۲
۶	۷	۲	۱	۹	۵	۳	۴	۸
۱	۹	۸	۳	۴	۲	۵	۶	۷
۸	۲	۶	۷	۵	۱	۴	۹	۳
۴	۵	۹	۸	۶	۳	۷	۲	۱
۷	۱	۳	۹	۲	۴	۸	۵	۶
۹	۶	۱	۵	۳	۷	۲	۸	۴
۲	۸	۷	۴	۱	۹	۶	۳	۵
۳	۴	۵	۲	۸	۶	۱	۷	۹

شکل ۱۱. سودوکوی ۹ در ۹ و حل آن

■ مربع وفقی

مربع وفقی مرتبهٔ n جدولی n×n است که خانه‌های آن با اعداد ۱ تا n^2 به ترتیبی پر می‌شوند که مجموع اعداد هر ردیف افقی و یا هر ستون عمودی و یا هر قطر آن، عددی ثابت شوند.

۴	۱۵	۶	۹
۵	۱۰	۳	۱۶
۱۱	۸	۳	۲
۱۴	۱	۱۲	۷

شکل ۱۲. مربع وفقی مرتبهٔ ۴

۱۵ ↑	۱۵ ↑	۱۵ ↑	
۲	۷	۶	→ ۱۵
۹	۵	۱	→ ۱۵
۴	۳	۸	→ ۱۵
↙ ۱۵		↘ ۱۵	

شکل ۱۳. مربع وفقی مرتبهٔ ۳

عدد ثابت که به آن «ثابت جادویی» می‌گویند، از فرمول $\frac{n(n^2+1)}{2}$ به دست می‌آید. برای مثال، ثابت جادویی برای مربع‌های مرتبهٔ ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر است با ۱۵، ۳۴، ۶۵ و ۱۱۱.

■ مربع وفقی مرتبهٔ ۳

یک نکتهٔ جالب در مربع وفقی مرتبهٔ ۳ وجود دارد: عددی که در مربع وسط جدول ۳ در ۳ قرار دارد، عدد ۵ است. می‌دانیم که ثابت جادویی در مربع وفقی مرتبهٔ ۳ عدد ۱۵ است. اعداد موجود در دو قطر اصلی و فرعی و سطرهای اول و سوم یک مربع وفقی ۳ در ۳ را با حروف، مانند جدول شکل ۱۴ مشخص می‌کنیم.

a	b	c
	d	
e	f	g

شکل ۱۴

واضح است که: $\begin{cases} a+d+g=15 \\ c+d+e=15 \\ b+d+f=15 \end{cases}$ از جمله این سه رابطه خواهیم داشت: $a+b+c+3d+e+f+g=45$. از طرف دیگر داریم: $a+b+c=e+f+g=15$. بنابراین: $3d=15$ و لذا $d=5$.

نکتهٔ جالب دیگر در مورد مربع وفقی مرتبهٔ ۳ آن است که a، c، e و g زوج‌اند. اگر a عددی فرد باشد، چون داریم: $a+d+g=15$، لذا: $a+g=10$ یا $g=10-a$. بنابراین g نیز عددی فرد است. بین اعداد ۱ تا ۹ بجز ۵ که وسط جدول قرار دارد، چهار عدد فرد ۱، ۷، ۳ و ۹ وجود دارند. لذا مکان‌های g و a یا با ۱ و ۹ پر می‌شوند یا با اعداد ۳ و ۷. فرض کنیم g و a با ۳ و ۷ پر شوند. بدون آن‌که به روند اثبات خللی وارد شود، فرض کنیم $g=7$ و $a=3$ باشند. بنابراین شکل ۱۵ را خواهیم داشت.

۳		
	۵	
		۷

شکل ۱۵

اعداد ۱ و ۹ باید در ۶ مربع باقی‌مانده قرار گیرند. در سطر و ستونی که عدد ۳ قرار دارد، نمی‌توانیم از عدد ۹ استفاده کنیم؛ زیرا: ۱۲=۹+۳. در نتیجه برای تولید عدد ۱۵ باید از عدد ۳ دوبار استفاده کنیم که این با طریقهٔ ترسیم مربع وفقی تناقض

دارد. بنابرایـــن عدد ۹ در یکی از دو مربع رنگی باید قرار گیرد. در این صورت در سطر یا ستونی که ۷ روی آن قرار دارد، عدد ۹ نیز قرار می‌گیرد که جمع این دو عدد ۱۶ خواهد شـــد که با ثابت جادویی تناقض پیدا می‌کنـــد. پس g و a اعداد ۳ و ۷ نیستند. حال فرض کنیم g و a اعداد ۹ و ۱ باشند. باز هم بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض می‌کنیم: $g = ۹$ و $a = ۱$. مانند حالت قبل ۳ نمی‌تواند در سطر و ستونی که عدد ۹ جزئی از آن اســـت، قرار بگیرد. پس ۳ در دو مربع رنگی که در شکل ۱۶ مشخص شده‌اند، قرار خواهد گرفت.

		۱
	۵	
۹		

شکل ۱۶

در این صورت اگر در سطر یا ستونی که یکی از سلول‌هایش رنگ شده، عدد ۳ را قرار دهیم، برای تولید عدد ۱۵ عدد سوم باید ۷ باشد. بنابراین ۷ درسطر یا ستونی قرار خواهد گرفت که ۹ یکی از عناصر آن اســـت که حاصل این دو عدد ۱۶ خواهد بود که باز تناقض ایجاد می‌شود. از این بحث نتیجه می‌شود که اعداد g و a فرد نیستند، پس زوج‌اند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که c و e نیز زوج‌اند.

بـــا اثبات این نکتهٔ ظریف می‌تـــوان همهٔ مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۳ را نوشت. هشت مربع وفقی مرتبهٔ ۳ وجود دارند که

۴	۳	۸
۹	۵	۱
۲	۷	۶

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۹	۴

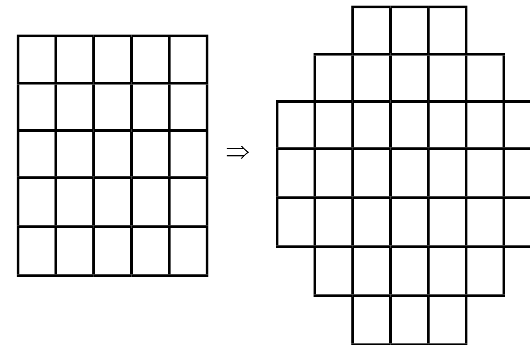
۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

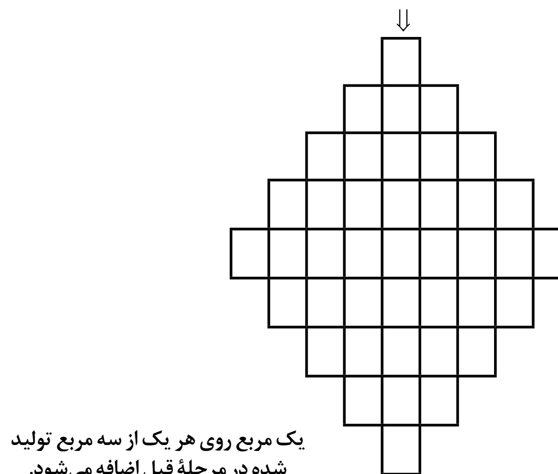
شکل ۱۷. مربع وفقی مرتبهٔ ۳



■ روشی کلی برای ساختن مربع‌های وفقی درجهٔ فرد

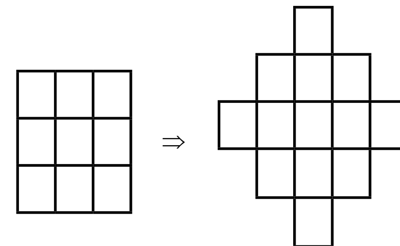
فرض کنیم n عددی فرد باشد. ابتدا یک جدول n×n رسم می‌کنیم. سپس روی ضلع مربع و از مربع میانی هر ضلع شروع می‌کنیم و به اندازهٔ $n - ۲$، مربع جدید روی مربع‌های هر ضلع، مربع اضافه می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا آخرین ضلع فقط یک مربع تولید کند. برای آن‌که بهتر متوجه شوید، فرض کنیم: $n = ۵$. مراحل زیر طریقهٔ ســـاخت شـــکل مورد نظر را نشان می‌دهد.





شکل ۱۸. روش ساختن مربع وفقی ۵×۵

یا برای $n = ۳$،



شکل ۱۹. روش ساختن مربع وفقی ۳×۳

برای $n = ۳$ می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. اعداد ۱ تا ۹ را از سمت راست به چپ، یک در میان در قطر اصلی و قطرهای موازی با قطر اصلی مربع‌ها به صورتی که در شکل نشان داده شده است، می‌نویسیم.

		۱		
	۴		۲	
۷		۵		۳
	۸		۶	
		۹		

شکل ۲۰

سپس اعدادی را که در خارج مربع n×n اصلی قرار دارند، روی سطر یا ستونی که قرار گرفته‌اند به تعداد مرتبهٔ مربع وفقی (در این مثال ۳) با ســـه انتقال زیر مانند شـــکل ۲۱، به داخل مربع n×n انتقال می‌دهیم.

۱. انتقال سطری به اندازهٔ n خانه به چپ یا راست.
۲. انتقال ستونی به اندازهٔ n خانه به بالا یا پایین.
۳. ترکیب انتقال ۱ با ۲ در صورتی که عددی با انتقال‌های ۱ یا ۲ به تنهایی وارد مربع نشود.

		۱		
	۴		۲	
۷		۵		۳
	۸		۶	
		۹		

⇒

		۱		
	۴	۹	۲	
۷	۳	۵	۷	۳
	۸	۱	۶	
		۹		

شکل ۲۱

در پایان مربع‌های اضافی را پاک می‌کنیم. به عنوان مثالی دیگر، برای -- مربع وفقی را به روش فوق رسم می‌کنیم.

				۱				
			۶		۲			
		۱۱		۷		۳		
	۱۶		۱۲	۲۵	۸		۴	
۲۱		۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹		۵
	۲۲		۱۸	۱	۱۴		۱۰	
		۲۳		۱۹		۱۵		
			۲۴		۲۰			
				۲۵				

⇓

				۱				
			۶		۲			
		۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳		
	۱۶	۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶	۴	
۲۱		۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹		۵
	۲۲	۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲	۱۰	
		۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵		
			۲۴		۲۰			
				۲۵				

شکل ۲۱

عدد جادویی مربع وفقی مرتبهٔ ۵ عدد ۶۵ است که در مربع بالا می‌توان به راحتی آن را بررسی کرد.

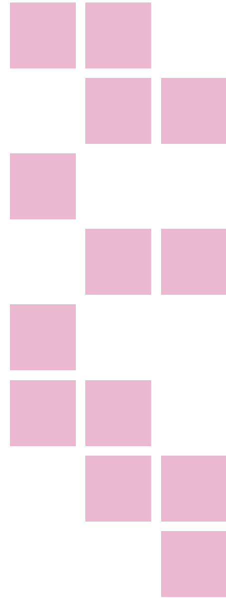
ملاحظه می‌شود که در مرکز این مربع عدد ۱۳ قرار دارد. اکنون این ســـؤال مطرح می‌شـــود که: آیا در مربع‌های وفقی مرتبـــهٔ ۵ مانند مربع‌های وفقی مرتبـــهٔ ۳، عدد مرکزی ثابت اســـت؟ با روش حرکت اسب شطرنج به راحتی به مربع وفقی شکل ۲۲ می‌رسیم که عدد مرکزی آن ۱۳ نیست.

۱۱	۳	۲۰	۷	۲۴
۱۷	۹	۲۱	۱۳	۵
۲۳	۱۵	۲	۱۹	۶
۴	۱۶	۸	۲۵	۱۲
۱۰	۲۲	۱۴	۱	۱۸

شکل ۲۲

■ روش هندی رسم مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷

علاوه بر روشی کلی که برای ترسیم مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد ذکر شد، از دو روش دیگر نیز می‌توان برای تولید مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷ اســـتفاده کرد. در ایـــن روش، اعداد ۱ تا ۴۹ را به هفت دستهٔ هفت‌تایی تقسیم می‌کنیم. اولین عدد از اولین دســـته (عدد ۱) را زیر خانهٔ مرکزی مربع، یعنی سطر پنجم و ســـتون چارم، قرار می‌دهیم. اعداد هم دستهٔ آن به ترتیب در خانه‌های موازی با قطر اصلی مربع جای می‌گیرند. اعدادی که بیرون مربع واقع می‌شوند، با انتقال‌های سه‌گانه‌ای که در بالا شـــرح دادیم، درون مربع جای می‌گیرند. قطر اصلی را با رنگ قرمز و قطر فرعی را با رنگ سبز نشان داده‌ایم.



						۴
۵						
	۶					
		۷				
			۱			
				۲		
					۳	

شکل ۲۳

پس از اتمام اعداد یک دســته، اولین عدد دستهٔ بعد را دو خانه پایین‌تر از آخرین عدد نوشــته شده، قرار می‌دهیم. این خانه به موازات قطر فرعی درست در گوشهٔ پایین سمت چپ اولین عدد دستهٔ قبل قرار دارد. اعداد بعدی دسته نیز همانند دستهٔ قبل جای می‌گیرند.

				۱۰		
۵						
	۶					۱۲
۱۳		۷				
	۱۴		۱			
		۸		۲		
			۹		۳	

شکل ۲۴

با ادامهٔ این روند، مربع کامل می‌شود.

۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۴۳	۳۷
۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۲۶	۲۰
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲	۴۵
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳۴	۲۸

شکل ۲۵

روش سیامی رسم مربع‌های وفقی مرتبهٔ ۷

در این روش که به روش سیامی مشهور است، ابتدا اعداد را در دسته‌های ۷تایی دسته‌بندی می‌کنیم. عدد ۱ را در مرکز ردیف اول (سطر اول و ستون چهارم) قرار می‌دهیم. اعداد هم دستهٔ ۱ به ترتیب به موازات قطر فرعی مربع جای می‌گیرند. اگر عددی خارج از مربع قرار گیرد، با انتقال‌های ســه‌گانه که در مربعات مرتبهٔ ۵ توضیح داده شــد، وارد مربع می‌شود. پس از اتمام اعداد یک دســته، اولین عدد دستهٔ بعدی درست زیر آخرین عدد نوشته شده قرار می‌گیرد. با ادامهٔ این روند می‌توان مربع را کامل کرد.

۳۰	۳۹	۴۸	۱	۱۰	۱۹	۲۸
۳۸	۴۷	۷	۹	۱۸	۲۷	۲۹
۴۶	۶	۸	۱۷	۲۶	۳۵	۳۷
۵	۱۴	۱۶	۲۵	۳۴	۳۶	۴۵
۱۳	۱۵	۲۴	۳۳	۴۲	۴۴	۴
۲۱	۲۳	۳۲	۴۱	۴۳	۳	۱۲
۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۲	۱۱	۲۰

شکل ۲۶

و این هم یک مربع وفقی مرتبهٔ ۲۵

شکل ۲۷ (صفحه مقابل)

مربع لاتین

مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس n×n با درایه‌های ۱، ۲، ۳، ... و n به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشــند. برای هر n داده شــده می‌تــوان مربع لاتین ســاخت. از مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۴ و ۵ که در زیر آمده است می‌توان به راحتی ایدهٔ کلی ساخت مربع لاتین را فراگرفت.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

شکل ۲۸. مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۴ و ۵

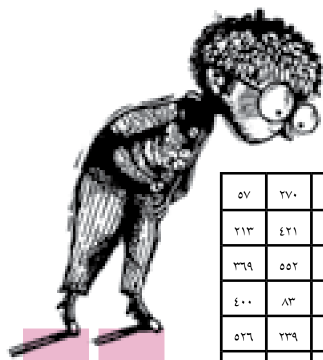
از ویژگی‌های این مربع می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

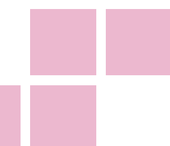
✓ ماتریسی متقارن است.

✓ همهٔ عناصر قطر فرعی برابر n است.

✓ همهٔ عناصر قطرهای موازی با قطر فرعی نیز یکسان هستند و از ۱ شروع و به $n-1$ ختم می‌شوند.

✓ اگر n زوج باشــد، در قطر اصلی فقط اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ... و $n-1$ وجود دارند. برای $n \geq ۶$ این اعداد تکرار می‌شوند.





٥٧	٢٧٠	٥٧٨	١٦١	٤٩٩	٤٠٥	١١٣	٣٢١	٥٠٩	٢١٧	١٤٨	٤٥٦	٤٤	٣٥٢	٥٦٥	٦١٦	١٧٩	٣٨٧	١٠٠	٢٨٣	٣٣٩	٥٤٧	٢٣٥	٤٤٣	١
٢١٣	٤٢١	١٠٩	٣١٧	٥٠٥	٥٥٦	١٤٤	٤٥٢	٤٠	٣٧٣	٢٧٩	٦١٢	٢٠٠	٣٨٣	٩١	٢٢	٣٣٥	٥٤٣	٢٢٦	٤٣٩	٤٩٥	٥٣	٢٦١	٥٩٩	١٥٧
٣٦٩	٥٥٢	١٤٠	٤٧٣	٣١	٨٧	٣٠٠	٦٠٨	١٩١	٣٧٩	٤٣٥	١٨	٣٢٦	٥٣٩	٢٤٧	١٥٣	٤٨٦	٧٤	٢٥٧	٥٩٥	٥٢١	٢٠٩	٤١٧	١٠٥	٣١٣
٤٠٠	٨٣	٢٩١	٦٠٤	١٨٧	٢٤٣	٤٢٦	١٤	٣٤٧	٥٣٥	٥٨٦	١٧٤	٤٨٢	٧٠	٢٥٣	٣٠٩	٥١٧	٢٠٥	٤١٣	١٢١	٢٧	٣٦٥	٥٧٣	١٣١	٤٦٩
٥٢٦	٢٣٩	٤٤٧	١٠	٣٤٣	٢٧٤	٥٨٢	١٧٠	٤٧٨	٦١	١١٧	٣٠٥	٥١٣	٢٢١	٤٠٩	٤٦٥	٤٨	٣٥٦	٥٦٩	١٢٧	١٨٣	٣٩١	٧٩	٢٨٧	٦٢٥
٥١٨	٢٠١	٤١٤	١٢٢	٣١٠	٣٦١	٥٧٤	١٣٢	٤٧٠	٢٨	٨٤	٢٩٢	٦٠٥	١٨٨	٣٩٦	٤٢٧	١٥	٣٤٨	٥٣١	٢٤٤	١٧٥	٤٨٣	٦٦	٢٥٤	٥٨٧
٤٩	٣٥٧	٥٧٠	١٢٨	٤٦١	٣٩٢	٨٠	٢٨٨	٦٢١	١٨٤	٢٤٠	٤٤٨	٦	٣٤٤	٥٢٧	٥٨٣	١٦٦	٤٧٩	٦٢	٢٧٥	٣٠١	٥١٤	٢٢٢	٤١٠	١١٨
١٨٠	٣٨٨	٩٦	٢٨٤	٦١٧	٥٤٨	٢٣١	٤٤٤	٢	٣٤٠	٢٦٦	٥٧٩	١٦٢	٥٠٠	٥٨	١١٤	٣٢٢	٥١٠	٢١٨	٤٠١	٤٥٧	٤٥	٣٥٣	٥٦١	١٤٩
٣٣١	٥٤٤	٢٢٧	٤٤٠	٢٣	٥٤	٢٦٢	٦٠٠	١٥٨	٤٩١	٤٢٢	١١٠	٣١٨	٥٠١	٢١٤	١٤٥	٤٥٣	٣٦	٣٧٤	٥٥٧	٦١٣	١٩٦	٣٨٤	٩٢	٢٨٠
٤٨٧	٧٥	٢٥٨	٥٩١	١٥٤	٢١٠	٤١٨	١٠١	٣١٤	٥٢٢	٥٥٣	١٣٦	٤٧٤	٣٢	٣٧٠	٢٩٦	٦٠٩	١٩٢	٣٨٠	٨٨	١٩	٣٢٧	٥٤٠	٢٤٨	٤٣١
٤٥٤	٣٧	٣٧٥	٥٥٨	١٤١	١٩٧	٣٨٥	٩٣	٢٧٦	٦١٤	٥٤٥	٢٢٨	٤٣٦	٢٤	٣٣٢	٢٦٣	٥٩٦	١٥٩	٤٩٢	٥٥	١٠٦	٣١٩	٥٠٢	٢١٥	٤٢٣
٦١٠	١٩٣	٣٧٦	٨٩	٢٩٧	٣٢٨	٥٣٦	٢٤٩	٤٣٢	٢٠	٧١	٢٥٩	٥٩٢	١٥٥	٤٨٨	٤١٩	١٠٢	٣١٥	٥٢٣	٢٠٦	١٣٧	٤٧٥	٣٣	٣٦٦	٥٥٤
١١	٣٤٩	٥٣٢	٢٤٥	٤٢٨	٤٨٤	٦٧	٢٥٥	٥٨٨	١٧١	٢٠٢	٤١٥	١٢٣	٣٠٦	٥١٩	٥٧٥	١٣٣	٤٦٦	٢٩	٣٦٢	٢٩٣	٦٠١	١٨٩	٣٩٧	٨٥
١٦٧	٤٨٠	٦٣	٢٧١	٥٨٤	٥١٥	٢٢٣	٤٠٦	١١٩	٣٠٢	٣٥٨	٥٦٦	١٢٩	٤٦٢	٥٠	٧٦	٢٨٩	٦٢٢	١٨٥	٣٩٣	٤٤٩	٧	٣٤٥	٥٢٨	٢٣٦
٣٢٣	٥٠٦	٢١٩	٤٠٢	١١٥	٤١	٣٥٤	٥٦٢	١٥٠	٤٥٨	٣٨٩	٩٧	٢٨٥	٦١٨	١٧٦	٢٣٢	٤٤٥	٣	٣٣٦	٥٤٩	٥٨٠	١٦٣	٤٩٦	٥٩	٢٦٧
٢٩٠	٦٢٣	١٨١	٣٩٤	٧٧	٨	٣٤١	٥٢٩	٢٣٧	٤٥٠	٤٧٦	٦٤	٢٧٢	٥٨٥	١٦٨	٢٢٤	٤٠٧	١٢٠	٣٠٣	٥١١	٥٦٧	١٣٠	٤٦٣	٤٦	٣٥٩
٤٤١	٤	٣٣٧	٥٥٠	٢٣٣	١٦٤	٤٩٧	٦٠	٢٦٨	٥٧٦	٥٠٧	٢٢٠	٤٠٣	١١١	٣٢٤	٣٥٥	٥٦٣	١٤٦	٤٥٩	٤٢	٩٨	٢٨١	٦١٩	١٧٧	٣٩٠
٥٩٧	١٦٠	٤٩٣	٥١	٢٦٤	٣٢٠	٥٠٣	٢١١	٤٢٤	١٠٧	٣٨	٣٧١	٥٥٩	١٤٢	٤٥٥	٣٨١	٩٤	٢٧٧	٦١٥	١٩٨	٢٢٩	٤٣٧	٢٥	٣٣٣	٥٤١
١٠٣	٣١١	٥٢٤	٢٠٧	٤٢٠	٤٧١	٣٤	٣٦٧	٥٥٥	١٣٨	١٩٤	٣٧٧	٩٠	٢٩٨	٦٠٦	٥٣٧	٢٥٠	٤٣٣	١٦	٣٢٩	٢٦٠	٥٩٣	١٥١	٤٨٩	٧٢
١٣٤	٤٦٧	٣٠	٣٦٣	٥٧١	٦٠٢	١٩٠	٣٩٨	٨١	٢٩٤	٣٥٠	٥٣٣	٢٤١	٤٢٩	١٢	٦٨	٢٥١	٥٨٩	١٧٢	٤٨٥	٤١١	١٢٤	٣٠٧	٥٢٠	٢٠٣
٢٤٦	٤٣٤	١٧	٣٣٠	٥٣٨	٥٩٤	١٥٢	٤٩٠	٧٣	٢٥٦	٣١٢	٥٢٥	٢٠٨	٤١٦	١٠٤	٣٥	٣٦٨	٥٥١	١٣٩	٤٧٢	٣٧٨	٨٦	٢٩٩	٦٠٧	١٩٥
٢٥٢	٥٩٠	١٧٣	٤٨١	٦٩	١٢٥	٣٠٨	٥١٦	٢٠٤	٤١٢	٤٦٨	٢٦	٣٦٤	٥٧٢	١٣٥	١٨٦	٣٩٩	٨٢	٢٩٥	٦٠٣	٥٣٤	٢٤٢	٤٣٠	١٣	٣٤٦
٤٠٨	١١٦	٣٠٤	٥١٢	٢٢٥	١٢٦	٤٦٤	٤٧	٣٦٠	٥٦٨	٦٢٤	١٨٢	٣٩٥	٨٧	٢٨٦	٣٤٢	٥٣٠	٢٣٨	٤٤٦	٩	٦٥	٢٧٣	٥٧١	١٦٩	٤٧٧
٥٦٤	١٤٧	٤٦٠	٤٣	٣٥١	٢٨٢	٦٢٠	١٧٨	٣٨٦	٩٩	٥	٣٣٨	٥٤٦	٢٣٤	٤٤٢	٤٩٨	٥٦	٢٦٩	٥٥٧	١٦٥	٢١٦	٤٠٤	١١٢	٣٢٥	٥٠٨
٩٥	٢٧٨	٦١١	١٩٩	٣٨٢	٤٣٨	٢١	٣٣٤	٥٤٢	٢٣٠	١٥٦	٤٩٤	٥٢	٢٦٥	٥٩٨	٥٠٤	٢١٢	٤٢٥	١٠٨	٣١٦	٣٧٢	٥٦٠	١٤٣	٤٥١	٣٩

شکل ۲۷. مربع وفقی مرتبهٔ ۲۵

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵	۶	۱
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۵

شکل ۲۹. مربع لاتین مرتبهٔ ۶

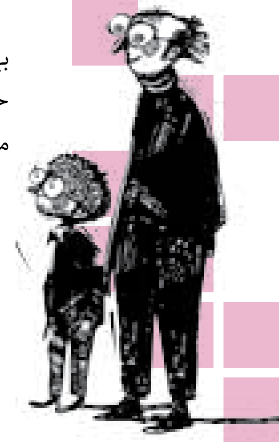
✓ اگر n فرد باشد، در قطر اصلی ابتدا اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ... و n و سپس اعداد زوج ۲، ۴، ... و $n-1$ نوشته می‌شوند. این نکته کاملاً در مربع لاتین مرتبهٔ ۵ که در بالا آمده، مشهود است.

✓ در هر مربع لاتین، تعداد از درایه‌های واقع در گوشهٔ چپ بالا و راست پایین (که پررنگ نوشته شده‌اند) کلید رمزگشایی آن هستند. فقط با داشتن این چند عدد، مربع به صورت منحصر به فرد نوشته خواهد شد. تعداد این اعداد مشخص شده برای $n = ۲k$، معادل $k^۲$ و برای $n = ۲k + ۱$، معادل $k^۲ + k$ است.

یکــی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری اســت. درایه‌های یک مربع لاتین ممکن است اطلاعاتی باشد که می‌خواهیم برای کســی بفرســتیم. یک مربع لاتین $n \times n$ از $n^۲$ اطلاع تشکیل می‌شــود. با توجه به آخرین ویژگی بیان شده در مربع لاتین، کافی است $\frac{۱}{۴}$ از اطلاعات را منتقل کنیم. شخصی که اطلاعات را دریافت کرده است، به صورت منحصر به فردی ســایر اعداد را در مربع می‌نویسد و به اطلاعات مورد نظر می‌رسد.

مربع لوشو[۸]

همان مربع وفقی ۳ در ۳ اســت که احتمالاً باستانی‌ترین روش اســتفاده از «فنگ‌شویی» است. طبق افسانه‌های چینی، امپراتور «یو»، آن را بر لاک یک لاک‌پشت غول‌پیکر پیدا کرد! می‌توان چیدمان کل خانه یا ساختمان، اتاق، دفتر کار، میز و هر چیزی را براســاس مربع لوشــو و با در نظر گرفتن جدول عنصرها، جهت‌ها، رنگ‌ها و نمادها در فنگ‌شــویی قرار داد تا



بهترین نتیجه را بدهد. در این صورت، هر بخش از خانه به یک حوزهٔ زندگی انسان (مثلاً روابط، سلامتی، حرفه، ...) مربوط می‌شود.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۲۹

فنگ‌شـویی ترکیب واژهٔ چینی «فنـگ»[9] به معنای «باد» اسـت و «شویی»[10] به معنای «آب» است. این دو واژه با هم تداعیگر مفهوم شکل‌دهنده و حرکت آفرین باد و آب است و نیز بیانگر تضاد این دو در عین همراهی موزونشـان. فنگ‌شویی تعالیم «تائو» است برای زیستن در عین هماهنگی با طبیعت و محیط اطراف، چینی‌ها قرن‌هاست که به خرد کاربردی نهفته در این تعالیـم دل داده‌اند و در چیدمان خانه‌هایشـان، انتخاب دفتر کارشـان و... آن را به‌کار بسته‌اند تا زندگی را موزون‌تر سازند. هـدف فنگ‌شـویی برگرداندن نظم، ترتیب و تـوازن به تمام زمینه‌های زندگی اسـت. از مربع لوشو به چند روش متفاوت می‌توان استفاده کرد: در روش رایج داریم: ۱= دورنمای کاری/شـغلی، منزلت شـما از دیدگاه خودتـان؛ ۲= ارتباطات از هر نوع به خصـوص ارتباط عاطفی، ازدواج، شـراکت و همراهی طولانی مدت؛ ۳= روابط خانوادگی، گذشـته، نیاکان شما؛ ۴= خوش‌بختی و سـعادت؛ ۵= سلامتی جسـمی؛ ۶= خدایان و ارواح، آن‌هایی که قادر به کمک به شما هستند؛ ۷= کودکان، بـاروری، خلقت، علائق و اوقات فراغت و هدیه‌های جالب؛ ۸= دانش و تحصیلات، نوآوری و خلاقیت؛ ۹= شهرت، نام نیک و احترام برای شما.

چگونگی چیدمان این اعداد در مربع نشان‌دهندهٔ برتری هر یک از اعداد بیان شده بر سایر اعداد است. هر محیطی را اعم از خانه، دفتر کار، کلاس، میز، خودرو و... به ۹ قسمت تقسیم می‌کنند. این ۹ قسمت به همین صورتی است که در شکل بالا دیدید. عناصری را که در بالا ذکر شـد در این مربع به ترتیب خاصی پخش می‌کنند.

از بین پنـج عنصر آب، فلز، خاک، چـوب و آتش، چوب و آتـش هر کدام یک خانه دارنـد. چون این و عنصر پرقدرت هستند، برای حفظ تعادل هر کدام یک خانه دارند. آب شمال اسـت (پایین جدول، مربع شمارهٔ ۱) و مظهر کوه‌های پربرف. آتش جنوب اسـت (خانهٔ ۹). زمین عنصر مادر اسـت و نیز از تمام عناصر ضعیف‌تر اسـت، به همیـن خاطر ۳ خانه متعلق به زمین اسـت (خانه‌های ۲، ۵، ۸). عناصر چوب و فلز از نظر قدرت متوسـط هسـتند و هر کدام دو خانه دارند. خانه‌های ۳ و ۴ (شـرق و جنوب شـرقی) متعلق به چوب و خانه‌های ۶ و ۷ (غرب و شـمال‌غربی) متعلق به فلز هستند. به ترتیب شمال‌غربی (خانهٔ ۶) جای افراد کمک‌کننده است. شمال (خانهٔ ۱) جایگاه شـغل و حرفه اسـت. شمال‌شرقی (خانهٔ ۸) محل دانش و تحصیلات اسـت. شـرق (خانهٔ ۳) مربوط به نیاکان و خانواده اسـت. مرکز که بسیار مهم است (خانهٔ ۵)، مربوط به سلامتی اسـت. غرب (خانهٔ ۷) مربوط به هر چیزی است که فرد به‌وجود می‌آورد. به همین خاطر خانهٔ شمارهٔ ۷ را جایگاه خلاقیت و فرزندان می‌دانند. جنوب‌شرقی (خانهٔ ۴) مربوط به پول و مسـائل مالی است. جنوب (خانهٔ ۹) جایگاه موفقیت و اعتبار فرد اسـت. و در آخر، جنوب‌غربـی (خانهٔ ۲) مربوط به روابط دوگانه است که می‌تواند رابطهٔ زناشویی یا شراکت باشد.

اگر به دلیلی خانه به شـکل مربع نباشـد (مشـکل اکثر خانه‌ها)، قسـمتی از مربع لوشـوی ما حذف می‌شود. مثلاً در شکل ۳۰، خانه‌های شمارهٔ ۶ و ۱ حذف شده‌اند و خانهٔ شماره ۴ کمبود دارد که نشان می‌دهد افراد ساکن این خانه در شغل و حرفهٔ خود مشکل دارند. همچنین در زندگی کسی را ندارند که به خوبـی آن‌ها را حمایت کنـد و در نتیجه، اوضاع مالی چشم‌گیری هم ندارند.

وقتی یک خانه یا هر محلی به هر ترتیب قسـمتی را کم یا زیـاد دارد، باعث به‌وجود آمدن عدم تعـادل در آن محیط می‌شـود. ما باید از تکنیک‌هایی اسـتفاده کنیم و عدم تعادل انرژی را برطرف کنیم. باید اجازه دهیم انرژی به شکل صحیحی جریان پیدا کند. برای این کار می‌توان از نور، صورت، گیاه زنده، رنگ و چرخهٔ عناصر استفاده کرد.

چون جنبه‌های ریاضی مربع لوشـو بسـیار کم است، از توضیح بیشتر دربارهٔ آن خودداری می‌کنیم.

منابع

1. Jhon Lee. Folts, Magic square. (La. Sall, Illinois: open course, 1976).
2. Eric W. Weisstein, Magic square at Math world
3. Magic square museum, The first "Second Life museum about magic square" Volcano (89, 35, 25)
4. W.S.Androws, Magic square and cubes. (New York: Dover, 1960), originally printed in 1917
۵. شوارتز، گئورگیا. راهنمای علمی و کاربردی فنگ‌شویی. ترجمهٔ ملیندا اسکندری. انتشارات ققنوس. ۱۳۸۸.
۶. لائو، کوآن. فنگ‌شویی برای امروز. ترجمهٔ محمد قراچه‌داغی. انتشارات آسیم. [بی‌تا].
7. www.wikipedia.com

پی‌نوشت

1. Albrecht Dürer
2. Melencolia J
3. Yang Hui
4. Kubera - kolam
5. Parshanath Jain
6. Rasa'il Inkwan al-safa
7. sagrada Familia
8. Lo Shu Square
9. feng
10. shui

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه چهارم: چند معمای خواندنی!

● این معما را حتماً بخوانید! و در این صورت قول می‌دهم که آن را برای خیلی‌ها تعریف می‌کنید!

با فرض درست بودن همهٔ تساوی‌ها، در سطر پنجم به جای علامت سؤال چه عددی باید قرار بگیرد؟

۱= ۵
۲= ۵۵
۳= ۵۵۵
۴= ۴۴۴۴
۵= ؟

جواب را در انتهای همین بخش ببینید.

● این یکی هم جالب اسـت: **کاوه** و **شـهریار** را که یادتان هسـت؛ دو برادر دوقلو را می‌گویـم! آن‌ها هر کدام یک ساعت شـماطه‌دار داشـتند که هر دوی آن‌ها، سر هر ساعت به تعداد آن سـاعت، زنگ می‌زدند، ولی ساعت کاوه سـریع‌تر زنگ می‌زد! به این صـورت که در مدت زمانی که سـاعت کاوه سه زنگ می‌زند، ساعت شهریار فقط دو زنگ می‌زند. یک روز سر ساعت معینی، هر دو سـاعت هم‌زمان شروع کردند به زنگ‌زدن. بعد از آن‌که زنگ‌زدن سـاعت کاوه تمام شد، ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم زد. در چه زمانی این اتفاق افتاد؟ ساعت چند بود؟

● باز هم دوقلوها و باز هم شناسـایی آن‌ها! یک بار دیگر در تشخیص دوقلوها از یکدیگر دچار مشکل شدم! این بار یکی از برادرها گفت: «ما دوتایی به آن اتاق می‌رویم و در آن‌جا چند کارت قرمز و سـیاه داریم. سپس یکی از مـا یک کارت در جیبش می‌گـذارد و بیرون می‌آید و جملـه‌ای به تو می‌گویـد. از روی جملـهٔ او، تو باید تشخیص بدهی که او کیست.»

بعد یکی از دو برادر از اتاق خارج شـد و روبه‌روی من ایستاد و گفت: «اگر من شهریار باشم، آنگاه کارت قرمز به همراه ندارم.»

او چه کسـی بود؟ به‌یاد داشته باشید که هر کس که کارت قرمز به همراه داشته باشد، همواره راست می‌گوید و کسی که کارت سیاه داشته باشد، همواره دروغ می‌گوید.

نمادهای جبری هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که شما نمی‌دانید دربارهٔ چه چیزی باید صحبت کنید!

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشهٔ همین شماره

● **معمای اول:** هنوز دارید فکر می‌کنید؟! این‌که کاری ندارد! وقتی ۵=۱ باشد، خُب ۱=۵ است!!

● **معمای دوم:** یک پاسخ اشتباه که خیلی‌ها می‌دهند، ساعت شش است، اما جواب درست ساعت پنج است. در ساعت پنج نخستین زنگ ساعت کاوه با نخستین زنگ ساعت شهریار همزمان می‌شود. دومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که سومین زنگ ساعت کاوه زده شده است. سومین زنگ ساعت شهریار وقتی زده می‌شود که پنجمین زنگ ساعت کاوه زده شده است. پس ساعت شهریار دو زنگ دیگر هم بعد از آن می‌زند.



● **معمای سوم:** گوینده اذعان می‌کند که او شهریاری که کارت قرمز به همراه دارد، نیست. جملهٔ او باید درست باشد، زیرا اگر او شهریار بود و کارت قرمز به همراه داشت، باید راست می‌گفت و نمی‌توانست بگوید شهریاری که کارت قرمز دارد، نیست. پس این درست است که او شهریاری همراه با کارت قرمز نیست. چون جملهٔ او درست است، پس او باید در حقیقت کارت قرمز به همراه داشته باشد. پس او کاوه‌ای است که کارت قرمز همراه دارد.

۷۷

فصل‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی

www.roshdmag.ir

رشد برهان

ریاضی



توابع متناوب و توابع نامتناوب

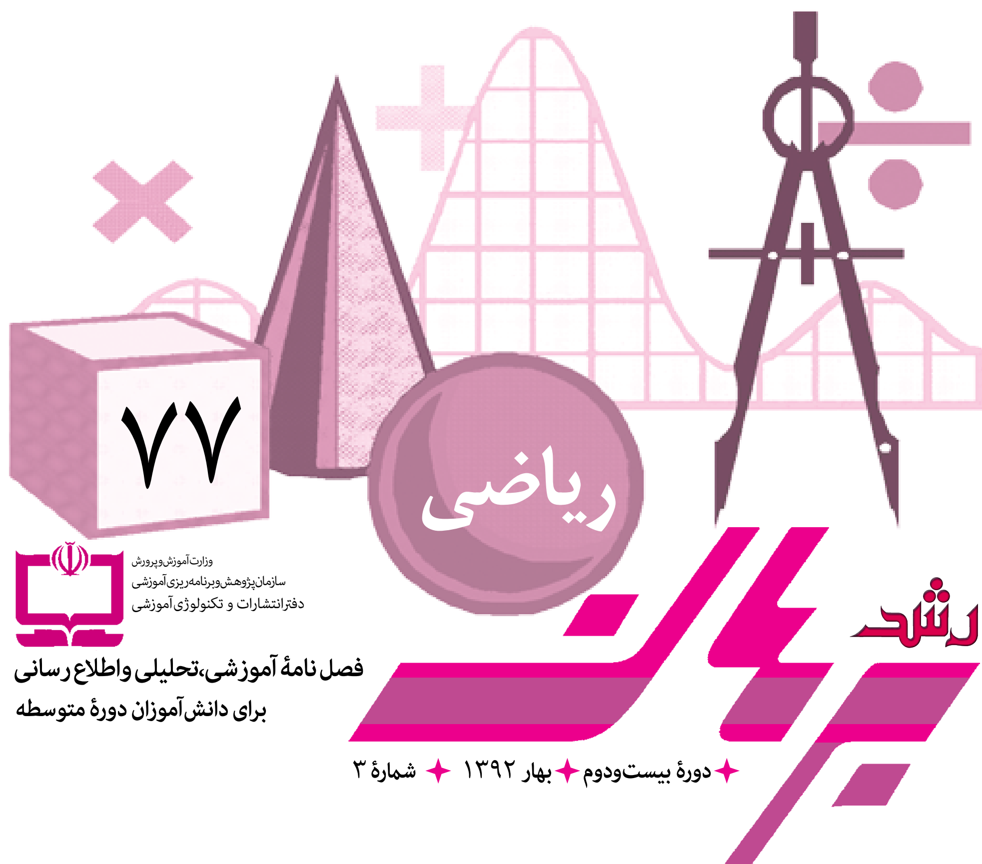
پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته

ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی

N یک عدد است: تصویری از پل اردوش

بسط دو جمله‌ای و ویژگی‌های آن







رشد برهان

فصل نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دورهٔ بیست‌ودوم ◆ بهار ۱۳۹۲ ◆ شمارهٔ ۳

◆مدیرمسئول:
محمد ناصری
◆سردبیر:
حمیدرضا امیری
◆مدیرداخلی:
هوشنگ شرقی
◆طراح گرافیک:
شاهرخ خره‌غانی
◆تصویرگر:
میثم موسوی
◆هیئت تحریریه:
حمیدرضا امیری،
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور
و به یاد همکار عزیزمان
زنده‌یاد پرویز شهریاری
◆ویراستار ادبی:
بهروز راستانی
◆وبگاه:
www.roshdmag.ir
◆پیام‌نگار:
Borhanm@roshdmag.ir
◆پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
◆نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
☎تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۵۸۶۲
☎تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵
◆شمارگان:
۱۱/۵۰۰ نسخه
◆چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)





مجلهٔ رشد برهان متوسطه، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه) ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه و...

رشد برهان متوسطه هر سه ماه، یکبار منتشر می‌شود

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.

حرف اول

هم‌نیمکتی‌ها هوای هم را داشته باشند

معمولاً هم‌کلاسی‌ها همه با هم دوست هستند و رابطهٔ خوبی بین آن‌ها برقرار است. در این بین، هم‌میزی‌ها و دانش‌آموزانی که در کنار هم قرار می‌گیرند، معمولاً بیشتر با هم دوست هستند و نزدیک‌تر به یکدیگرند. به همین دلیل بهتر یکدیگر را می‌شناسند، با روحیات هم آشناترند، نقاط قوت و ضعف یکدیگر را دقیق‌تر شناسایی می‌کنند و بنابراین بهتر می‌توانند به هم کمک کنند. به همهٔ شما دانش‌آموزان عزیز هم‌کلاسی، به خصوص هم نیمکتی‌ها توصیه می‌کنم، نقاط قوت یکدیگر را تقویت کنید و نقاط ضعف یکدیگر را به قوت تبدیل کنید و درصدد رفع آن‌ها برآیید.

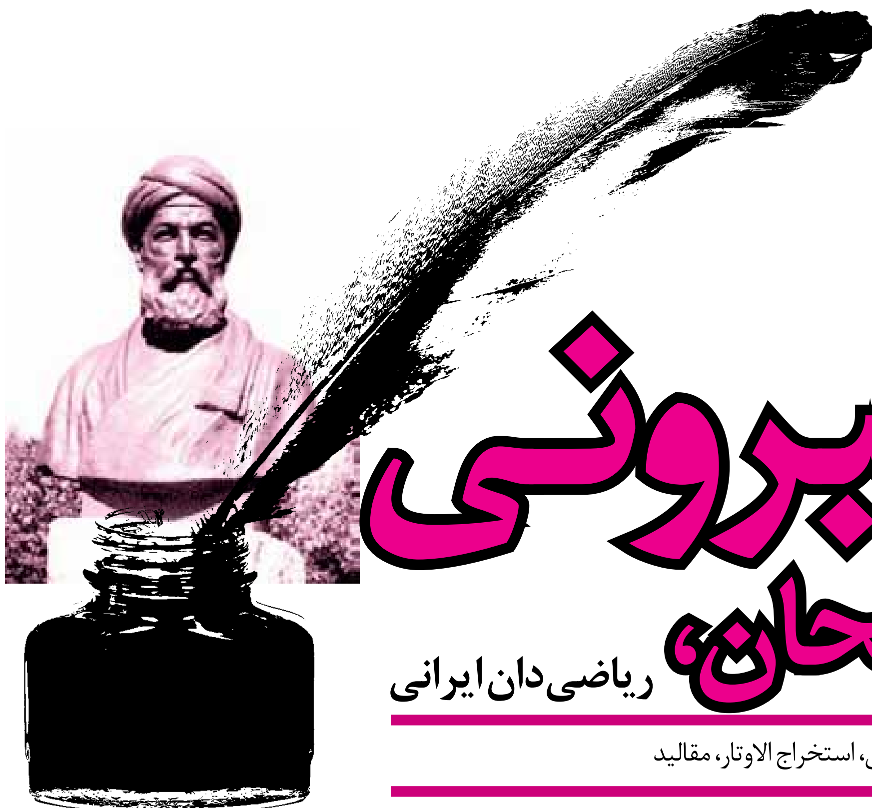
البته این نقاط قوت و ضعف فقط شامل مباحث و مطالب درسی نمی‌شود. دعوت به کارهای خوب و بازداشتن از کارهای بد نیز جزو همین امور است. همان‌طور که برای راهنمایی کردنِ دوست خودتان در حل یک مسئلهٔ ریاضی باید خود شما شناخت کافی و اطلاعات لازم را در مورد حل آن مسئله داشته باشید تا خدای ناکرده پاسخ غلط به او یاد ندهید، در بقیهٔ موارد نیز باید با شناخت و معرفت و مطالعهٔ کافی دوستان خود را راهنمایی کنید.

از طرف دیگر، باید ظرفیت انتقادپذیری و **امر به معروف و نهی از منکر** از طرف دوستانتان را در خود بالا ببرید.

البته دعوت به خوبی‌ها و بازداشتن از بدی‌ها باید به شرایط و ضوابطی انجام گیرد تا تأثیر منفی نگذارد. مثلاً باید با خوش‌رویی و ملایمت همراه باشد. اگر معلم شما با تندی و خدای‌ناکرده ترش‌رویی ساده‌ترین مطالب را به شما آموزش دهد، آیا همان تأثیر را در یادگیری شما دارد که مطالب را با زبانی نرم و ملایم و با خوش‌رویی آموزش دهد؟ یا اگر شما مطلبی را به دوست خود آموزش دهید، ولی خودتان آن را نفهمیده باشید، چه‌قدر در این کار موفق هستید؟

بنابراین سعی کنید دوستانتان را به کارهای خوبی دعوت کنید که خودتان عامل به آن‌ها هستید و نسبت به آن‌ها معرفت دارید. اگر در این زمینه سؤالی برایتان پیش می‌آید، از بزرگ‌ترها و معلمان خود یاری بگیرید و خلاصه با دست پر در این زمینه قدم بردارید، تا هم به وظیفهٔ دوستی و هم‌کلاسی و هم به وظیفهٔ دینی خود به نحو احسن عمل کرده باشید. به امید موفقیت و پیشرفت روزافزون همهٔ شما عزیزان دانش‌آموز در تمامی مراحل زندگی، به خصوص تحصیل علم.

سردبیر



ابوریحان، بیرونی
ریاضی‌دان ایرانی

کلیدواژه‌ها: ابوریحان بیرونی، استخراج الاوتار، مقالید

ابوریحان بیرونی، سوم ذی‌الحجه سال ۳۶۲ هجری قمری (۹۷۳ میلادی) در «بیرونِ» شهر خوارزم به دنیا آمد و در همان کودکی پدر و مادر خود را از دست داد. خود او در این‌باره می‌گوید: «انا با الحقیقة لااعرفُ نسبتی وَ لا اَعرِفُ مَن کانَ جَدّی»: من در واقع نسبت خود را نمی‌شناسم و از نیای خود خبری ندارم.

۱۸ سالش نشده بود که در کوهستان دهکدهٔ خود به رصد ماه پرداخت. ابوریحان شاگرد **ابونصر عراق**، ریاضی‌دان و نقاش مشهور بود. **ابونصر منصور**، فرزند **علی** از خانواده آل‌عراق، ابوریحان را زیر حمایت خود گرفت و با او در زمینهٔ مسئله‌های هندسه مکاتبه داشت. در یکی از نامه‌های خود به ابوریحان نوشته است: «مسئله‌هایی که همراه نامه‌ات بود، به دستم رسید که نوشته بودی یک سوم آن‌ها را **ابوسهل کوهی** با پرگار نشان داده است... پرسش‌های تو را پاسخ داده‌ام، گرچه مسئله‌ها از نظر دشواری و آسانی متفاوت بود...».

ابونصر عراق که به «جیلی» (یعنی گیلانی) مشهور است، ریاضیات و اخترشناسی را به ابوریحان آموخت. ابوریحان حق تقدم او را در اثبات قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث کروی تأیید می‌کند. هنگام لشکرکشی **محمود غزنوی**، با آن‌که ابونصر عراق در ملک خود از او و لشکریانش پذیرایی کرد، به این اتهام که در ملک او مسجدی دیده نمی‌شود، به دستور محمود غزنوی کشته شد. یکی دیگر از معلمان ابوریحان به نام **عبدالصمد**، چون فلسفه یاد می‌داد و محمود با فیلسوفان مخالف بود، به جرم شیعی‌گری و باطنی‌گری کشته شد.

ابوریحان بعد از شکست آل‌عراق به دست **مأمون**، به استرآباد (گرگان) رفت و در پناه **قابوس‌بن وشمگیر** (شمس‌المعالی) قرار گرفت. آل‌عراق در سال ۳۸۵ هجری قمری حکومت را از دست داد. **پورسینا** و **فردوسی** هم بعد از خشم محمود نزد قابوس رفتند. ابوریحان کتاب «آثارالباقیه» را در گرگان در ۲۰ و ۲۱ سالگی نوشت و به قابوس هدیه کرد.

شمس‌المعالی بعد از ۳۹۰ هجری قمری با ابوریحان سر ناسازگاری می‌گذارد و به قول خودِ بیرونی: «به راستی سنگدل شده بود» و ابوریحان از نزد او بیرون آمد. چندی در ری بود و در آن‌جا زندگی او بسیار سخت بود. در ری با **محمود خجندی** و **کوشیار گیلی** ملاقات داشت. بعد به طبرستان نزد **مرزبان**، فرزند **رستم**، فرزند **شروین**، امیرزادهٔ آلِ باوند و صاحب کتاب «مرزبان‌نامه» رفت و در آن‌جا کتاب «مقالید علم الهیئة» را نوشت. مدتی نزد **منصور دوم**، پسر **نوح سامانی** بود و سرانجام به زادگاه خود خوارزم بازگشت. **ابوالعباس مأمون** از مأمونیان خوارزمشاه، بیرونی را با احترام پذیرفت. محمود غزنوی از مأمون خواست دانشمندان را نزد او بفرستد. پورسینا به گرگان رفت، ولی بیرونی در خوارزم ماند.

مأمون در یک شورش داخلی کشته شد (۴۰۷ هجری قمری). محمود غزنوی خوارزم را فتح کرد، بسیاری را کشت، کتابخانه‌ها را سوزاند و پنج هزار نفر را که بیرونی هم بین آنان بود به زنجیر کشید و به غزنین برد. بسیاری از دانشمندان را به جرم قرمطی‌بودن کشت. می‌خواست ابوریحان بیرونی را هم بکشد، ولی وقتی دانست ابوریحان اخترشناس است، از کشتن او صرف نظر کرد و او را به زندان انداخت که بیرونی شش ماه در آن‌جا بود. سرانجام از بند آزاد شد. در زمان لشکرکشی



محمود به هندوستان، همراه لشکریان به فرمان محمود به هند رفت. در آن‌جا زبان سانسکریت را یاد گرفت و چند کتاب به سانسکریت نوشت و یا از سانسکریت به عربی ترجمه کرد. کتاب جالب «ماللِهند» هم محصول همین سفر است.

در این کتاب دربارهٔ رسم‌ها و سنت‌های اجتماعی و علمی، عقیده‌های عرفانی و فلسفی، جامعهٔ مدنی، طبقه‌ها و قشرهای اجتماعی، ادبیات، علوم و شگفتی‌های سرزمین هند و بیش از همه دربارهٔ اخترشناسی آنان صحبت می‌کند. در این کتاب می‌نویسد: «در آغاز کار، چون شاگردی در برابر استاد، نزد آنان می‌ایستادم، زیرا از ماهیت و اندازهٔ دانش آنان بی‌اطلاع بودم. چون اندکی به کارهای آنان وارد شدم و با آنان به گفت‌وگو نشستم و به آنان در برخی زمینه‌ها راهنمایی داشتم، از من شگفت‌زده شدند و می‌پرسیدند که با چه کسی در هند ملاقات



داشته‌ام و از چه کسی این آگاهی‌ها را به دست آورده‌ام. آن وقت مرا دربرگرفتند و از من دربارهٔ مسئله‌های گوناگون می‌پرسیدند ... و مرا نزد بزرگانشان به «دریای دانش» توصیف می‌کردند.»

محمود غزنوی در سال ۴۲۱ هجری قمری مرد و بیرونی که در غزنه بود، به خدمت **مسعود غزنوی** درآمد. کتاب «قانون مسعودی» که بیشتر دربارهٔ مثلثات و اخترشناسی است در این سال‌ها نوشته شده. شهرت دارد که مسعود غزنوی هدیهٔ باارزشی از نقره در برابر تألیف این کتاب برای او فرستاد. ولی بیرونی آن را به خزانه برگرداند و پیام داد، زندگی من می‌گذرد و نیازی به آن ندارم.

ابوریحان با درگذشت محمود آزادی بیشتری پیدا کرد و توانست یکی دوبار به خوارزم، زادگاه خود برود و از آن بازدید کند. نتیجهٔ این سفرها کتابی است دربارهٔ تاریخ خوارزم که به ما نرسیده و تنها بیهقی چند سطری از آن را آورده است. بیرونی در سال ۴۴۰ هجری قمری و به ظاهر در غزنین درگذشت.

***

بیرونی به تقریب در تمام زمینه‌های دانش زمان خود اظهارنظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد. در فلسفه با پورسینا مکاتبه داشته، کتابی دربارهٔ پزشکی نوشته، در تاریخ، گاه‌شماری، وزن مخصوص اجسام گوناگون، در شناخت گوهرها، در زمین‌شناسی، کیهان‌شناسی، چاه‌های آرتزین و... کتاب‌هایی دارد. همه‌جا کار خود را با استدلال و آزمایش انجام می‌دهد. دربارهٔ دیدگاه‌های خود به تحقیق می‌پردازد و بسیاری از نظرهای او، هنوز هم ارزش علمی خود را حفظ کرده‌اند.

در این‌جا تنها بخشی از دیدگاه‌های او را دربارهٔ جابه‌جایی زمین می‌آوریم که نمونه‌ای از دقت علمی اوست (یادآوری می‌کنیم بیرونی به نوعی به گردش زمین و سیاره‌ها اعتقاد داشته است). او در کتاب «تحدید نهایات الاماکن»، بعد از اثبات کرویت زمین، اندازه‌گیری قطر آن و حل مسئله‌های دیگر می‌نویسد: «... هنگامی که پاره‌هایی از زمین از جایی به جای دیگر منتقل می‌شود، سنگینی آن نیز جابه‌جا می‌شود و میان سنگینی سوهای مختلف زمین تفاوت پدید می‌آید... و به همین جهت است که دوری سرزمین‌ها از مرکز زمین، با گذشت زمان، بر یک اندازه نمی‌ماند. چون برآمدگی زمین در جایی زیاد شود و اطراف خود را پر کند، آب‌ها کم می‌شود و چشمه‌ها گود می‌افتد و دره‌ها ژرف می‌شود و آبادانی دشواری پیدا می‌کند. پس مردمان از آنجا به جای دیگر کوچ می‌کنند و این ویرانی را به پیری زمین نسبت می‌دهند... و چنین است که گرمسیرها سردسیر می‌شود و سردسیرها گرمسیر... این حرکت هر چند اتفاقی و بی‌قاعده و در زمان اندک، اندک باشد ممکن است بر امتداد قطرهای کلی به‌تدریج صورت پذیرد یا به مرکز اتفاق افتد، یا ترکیبی از هر دو حرکت باشد، و سوی آن به طرف هر یک از جهت‌های چهارگانه یا میانهٔ آن‌ها باشد و نیز ممکن است، این حرکت ناگهانی و یا پیدایش سبب آن، اتفاق یکبارهٔ سنگینی‌ها از جایی به جای دیگر است، صورت پذیرد...» [تحدید نهایات الاماکن لتصحیح مسافات الاماکن؛ اندازه‌گیری پایان‌های جای‌ها، برای درست کردن مسافت‌های جایگاه‌ها، برگردان احمد آرام، ۱۳۵۲].

ما در این‌جا از بحث بیشتر دربارهٔ جنبه‌های گوناگون کارهای علمی بیرونی می‌گذریم و به کوتاهی دربارهٔ شخصیت ریاضی او و کارهایی که در زمینهٔ ریاضیات کرده است، صحبت می‌کنیم.

بیرونی ضمن بحث‌های تاریخی هرجا به مسئله‌ای برمی‌خورد که جنبهٔ ریاضی داشته است، آن را با دقت و استدلال حل می‌کند. از جمله، وقتی در «آثارالباقیه» به مسئله‌ای برمی‌خورد که مربوط به صفحهٔ شطرنج است و به محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی (با جملهٔ اول واحد و قدرنسبت ۲ و تعداد جمله‌های ۶۴) برخورد می‌کند، آن را با دقت استدلال ریاضی حل می‌کند و به‌دست می‌آورد:

$$۱+۲+۲^{۲}+۲^{۳}+...+۲^{۶۳}=۲^{۶۴}-۱$$

$$=۱۸/۴۴۶/۷۴۴/۰۷۳/۷۰۹/۵۵۱/۶۱۵$$

ابوریحـان ابتدا اثبات می‌کند که توان دوم هـر جمله از این تصاعد برابر اسـت با جمله‌ای که فاصلـهٔ آن تا این جمله، برابر فاصلهٔ این جمله تا جملهٔ اول اسـت. برای نمونه، اگر عدد خانهٔ پنجم را که ۱۶ اسـت به توان دو برسـانیم، ۲۵۶ به‌دست می‌آید کـه عدد خانهٔ نهم اسـت. در ضمن فاصلهٔ خانهٔ نهم از خانهٔ پنجم برابر است با فاصلهٔ خانـهٔ پنجم از خانهٔ اول. ابوریحان سـپس ثابت می‌کند، اگر یک واحد از عدد خانه‌ها کم کنیم، مجموع عددهای خانه‌های قبل به‌دسـت می‌آید. برای نمونـه، اگر از خانهٔ پنجم که ۱۶ اسـت، یـک واحد کم کنیم، ۱۵ به‌دست می‌آید که برابر است با مجموع جمله‌های از خانهٔ اول تا چهارم.

۱۵=۸+۴+۲+۱

بـا توجه به این دو مطلـب، ابوریحان نتیجه می‌گیرد که مجموع جمله‌ها از خانهٔ اول تا خانه شـصت و چهارم برابر می‌شود با: $۲^{۶۴}-۱$.

اگر ۱۶ را که عدد خانهٔ پنجم است، به توان دوم برسانیم، ۲۵۶ به‌دست می‌آید که عدد خانهٔ نهم اسـت. توان دوم ۲۵۶، عدد خانهٔ هفدهم است (۶۵۵۳۶). اگر این عدد را به توان دو برسـانیم، ۴/۲۹۴/۹۶۷/۲۹۶ به‌دسـت می‌آید که عدد خانهٔ سی و سوم است. و اگر این عدد را به توان دو برسانیم، عدد خانهٔ شـصت و پنجم پیدا می‌شـود که با کم کردن یـک واحد از آن، مجموع جمله‌های تا خانهٔ شصت و چهارم به‌دست می‌آید.

بیشتر رساله‌ها و نوشته‌های ابوریحان مربوط به ریاضیات اسـت. برای نمونه، در کتاب «فی‌الراشـیکات الهند» می‌نویسـد: «... چون عدد را باید بی‌پایان دانست، باید تناسب‌ها و عمل‌ها هم بی‌پایان باشد، ولی هندیـان را دیدم کـه از حد معینی تجاوز نمی‌کننـد... آن‌هـا در حسـاب‌های خود روش عددی بـه‌کار می‌برند... چه بهتر که در اسـتدلال از تجزیه و تحلیل هندسـی هم استفاده کنند.» در همین «آثارالباقیه» بیرونـی روش‌هایـی برای تصویـر کردن نقطه‌های واقع بر سـطح کره روی صفحه آورده است.

استخراج الاوتار

«اسـتخراج الاوتار» یکی از کتاب‌های ابوریحان اسـت کـه در آن قضیه‌هایی از هندسـه را طـرح و آن‌هـا را گاه به یاری حسـاب و جبر و گاه با اسـتدلال هندسی حـل کرده اسـت. نـام کامل ایـن کتاب «اسـتخراج الاوتار فی الدایره» است که با تألیف دیگری از بیرونی به نام «جمع الطرق السـائره فی معرفةالاوتـار الدایـره»، دربارهٔ محاسـبهٔ وترهای دایره اسـت و به ظاهر ابوریحان بیرونـی آن‌ها را برای پیدا کردن سـینوس کمان‌هـا آورده اسـت. زنده‌یاد **ابوالقاسم قربانی**، این قضیه‌ها و مسئله‌ها را بـه زبان فارسـی و با نمادهـای امروزی در کتابی به نام «تحریر اسـتخراج الاوتار» گرد آورده که «انجمن آثار ملی» در سـال ۱۳۵۵ هجری خورشیدی آن را چاپ کرده اسـت. این کتاب حاوی چهار قضیه و سی مسـئله اسـت. صورت قضیـهٔ اول چنین اسـت: اگر خط شکسـته‌ای شـامل دو وتر نابرابر در دایره‌ای داشـته باشیم و از وسط کمانی که این خط شکسـته را دربرگرفته اسـت، عمودی بر وتر بزرگ‌تر رسم کنیم، پای عمود، خط شکسته را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند. برای این قضیه ۲۲ برهان آورده است.

صورت مسئلهٔ اول این است: از مثلث ABC انـدازهٔ زاویهٔ B، مجموع طول‌های دو ضلـع AB و BC و طـول ضلع AC معلوم اسـت. مثلث را رسـم کنید. در این مسئله‌ها، با معلوم‌بودن طول وتر یک کمان، طول وتر دو برابر آن و طول وتر نصف یا $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۱}{۸}$ آن کمان محاسبه شده است.

کتاب‌هایی که در آن‌هـا ابوریحان به مثلثات پرداخته است عبارت‌اند از: «مقالید علم الهیئة»، «فصل سوم قانون مسعودی» و «ابی‌ریحان الی ابی سعید» در کتاب «مقالید علم الهیئة» مثلثات و به‌ویژه مثلثات کروی را جـدا از کاربرد آن‌ها مطرح کرده و کتاب را به **مرزبان**، فرزند **رستم**، فرزند **شروین**، مؤلف «مرزبان‌نامه» تقدیم کرده است. این کتاب نشان می‌دهد که خواجه نصیر توسی با نوشـتن «کشـف‌القناع»، تدوین‌کنندهٔ مثلثات به عنوان رشتهٔ خاصی از ریاضیاتِ محاسـبه‌ای، از ابوریحان تقلید کرده است و آفرینندهٔ مثلثات را باید ابوریحان بیرونی دانسـت. در این کتاب که کوچک اسـت و از ۵۰ صفحـه کمتـر، ابوریحـان دربارهٔ مثلث کروی بحث کرده و سپس محاسبهٔ کمان‌های آسـمانی را به عنوان کاربرد آن مطرح کرده است.

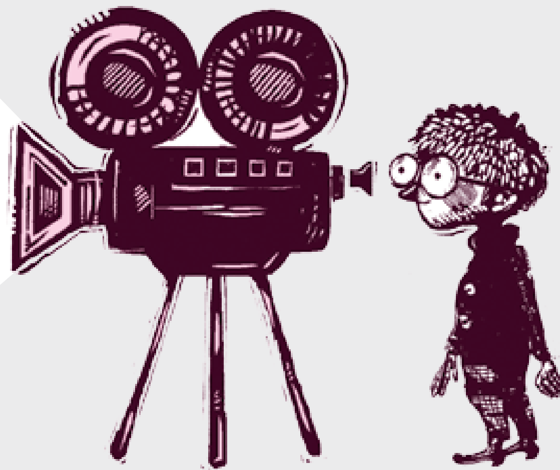
کتاب مقالید

کتاب مقالیـد از دیدگاه تاریخ ریاضی هـم اهمیت دارد. بیرونـی در این کتاب از همهٔ کسـانی که قبـل از او و یا در زمان او روی «قضیـهٔ منه‌لائـوس» دربـارهٔ مثلث کـروی کار کـرده و جنبه‌هایـی از آن را به صـورت مثلثاتـی درآورده‌اند، صحبت می‌کنـد. تا زمانی که کتاب «مقالید» پیدا نشده بود، همه گمان می‌کردند که توسی برای نخستین بار مثلثات را بدون توجه به اخترشناسی، به عنوان رشته‌ای مستقل از دانش ریاضی مورد بحث قرار داده اسـت، ولی با کشف کتاب مقالید ابوریحان بیرونی، حق به حق‌دار رسید.

بیرونـی کتاب قانون را در سـال‌های ۴۲۱ تـا ۴۲۷ نوشـته که مقالهٔ سـوم آن دربـارهٔ مثلثات اسـت. در این‌جـا بیرونی همه‌چیز را مـی‌آورد ولی جانب اختصار را نگه می‌دارد. این کتاب دارای ۹ بخش است و به‌ویژه در بخش‌های ششم و هفتم، همهٔ موضوع‌هایی را که ابوریحان بیرونی دربارهٔ مثلثات، از جمله آنچه در کتاب‌های دیگر خود آورده، خلاصه کرده است.

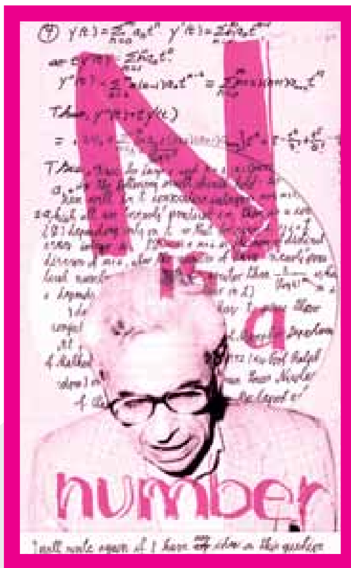


احسان یارمحمدی



"N" is a number!

■ **اسم فیلم:** اِن یک عدد است ■ **کارگردان:** جورج پُل چیچری[1]
■ **هنرپیشه:** پُل اِردوش[2] ■ **موسیقی از:** مارک آدلِر[3] ■ **فیلم‌بردار:** جان نوپ[4]
■ **محصول:** ایالات متحده آمریکا ■ **مدت فیلم:** ۵۷ دقیقه ■ **زبان:** انگلیسی



N یک عدد است!
تصویری از پُل اِردوش

فیلم مستند «اِن یک عدد است، تصویری از پُل اِردوش»، زندگی ریاضی‌دان مجارستانی، پُل اِردوش (۱۹۹۶-۱۹۱۳) را به تصویر می‌کشد. اردوش بیشترین تعداد مقالات را در طول تاریخ ریاضیات در مقایسه با دیگر ریاضی‌دانان منتشر کرده است. وی با بیش از ۱۰۰ ریاضی‌دان دیگر سابقهٔ همکاری و تبادل‌نظر داشته و روی شاخه‌هایی از ریاضیات مانند ترکیبیات[5]، نظریه گراف[6]، نظریهٔ اعداد[7]، نظریهٔ تخمین[8]، نظریهٔ مجموعه‌ها[9] و نظریهٔ احتمال[10] کار کرده است.

فیلم با اشاره به متنی از **سر ایزاک نیوتن**[11]، ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی آغاز می‌شود: «من نمی‌دانم چگونه ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم. اما همین‌قدر می‌دانم که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا مشغول بازی‌ام و گاه‌گاهی سنگ ریزه‌ای صاف‌تر از سنگ‌های دریا یا صدفی زیباتر از صدف‌های دریا می‌یابم؛ در حالی‌که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»

در این فیلم به چند چهرهٔ برجسته علمی، مانند ریاضی‌دان انگلیسی، **گادفِری هارولد هاردی**[12] (۱۹۴۷-۱۸۷۷)، ریاضی‌دان مجارستانی، **تیبور گالای**[13] (۱۹۹۲-۱۹۱۲)، **رِنی آلفرِد**[14] (۱۹۷۰-۱۹۲۱)، **پال توران** (۱۹۷۶-۱۹۱۰) و ریاضی‌دان بریتانیایی، **جان اِدِنسور لیتِلوود**[15] (۱۹۷۷-۱۸۸۵) اشاره می‌شود. در ضمن در مورد «قضیهٔ چِبیشِف»[16]، قضیهٔ گالای ـ سیلوِستِر»[17] و «قضیهٔ رَمزی»[18] نیز مطالب جالب توجه و ارزنده‌ای ارائه می‌شود.

از صحنه‌های جالب این فیلم می‌توان به صحنه‌های زیر اشاره کرد:

- گردش دایره‌وار یک سکه به دور یک بشقاب براساس نیروی جانب مرکز.
- شوخی‌ها و مزاح‌های پُل اِردوش در مواجهه با ریاضی‌آموزان در کلاس درس مانند این نمونه: پُل اِردوش معادل نام و نام خانوادگی خود را به زبان انگلیسی روی تختهٔ کلاس می‌نویسد و آن را هم سنگ عبارت

PGOM LD AD LD CD در نظــر می‌گیرد؛ یا به بیان دیگر:

Paul Erdoš ≡ PGOM LD AD LD CD

ســپس به توضیح و تفسیر هر یک از حــروف ترکیبی می‌پــردازد که معــادل با نام و نــام خانوادگی وی در نظــر گرفتــه شــده‌اند و بیانگر حرف ابتــدای کلمه‌هــا و واژگانی هستند. او با استفاده از این روش و مشخص‌شدن معنا و مفهوم فُکاهی معادل‌هایی که او برای معرفی خود به دانشــجویان به‌کار برده اســت، باعث خنده و سرگرمی دانشجویان در کلاس درس می‌شود.

- بــازی کردن با خردســالان با یک قوطی بسیار کوچک که داخل آن شیئ نسبتاً سنگینی قرار دارد. وی هنگامــی که قوطی را رها می‌کند، قبل از این‌که بر اثر نیروی گرانش بــا زمین برخورد کنــد، با حرکتی ســریع آن را در اختیار می‌گیرد و با انجام این کار توجه کودکان را به خود معطوف می‌کند.

پی‌نوشت

1. George Paul Csicsery
2. Paul Erdoš
3. Mark Adler
4. John Knoop
5. Combinatorics
6. Graph Theory
7. Number Theory
8. Approximation Theory
9. Set Theory
10. Probability Theory
11. Sir Isaac Newton
12. Godfrey Harold Hardy
13. Tibor Gallai
14. Renyi Alfred
15. John Edensor Littlewood
16. Chebychev's Theorem
17. Callai - Sylvester Theorem
18. Ramsey Theorem

سرگرمی

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: معماهای عدد سال نو!



ســال نــو در راه اســت! نــوروز ۱۳۹۲ بر همهٔ شــما خوانندگان عزیز مجله مبارک باد! به این مناســبت در نظر داریم تعدادی معمای عددی در ارتباط با عدد این ســال، یعنــی ۱۳۹۲ مطــرح کنیم. پاســخ‌ها را در انتهای همین بخش ملاحظه کنید:

۱. می‌تــوان دیــد کــه: $۸۷\times۲^۴=۱۳۹۲$، یعنــی حاصل‌ضرب توان چهارم یک عدد اول در یک عدد اول دیگر اســت. حداقل چند ســال باید صبر کنیم تا دوباره این وضع به‌وجود آید؟

۲. حداقل چند سال باید صبر کنیم تا عدد سال به صورت حاصل‌ضرب دو عدد اول متمایز دربیاید؟

۳. آیــا می‌توانید تعدادی عدد طبیعی متوالــی بیابید که مجموع آن‌ها مساوی ۱۳۹۲ شود؟

۴. تعداد صفرهای سمت راست عدد !۱۳۹۲ چندتاست؟

۵. رقم سمت راست عدد $۱۳۹۲^{۱۳۹۲}$ چیست؟

۶. عددهای طبیعی متوالی را که حاصل‌ضرب آن‌ها از ۱۳۹۲ بزرگ‌تر و مجموع آن‌ها مینی‌مم مقدار ممکن باشــد مشخص کنید.

۷. آیا جمله‌ای از دنبالهٔ $a_n = n^۲ - ۳n$ مساوی ۱۳۹۲ است؟ چندمین جمله؟

منطق روشی قاعده‌مند برای گرفتن نتایج نادرست است... با تردستی و جلب اعتماد، اما به یقین، آمار روشی قاعده‌مند برای گرفتن نتایج نادرست است.... با ۹۵ درصد تردستی و جلب اعتماد!

«رافی ماروتیان»



عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

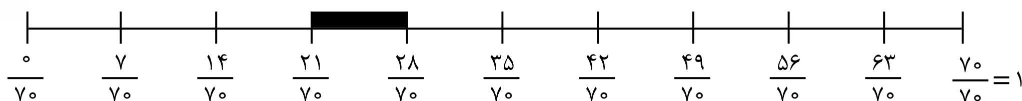
یافتن دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گویا و گنگ به روش بزرگ‌نمایی

اشاره

برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ می‌توان با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به‌دست می‌آیند، دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به عدد $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند. در ادامه با روشی آشنا خواهیم شد که در آن بدون عمل تقسیم دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد را بیابیم.

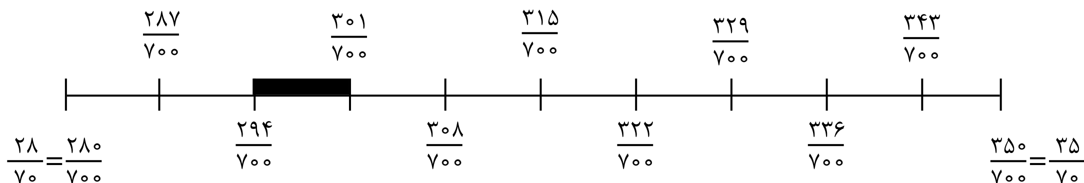
مثال ۱. به روش بزرگ‌نمایی، دنبالهٔ تقریبات اعشاری عدد $\frac{۳}{۷}$ را (تا ۳ مرحله) بیابید.

۱. ابتدا توجه می‌کنیم که $۰ < \frac{۳}{۷} < ۱$، اما $\frac{۷}{۷} = ۱$ و $\frac{۰}{۷} = ۰$. چون می‌خواهیم از روش بزرگ‌نمایی ۱۰ قسمتی استفاده کنیم، فاصلهٔ صفر تا ۱ را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:



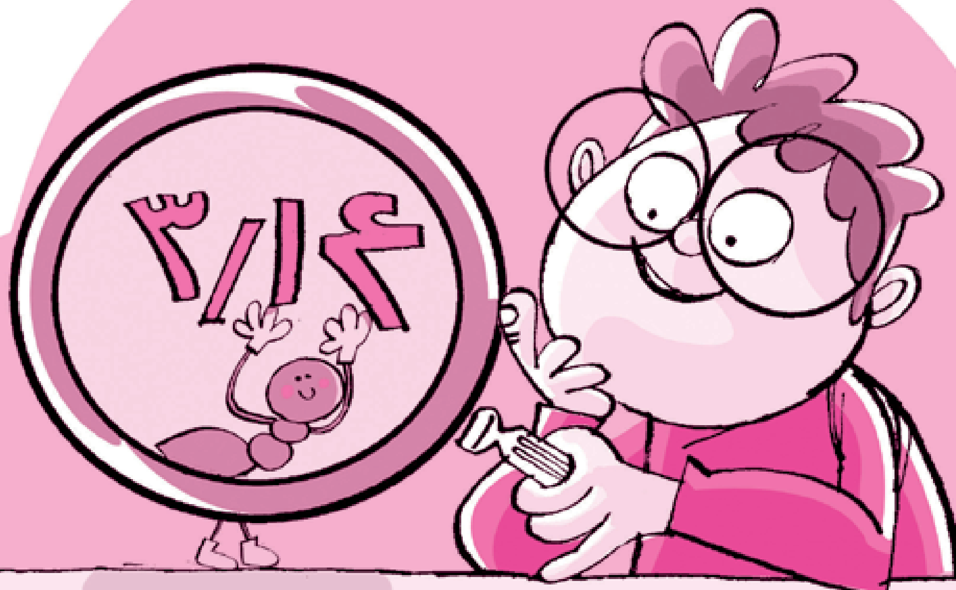
حال باید دید که $\frac{۳}{۷}$ در کدام یک از زیربازه‌های بالا قرار دارد. توجه می‌کنیم که:
$\frac{۳۰}{۷۰} = \frac{۳}{۷}$ و $۲۸ < ۳۰ < ۳۵$ (۳۵ و ۲۸ مضرب‌های مخرج کسر، یعنی ۷ هستند)، در نتیجه: $\frac{۲۸}{۷۰} < \frac{۳۰}{۷۰} < \frac{۳۵}{۷۰}$، پس: $۰/۴ < \frac{۳}{۷} < ۰/۵$.

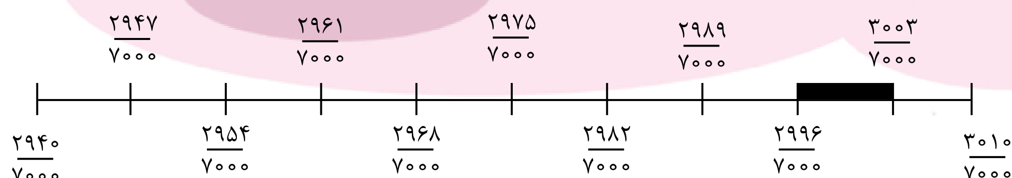
۲. حال بازهٔ $[\frac{۲۸}{۷۰}, \frac{۳۵}{۷۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



باید دید که $\frac{۳}{۷}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های اخیر قرار دارد. توجه می‌کنیم که:
$\frac{۳۰۰}{۷۰۰} = \frac{۳}{۷}$ و $\frac{۲۹۴}{۷۰۰} < \frac{۳۰۰}{۷۰۰} < \frac{۳۰۱}{۷۰۰}$، (۳۰۱ و ۲۹۴ نیز مضرب‌های متوالی ۷ می‌باشند) در نتیجه: $۰/۴۲ < \frac{۳}{۷} < ۰/۴۳$.

۳. در این مرحله می‌خواهیم به سومین جملهٔ دنباله تقریبات اعشاری $\frac{۳}{۷}$ دسترسی یابیم. بازهٔ $[\frac{۲۹۴}{۷۰۰}, \frac{۳۰۱}{۷۰۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:





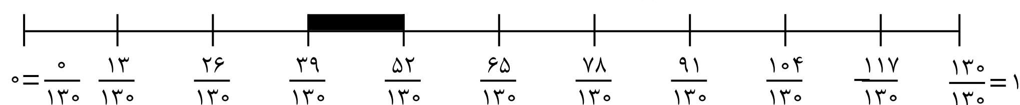
داریم: $\frac{۳۰۰۰}{۷۰۰۰}=\frac{۳}{۷}$ و $۲۹۹۶ < ۳۰۰۰ < ۳۰۰۳$، لذا: $۰/۴۲۸ < \frac{۳}{۷} < ۰/۴۲۹$.

با توجه به مراحل فوق می‌توان دید که سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\frac{۳}{۷}$ (به روش بزرگ‌نمایی ۱۰ قسمتی) به صورت زیرند: $۰/۴, ۰/۴۲, ۰/۴۲۸, \ldots$

با ادامهٔ این روش می‌توان به اندازهٔ دلخواه به $\frac{۳}{۷}$ نزدیک شد. توجه کنید که در هیچ‌کدام از مراحل فوق از عمل تقسیم استفاده نشده است.

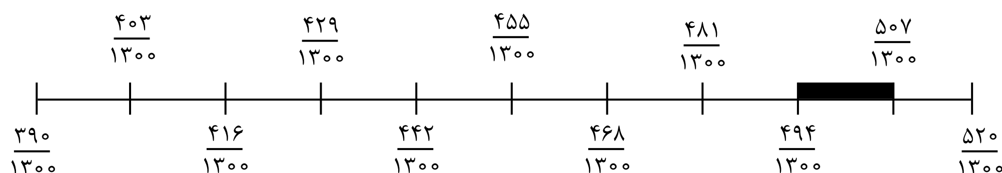
مثال ۲. دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\frac{۵}{۱۳}$ را به روش بزرگ‌نمایی بیابید. پاسخ را به صورت خلاصه می‌آوریم:

مرحلهٔ اول: ابتدا توجه می‌کنیم که: $۰ < \frac{۵}{۱۳} < ۱$



$$\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰}{۱۳۰}, ۳۹<۵۰<۵۲ \Rightarrow \frac{۳۹}{۱۳۰}<\frac{۵۰}{۱۳۰}<\frac{۵۲}{۱۳۰} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰}<\frac{۵}{۱۳}<\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳}{۱۰},\frac{۴}{۱۰}]$$

مرحلهٔ دوم: بازهٔ $[\frac{۳}{۱۰},\frac{۴}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



$$\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰}{۱۳۰}=\frac{۵۰۰}{۱۳۰۰}, ۴۹۴<۵۰۰<۵۰۷ \Rightarrow \frac{۴۹۴}{۱۳۰۰}<\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۰۰}{۱۳۰۰}<\frac{۵۰۷}{۱۳۰۰}\Rightarrow \frac{۳۸}{۱۰۰}<\frac{۵}{۱۳}<\frac{۳۹}{۱۰۰}$$

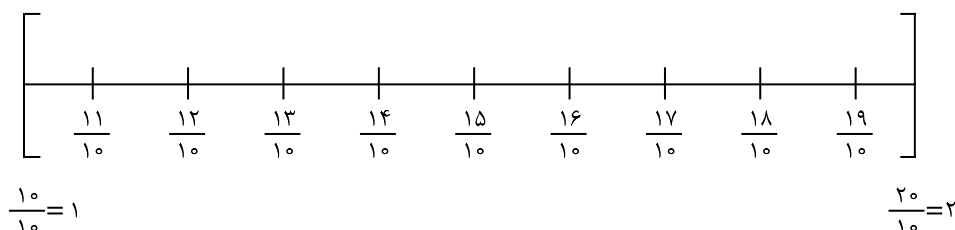
مرحلهٔ سوم: دیدیم که: $\frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳۸}{۱۰۰},\frac{۳۹}{۱۰۰}]$. این بازه را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم و به سادگی خواهیم دید که: $\frac{۵}{۱۳}\in[\frac{۳۸۴}{۱۰۰۰},\frac{۳۸۵}{۱۰۰۰}]$

پس سه جملهٔ اول دنبالهٔ تقریبات اعشاری کسر $\frac{۵}{۱۳}$ به صورت مقابلند: ۰/۳،۰/۳۸،۰/۳۸۴،...

اکنون به چند مثال از کاربرد روش بزرگ‌نمایی برای یافتن دنبالهٔ تقریبات اعشاری اعداد گنگ توجه فرمایید:

الف) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{۳}$ نزدیک می‌شوند

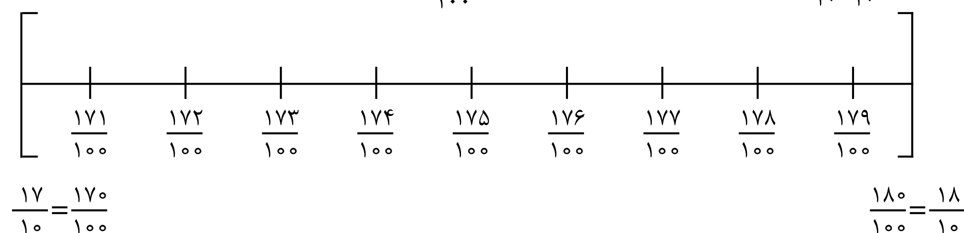
۱. می‌دانیم: $۲^۲>۳>۱^۲$، بنابراین: $۲>\sqrt{۳}>۱$. حال بازهٔ [۱,۲] را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی تقسیم می‌کنیم:



حال باید دید که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق قرار دارد.

توجه می‌کنیم که $\frac{۳۰۰}{۱۰۰}=۳$ و $\frac{۲۸۹}{۱۰۰}<\frac{۳۰۰}{۱۰۰}<\frac{۳۲۴}{۱۰۰}$. در نتیجه: $\frac{۱۷}{۱۰}<\sqrt{۳}<\frac{۱۸}{۱۰}$، پس: $۱/۷<\sqrt{۳}<۱/۸$.

۲. حال بازهٔ $[\frac{۱۷}{۱۰},\frac{۱۸}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



باید دید که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های اخیر واقع است. ناچاریم از مربع کسرهای اخیر استفاده کنیم. توجه می‌کنیم که:

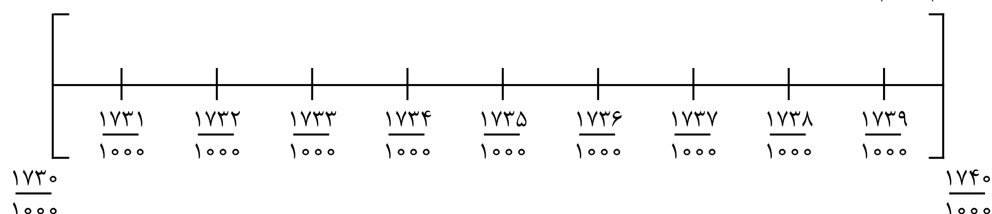
$$\frac{(۱۷۳)^۲}{(۱۰۰)^۲}=\frac{۲۹۹۲۹}{۱۰۰۰۰}<۳=\frac{۳۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}<(\frac{۱۷۴}{۱۰۰})^۲=\frac{۳۰۲۷۶}{۱۰۰۰۰}$$

در نتیجه: $\frac{۱۷۳}{۱۰۰}<\sqrt{۳}<\frac{۱۷۴}{۱۰۰}$.

پس: $۱/۷۳<\sqrt{۳}<۱/۷۴$

۳. به سومین مرحله خوش آمدید! در این مرحله می‌خواهیم به سومین جملهٔ دنبالهٔ تقریبات اعشاری $\sqrt{۳}$ برسیم. برای پرهیز از تکراری‌شدن محاسبات، به همین مرحله اکتفا خواهیم کرد.

بازهٔ $[\frac{۱۷۳}{۱۰۰},\frac{۱۷۴}{۱۰۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:





حال ببینیم که $\sqrt{۳}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق قرار می‌گیرد. باز هم مانند مرحلهٔ قبل از مربع کسرها استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(\frac{۱۷۳۲}{۱۰۰۰})^۲ = \frac{۲۹۹۹۸۲۴}{۱۰۰۰۰۰۰} < ۳ = \frac{۳۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰} < \frac{۳۰۰۳۲۸۹}{۱۰۰۰۰۰۰} = (\frac{۱۷۳۳}{۱۰۰۰})^۲$$

در نتیجه: $\frac{۱۷۳۲}{۱۰۰۰} < \sqrt{۳} < \frac{۱۷۳۳}{۱۰۰۰}$ یا: $۱/۷۳۲ < \sqrt{۳} < ۱/۷۳۳$.

با توجه به مراحل فوق می‌توان دید که سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۳}$ به صورت زیرند:

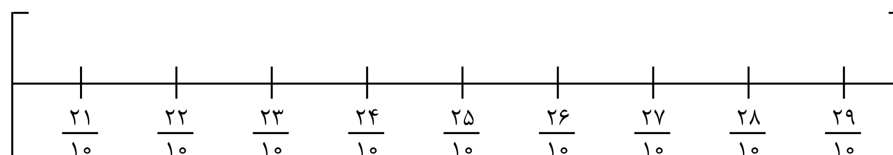
$۱/۷, ۱/۷۳, ۱/۷۳۲, ...$

با ادامه این روش می‌توان به اندازهٔ دلخواه به $\sqrt{۳}$ نزدیک شد.

ب) یافتن دنباله‌ای از تقریبات اعشاری که به $\sqrt{۷}$ نزدیک می‌شوند

به عنوان مثالی دیگر به سراغ $\sqrt{۷}$ می‌رویم و سه جملهٔ نخست دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری آن را پیدا می‌کنیم.

۱. می‌دانیم: $۲^۲ < ۷ < ۳^۲$، بنابراین: $۲ < \sqrt{۷} < ۳$. حال بازهٔ $[۲,۳]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰}$ تقسیم می‌کنیم.

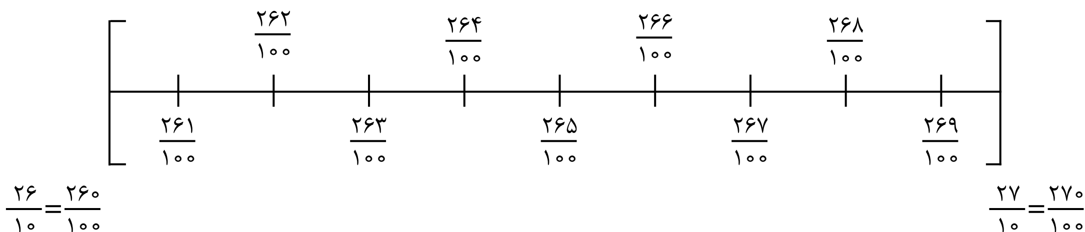


$۲ = \frac{۲۰}{۱۰}$ $\quad$ $۳ = \frac{۳۰}{۱۰}$

باید دید که $\sqrt{۷}$ در کدام‌یک از زیربازه‌های فوق واقع است. به این منظور از مربع کسرهای بالا کمک می‌گیریم.

$(\frac{۲۶}{۱۰})^۲ = \frac{۶۷۶}{۱۰۰} < ۷ = \frac{۷۰۰}{۱۰۰} < \frac{۷۲۹}{۱۰۰} = (\frac{۲۷}{۱۰})^۲$ پس $\frac{۲۶}{۱۰} < \sqrt{۷} < \frac{۲۷}{۱۰}$ یا $۲/۶ < \sqrt{۷} < ۲/۷$

۲. در این مرحله بازهٔ $[\frac{۲۶}{۱۰},\frac{۲۷}{۱۰}]$ را به ۱۰ زیربازه با طول‌های مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:



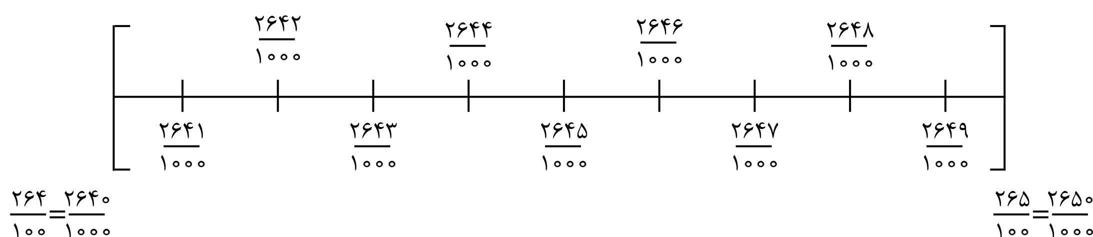
مجدداً از مربع کسرهای فوق استفاده می‌کنیم. داریم:

$(\frac{۲۶۴}{۱۰۰})^۲ = \frac{۶۹۶۹۶}{۱۰۰۰۰} < ۷ = \frac{۷۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} < \frac{۷۰۲۲۵}{۱۰۰۰۰} = (\frac{۲۶۵}{۱۰۰})^۲$ پس $\frac{۲۶۴}{۱۰۰} < \sqrt{۷} < \frac{۲۶۵}{۱۰۰}$ یا $۲/۶۴ < \sqrt{۷} < ۲/۶۵$

۳. در سومین مرحله قصد داریم سومین جملهٔ دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{۷}$ را پیدا کنیم. با استفاده از مرحلهٔ قبل به سراغ بازهٔ $[\frac{۲۶۴}{۱۰۰},\frac{۲۶۵}{۱۰۰}]$ می‌رویم و آن را به ۱۰ زیربازهٔ هر کدام به طول $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تقسیم می‌کنیم:







به همین ترتیب لازم است از مربع کسرهای فوق کمک بگیریم. داریم:

$$(\frac{2645}{1000})^2=\frac{6996025}{1000000}<7=\frac{7000000}{1000000}<\frac{7001316}{1000000}=(\frac{2646}{1000})^2$$

پس: $\frac{2646}{1000}>\sqrt{7}>\frac{2645}{1000}$ یا: $2/646>\sqrt{7}>2/645$.

لذا دنبالهٔ تقریب‌های اعشاری $\sqrt{7}$ چنین است:

$2/6, 2/64, 2/645, ...$

می‌توان دید که جملهٔ چهارم این دنباله ۲/۶۴۵۷ است که تقریب دقیق‌تر از $\sqrt{7}$ محسوب می‌شود.

دو مثال فوق به وضوح دقت عمل و در عین حال سادگی یک روش مناسب برای محاسبهٔ تقریب اعداد گنگی نظیر $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ را توسط اعداد گویا نمایان می‌کنند. در هر حال این عددهای گویا، شکل ویژه‌ای دارند که مخرج آن‌ها توان‌هایی از ۱۰ هستند.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: یک حکایت خواندنی از زندگی جان نپر



احتمالاً با نام **جان نپر** آشـنا هسـتید. او مخترع لگاریتم طبیعی و ریاضی‌دان بنام اسـکاتلندی است که در فاصلهٔ سال‌های ۱۶۱۷-۱۵۵۰ می‌زیست. وی علاوه بر ریاضیات در مهندسی، فیزیک و تردستی نیز مهارت داشت. هم عصران وی به دلیل نبوغ خارق‌العاده‌ای که داشت، معتقد بودند که او در جادو و سحر نیز دستی دارد. خود او با کارهایش به این تصور دامن می‌زد. حکایت زیر معرف این وجه از شخصیت اوست.



زمانی نپر احسـاس کرد که یکی از خدمتکارانـش از او دزدی می‌کند. همهٔ خدمتکارانش را گرد آورد و به آن‌ها اعلام کرد که خروس سیاه پرکلاغی‌اش می‌تواند دزد را شناسایی کند. پیش از آن و دور از چشـم خدمتکاران، او پرهای خروسـش را به دودهٔ ذغال آغشته کرده بود و او را روی میزی در اتاق تاریکی قرار داده بود. سپس یکی‌یکی خدمتکاران را به نوبت به داخل اتاق تاریک می فرستاد و از آن‌ها می‌خواست که پشت خروس را نوازش کنند تا به زعم او، خروس، دزد را شناسایی کند! وقتی خدمتکاران بیرون می‌آمدند، نپر دست‌های آن‌ها را نگاه می‌کرد. خدمتکار مجرم کسی بود که از ترس پشت خروس را لمس نکرده بود و در نتیجه دست‌هایش تمیز بودند!



توابع متناوب و توابع نامتناوب

ر.ای. اسمیرنووا
ترجمه: ابراهیم دارابی

در طبیعــت و صنعــت جریان‌هایی وجــود دارند که در زمان‌های معینی متناوباً تکرار می‌شــوند. این نوع جریان‌ها را «متناوب» می‌نامند و به کمک توابع متناوب تعریف می‌کنند.

تعریف: فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در دامنهٔ تعریف $D(f)$ مفروض باشد. تابع $f(x)$ را در این دامنه متناوب می‌نامند اگر عدد مثبتی مانند T وجود داشــته باشد به‌طوری که برای هر $x\in D$ داشته باشیم:

$$۱)\ x+T\in D(f)$$
$$۲)\ x-T\in D(f)$$
$$۳)\ f(x+T)=f(x)$$

هر وقت از توابع متناوب سخن به میان می‌آید، دانش‌آموزان به‌درستی از توابع مثلثاتی نام می‌برند. اما آن‌ها باید بدانند که عــلاوه بر توابع مثلثاتی، توابع غیرمثلثاتی هم وجود دارند که متناوب هســتند. در این مقاله با این نوع توابع آشنا می‌شویم. مثلاً توابع $y=\{x\}$* ، $y=۳, x\in R$ متناوب‌اند. توابع متناوب را غالباً به صورت زیر هم تعریف می‌کنند:

$$y=f(g(x))$$

کــه در آن g تابــع متنــاوب و f تابــع دلخواهی اســت. به‌عنوان مثال توابع زیر متناوب هستند:

$$y=\cos^{۲}۳x,\ y=\log\cos x,\ y=|\sin ۲x|$$

دانش‌آموزان رشــتهٔ ریاضــی معمولاً با مســائلی مواجه می‌شوند که در آن‌ها از دانش‌آموز خواسته می‌شود ثابت کنند تابعی متناوب اســت. در اینجا دانش‌آموزان ابتدا متناوب‌بودن تابع را حدس می‌زنند و سپس با استفاده از تعریف تابع متناوب، به اثبات آن می‌پردازند.

برای اثبات نامتناوب‌بودن تابع، به دو طریق عمل می‌شود:

۱. با استفاده از تعریف تابع متناوب؛

۲. با استفاده از تعریف تابع نامتناوب.

تعریف: تابع نامتناوب تابعی است که تعریف تابع متناوب در آن صدق نمی‌کند.

یعنی تابع $f(x)$ نامتناوب نامیده می‌شــود، اگر به ازای هر $T>۰$ عددی مانند $x\in D(f)$ یافت شود؛ طوری که حداقل یکی از شــرایط سه‌گانه که در تعریف تابع متناوب آورده شده است، برقرار نباشد.

مثال ۱. ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ متناوب نیست.

اثبــات: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی منهای $x=۰$ است.

فــرض کنیــم T عــدد مثبــت دلخــواه باشــد. چــون $T\neq ۰$، پــس $x_۰=-T$ بــه دامنــهٔ تابــع تعلــق دارد. امــا داریم:

$$x_۰+T=(-T)+T=۰,\ x_۰+T\notin D(f)$$

یعنی شــرط (۱) در تعریف تابع متناوب نقض شده است. پس تابع $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ متناوب نیست.

مثال ۲. ثابت کنید تابع $f(x)=x^{۲}$ متناوب نیست.

اثبات:

روش اول: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین برای هر T دلخواه نقاط $x+T$ و $x-T$ در دامنهٔ تعریف تابع قرار دارند. پس لازم است ثابت کنیم به ازای هر $T>۰$ حداقل یک مقدار برای x وجود دارد که در ازای آن داشته باشیم:

$$f(x+T)\neq f(x)$$

در حالت خاص می‌تــوان $x=۰$ را در نظر گرفت. در این صورت داریم:

$$f(x)=f(۰)=۰,\ f(x+T)=f(T)=T^{۲}>۰$$
$$\Rightarrow f(x+T)\neq f(x)$$

روش دوم: برای اثبات نامتناوب بودن تابع می‌توان از قضیهٔ زیر استفاده کرد:

قضیــه: اگر همهٔ توابع متناوب چند ویژگی داشــته باشــند، هر تابعی که یکی از این ویژگی‌ها را نداشــته باشــد، متناوب نیست.

ویژگی‌های توابع متناوب

۱. اگر نقطهٔ x_0 به دامنهٔ تابع متناوب با دورهٔ تناوب T تعلق داشته باشد، آن‌گاه همهٔ نقاط $x_0 + nT$ به دامنهٔ تابع تعلق دارد. که در آن n عدد صحیح دلخواه است. این نشان می‌دهد که دامنهٔ توابع متناوب شامل همهٔ اعداد مثبت و منفی از بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ هستند.

از آنجا نتیجه می‌شود که مثلاً تابع $y = \log_a^x$ متناوب نیست، زیرا هر $x \le ۰$ به دامنهٔ تابع تعلق ندارد.

۲. برای تابع متناوب f(x) در ازای xهایی که از نظر تعداد نامتناهی باشند، مقادیر نظیری پیدا می‌شوند که بین آن‌ها اعداد مثبت و منفی از نظر قدرمطلق هر چه‌قدر که بزرگ باشند، وجود دارند. این ویژگی از تساوی زیر نتیجه می‌شود که دربارهٔ توابع متناوب با دورهٔ $T > ۰$ همواره صادق است:

$$f(x + nT) = f(x)$$

و در آن داریم: $T > ۰, x \in Z$

در حالت خاص تابع متناوب در دامنهٔ تعریف خود نمی‌تواند صعودی یا نزولی یکنوا باشد.

مثلاً تابع $y = a^x\ (a \ne ۰)$ متناوب نیست، زیرا تابع صعودی یکنوا است.

۳. توابع متناوب در دامنهٔ تعریف خود نمی‌توانند از نقطه‌نظر تعداد، نقاط انفصال متناهی داشته باشند. مثلاً تابع $y = \frac{۱}{x(x-۲)}$ متناوب نیست؛ زیرا تنها دارای دو نقطهٔ انفصال است: $x = ۲$ و $x = ۰$. منظور از نقطهٔ انفصال همان نقطهٔ ناپیوستگی است.

۴. اگر تابع f(x) متناوب و در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده باشد، آن‌گاه معادلهٔ:

$$f(x + T) = f(x)$$

که در آن T به عنوان مجهول و x پارامتر در نظر گرفته می‌شود، دست‌کم یک ریشهٔ مثبت مانند $T = T_0$ خواهد داشت که به ازای همهٔ مقادیر پارامتر $x \in R$ در معادله صدق می‌کند.

مثال ۳. ثابت کنید تابع $f(x) = \{x\} + \sin x$ متناوب نیست.

اثبات: فرض کنیم تابع با دورهٔ تناوب $T > ۰$ متناوب باشد (تناقض)، در این صورت به ازای هر x دلخواه تساوی زیر برقرار است:

$$\{x + T\} + \sin(x + T) = \{x\} + \sin x$$

این تساوی به ازای $x = ۰$ هم برقرار است:

$$\{T\} + \sin T = ۰ \quad (۱)$$

به ازای $x = -T$ داریم:

$$\{-T\} - \sin T = ۰ \quad (۲)$$

از جمع تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\{T\} + \{-T\} = ۰$$

جزء اعشاری هر عدد، همواره نامنفی است، پس:

$$\{T\} = \{-T\} = ۰$$

یعنی T عدد صحیح است. اگر: $\{T\} = ۰$، آن‌گاه از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود: $\sin T = ۰$ و یا $T = k\pi, k \in Z$. اما اگر $k \ne ۰$، آن‌گاه $T = k\pi$ عدد صحیح نیست.

بنابراین معادله‌های (۱) و (۲) تنها یک ریشهٔ مشترک $T = ۰$ دارند. پس تابع f(x) متناوب نیست.

۵. اگر در تابع متناوب f(x) با دورهٔ تناوب T، در بازه‌ای مانند $[a, a + T]$ نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|f(x)| \le M$$

آن‌گاه این نامساوی به ازای همهٔ مقادیر متغیر x برقرار است.

از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر تابع متناوب f(x) به ازای همهٔ مقادیر حقیقی تعریف شده و پیوسته باشد، آن‌گاه عددی مانند $M > ۰$ وجود دارد که به ازای همهٔ مقادیر $x \in R$ تساوی زیر برقرار است:

$$|f(x)| \le M$$

تمرین همراه با حل

مسئلهٔ ۱. ثابت کنید تابع $f(x) = |\sin x|$ با دورهٔ تناوب π متناوب است.

حل: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین به ازای هر x نقاط $x + T$ و $x - T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند. پس تساوی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$f(x + \pi) = f(x)$$

داریم:

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

مسئلهٔ ۲. دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^۴ x + \sin x$ را پیدا کنید.

حل: دامنهٔ تابع مجموعه اعداد حقیقی است. پس به ازای هر x از دامنه، اعداد $x + T$ و $x - T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند. عدد ۲π دورهٔ تناوب تابع است، زیرا:

$$\cos^۴(x + ۲\pi) + \sin(x + ۲\pi) = \cos^۴ x + \sin x$$

ثابت می‌کنیم هیچ عدد مثبتی مانند T کوچک‌تر از ۲π دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ نیست.

فرض کنیم چنین نباشد (تناقض). عددی مانند T وجود دارد که دورهٔ تناوب تابع است و در ضمن: $۰ < T < ۲\pi$.

عدد $x = -\frac{T}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. مقدار $f(-\frac{T}{۲})$ باید برابر باشد با: $f(-\frac{T}{۲}+T) = f(\frac{T}{۲})$

اما داریم:

$$\cos^۴(-\frac{T}{۲}) + \sin(-\frac{T}{۲}) \neq \cos^۴(-\frac{T}{۲}) + \sin\frac{T}{۲}$$

زیرا: $\sin(-\frac{T}{۲})$ و $\sin(\frac{T}{۲})$ متمایز از صفر و از نظر علامت متمایز، اما $\cos(-\frac{T}{۲})$ و $\cos(\frac{T}{۲})$ همانند هستند و این تناقض است.

مسئلهٔ ۳. دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x) = ۳\cos x + \cos ۲x$ را پیدا کنید.

حل: دامنهٔ تابع همهٔ اعداد حقیقی هستند. فرض کنیم T دوره تناوب تابع باشد. در این صورت به ازای هر x داریم:

$$۳\cos(x+T) + \cos(۲(x+T)) = ۳\cos x + \cos ۲x$$

به ازای $x = ۰$ تساوی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$۳\cos T + \cos ۲T = ۴ \qquad (۱)$$

چون $\cos T \leq ۱$ و $\cos ۲T \leq ۱$ پس داریم:

$$۳\cos T + \cos ۲T \leq ۴ \qquad (۲)$$

بنابراین T در دستگاه زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} \cos T = ۱ \\ \cos ۲T = ۱ \end{cases}$$

کوچک‌ترین ریشهٔ مثبت دستگاه $T = ۲\pi$ است.

با امتحان کردن معلوم می‌شود $T = ۲\pi$ دورهٔ تناوب تابع است. زیرا برای هر x اعداد $x+T$ و $x-T$ به دامنهٔ تابع تعلق دارند و داریم:

$$۳\cos(x+۲\pi) + \cos(۲(x+۲\pi)) = ۳\cos x + \cos ۲x$$

مسئلهٔ ۴: ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{۱۰x^۲ - x + ۱}{x^۲ + x + ۱}$ متناوب نیست.

حل: قرار می‌دهیم $a = \frac{۱۰x^۲ - x + ۱}{x^۲ + x + ۱}$ که در آن a عددی ثابت متعلق به مجموعه مقادیر برد تابع است. از تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$(۱۰-a)x^۲ - (a+۱)x + ۱ - a = ۰$$

از آنجا معلوم می‌شود که این معادله بیش از دو ریشه ندارد. بنابراین تابع $f(x)$ در بیش از دو نقطه نمی‌تواند مقادیر نظیر خود را اختیار کند. پس بنا بر ویژگی ۲ تابع نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئلهٔ ۵. نامتناوب بودن تابع $f(x) = \text{Arc}\sin x$ را ثابت کنید.

حل: تابع در بازه $[-۱,+۱]$ تعریف‌پذیر است. بنابراین، بنابر ویژگی ۱ نمی‌تواند متناوب باشد.

مسئلهٔ ۶. نامتناوب بودن تابع $f(x) = ۲x\cos(x^۲)$ را ثابت کنید

حل: دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است. از راه تناقض حکم مسئله را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن $T > ۰$ باشد. چون تابع $f(x)$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف‌پذیر است و در ازای $x \in [۰,T]$ داریم: $|f(x)| \leq ۲T$، بنابر ویژگی ۵ به ازای هر $x \in R$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|۲x\cos(x^۲)| \leq T$$

اما اگر n طوری باشد که داشته باشیم: $\sqrt{۲\pi n} > T$، آن‌گاه نامساوی بالا به ازای $x = \sqrt{۲\pi n}$ برقرار نیست و این تناقض است.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید تابع $f(x) = \cos\log|x|$ متناوب نیست.

حل: دامنهٔ تعریف تابع مجموعه اعداد حقیقی به جز $x = ۰$ است؛ یعنی: $D(f) = (-\infty,۰) \cup (۰,+\infty)$. اگر تابع $f(x)$ متناوب با دورهٔ $T > ۰$ باشد، آن‌گاه چون $T \in D(f)$ است، بنابر تعریف توابع متناوب باید نتیجه بگیریم: $۰ = T - T \in D(f)$ و این درست نیست.

مسئلهٔ ۸. ثابت کنید تابع $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$ متناوب نیست.

حل: فرض می‌کنیم تابع، متناوب و دورهٔ تناوب آن T باشد.

عدد مثبت x را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط $\sin\sqrt{x} = ۱$ صدق کند. در آن صورت داریم: $\sin\sqrt{x+T} = \sin\sqrt{x} = ۱$؛ یعنی:

$$\sqrt{x+T} - \sqrt{x} = ۲\pi x, \ x \in N$$

واضح است که: $\sqrt{x+T} \geq \sqrt{x}$ و بنابراین: $\sqrt{x+T} \geq ۲\pi + \sqrt{x}$.

در هر دو طرف نامساوی اعداد مثبت قرار دارند. بنابراین می‌توانیم طرفین آن‌را مجذور کنیم. خواهیم داشت:

$$x + T \geq ۴\pi^۲ + ۴\pi\sqrt{x} + x$$
$$\Rightarrow T \geq ۴\pi^۲ + ۴\pi\sqrt{x}$$

که این تناقض است. زیرا $\sqrt{x}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که هرچه بیشتر بزرگ باشد؛ یعنی به ازای مقدار ثابت T نامساوی اخیر نمی‌تواند برقرار باشد.

پی‌نوشت

* منظور از $\{x\}$ جزء اعشاری x، یعنی $x-[x]$ است که $[x]$ جزءصحیح x است. مثلاً: $\{۱/۲\} = ۰/۲$ و $\{-۲/۷\} = ۰/۳$. توجه دارید که: $[x] \in Z$ و $\{x\} \geq ۰$.

منبع

مجلهٔ ریاضیات در مدرسه، شمارهٔ ۱۱، سال ۲۰۰۲، چاپ مسکو.

هوشنگ شرقی

المپیاد ریاضی در رومانی



کلیدواژه‌ها: رومانی، المپیاد ریاضی، تابع یک‌به‌یک، پنج‌ضلعی محدب، نقطهٔ شبکه‌ای

اگر چنان که قبلاً گفته‌ایم، مجارستان را می‌توان بنیان‌گذار المپیاد ریاضی دانست، بدون تردید رومانی را می‌توان مهد المپیادهای ریاضی و پایه‌گذار المپیاد بین‌المللی ریاضی دانست. چرا که این کشور از نخستین کشورهای پیشنهاددهندهٔ این رقابت‌ها و میزبان دو دورهٔ نخست آن بوده است. در طول سال‌های برگزاری این مسابقات، رومانی پنج دوره در سال‌های ۱۹۵۹ (نخستین دوره)، ۱۹۶۰، ۱۹۶۹، ۱۹۷۸، ۱۹۹۹ میزبان بوده و در پنج دوره نیز در سال‌های ۱۹۵۹، ۱۹۷۸، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷ و ۱۹۹۶ مقام نخست این رقابت‌ها را به‌دست آورد. در سال‌های دیگر نیز بارها به مقام‌های بالای این مسابقات جهانی دست یافته است.

در رومانی نیز، مانند مجارستان، از سال‌های پایانی قرن نوزدهم مسابقات ریاضی دبیرستانی آغاز شد. از سال ۱۹۰۲ این مسابقات توسط مجلهٔ معتبر ریاضی «Gazeta Matematica» برگزار می‌شد.

تا سال ۱۹۴۸ مسابقات در دو مرحله انجام می‌شدند. از سال ۱۹۶۱، کار برگزاری المپیادها به‌عهدهٔ وزارت آموزش‌وپرورش قرار گرفت که تا امروز هم ادامه دارد. در حال حاضر المپیاد ریاضی رومانی در سه مرحله انجام می‌گیرد و مسائل المپیاد در مجلهٔ مزبور چاپ می‌شوند.

در کشور رومانی گروه‌های متعددی دست‌اندرکار برگزاری مسابقه‌های ریاضی هستند و دانشجویان و استادان بسیاری در این زمینه به شدت فعال‌اند که از میان آن‌ها استادان نام‌آوری نیز ظهور کرده‌اند که از جملهٔ معروف‌ترین آن‌ها می‌توان از تیتو آندرسکو نام برد که سال‌ها مدیریت تیم‌های المپیاد ریاضی رومانی را به‌عهده داشت. وی پس از اخذ تابعیت جدید، مدیریت و هدایت تیم المپیاد ریاضی کشور آمریکا را به‌عهده گرفت و هنوز هم در این زمینه فعال است.

در میان مسائلی که در المپیادهای داخلی کشور رومانی طی سال‌های متمادی طرح شده‌اند، مسائل بسیار خوب و بسیار دشواری را می‌توان یافت. در این‌جا منتخبی از مسائل چند سال متفاوت را آورده‌ایم و سعی کرده‌ایم نمونه‌هایی را انتخاب کنیم که سطح متوسطی داشته و برای عموم دانش‌آموزان قابل فهم و استفاده باشند. راه‌حل‌ها در پی آمده‌اند.

صورت مسائل

۱. ثابت کنید، عددهای مثبت و گنگ a و b به‌گونه‌ای وجود دارند که به ازای آن‌ها، a^b عددی طبیعی باشد (۱۹۷۵).

۲. ثابت کنید برای هر تقسیمی که مجموعهٔ $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ را به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم افراز کند، دست کم یکی از زیرمجموعه‌های حاصل شامل سه عدد است که مجموع دو تا از آن‌ها، با دو برابر سومی برابر است (۱۹۷۸).

۳. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید (۱۹۸۱):
$$x^6 + 3x^2 + 1 = y^4$$

۴. آیا تابع یک‌به‌یک $f : R \to R$ وجود دارد که در مورد آن برای هر مقدار $x \in R$ داشته باشیم: $f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$

۵. رأس‌های یک پنج ضلعی محدّب، مختصاتی صحیح دارند. ثابت کنید مساحت این پنج ضلعی حداقل مساوی $\frac{5}{2}$ است (۱۹۹۸).

۶. فرض کنید AD نیم‌ساز مثلث ABC باشد. M و N به ترتیب دو نقطه روی AB و AC هستند، به‌طوری که داریم: $M\hat{D}A = A\hat{B}C$ و $N\hat{D}A = B\hat{C}A$. خطوط AD و MN نیز در P متقاطع‌اند. ثابت کنید: $AD^3 = AB.AC.AP$ (۱۹۹۹).

حل مسائل

۱. می‌توانیم دو عدد مثبت $\sqrt{۲}$ و $\log_{\sqrt{۲}}^{۳}$ را در نظر بگیریم. با توجه به رابطهٔ $a^{\log_a^x} = x$ داریم:

$$(\sqrt{۲})^{\log_{\sqrt{۲}}^{۳}} = ۳ \in N$$

می‌دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است و $\log_{\sqrt{۲}}^{۳}$ نیز گنگ است، زیرا در غیر این صورت عددهای صحیح و مثبت m و n یافت می‌شوند که:

$$\log_{\sqrt{۲}}^{۳} = \frac{m}{n}, n \neq ۰$$

و در این صورت داریم:

$$(\sqrt{۲})^{\frac{m}{n}} = ۳ \Rightarrow (\sqrt{۲})^{\frac{۲m}{n}} = ۹ \Rightarrow ((\sqrt{۲})^{۲})^{\frac{m}{n}} = ۹$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{m}{n}} = ۹ \Rightarrow ۲^m = ۹^n$$

که این تساوی غیرممکن است. (چرا؟)

می‌توانستیم عددهای گنگ $۲^{\sqrt{۲}}$ و $\sqrt{۲}$ را نیز در نظر بگیریم: $(۲^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۴$ ولی اثبات گنگ بودن $۲^{\sqrt{۲}}$ کار ساده‌ای نیست!

۲. فرض می‌کنیم: $X = A \cup B$ و $۵ \in A$. با برهان خلف درستی حکم را نشان می‌دهیم:

فرض می‌کنیم هیچ یک از دو مجموعهٔ A و B شامل هیچ سه عددی نباشند که مجموع دو تا از عددها مساوی دو برابر سومی باشد. اگر $۳ \in A$ باشد، آن‌گاه با توجه به شرط فوق داریم: $۱ \notin A$ $(۱+۵ = ۲\times۳)$، $۴ \notin A$ $(۵+۳ = ۲\times۴)$ و $۷ \notin A$ $(۷+۳ = ۲\times۵)$. پس: $۱ \in B$، $۴ \in B$ و $۷ \in B$. ولی در این صورت داریم: ۴×۲=۱+۷ و شرط فوق نقض می‌شود. پس لازم است که: $۳ \notin A$ و در نتیجه: $۳ \in B$. اما اگر: $۷ \in A$، آن‌گاه: $۶ \notin A$ $(۷+۵ = ۲\times۶)$، $۳ \notin A$ $(۷+۳ = ۲\times۵)$ و $۹ \notin A$ $(۹+۵ = ۲\times۷)$، پس: $۳,۶,۹ \in B$. ولی در این صورت ۶×۲=۳+۹ و تناقض ایجاد می‌شود. پس لازم است که: $۷ \in B$.

همچنین یکی از دو عدد ۴ و ۶ نیز باید در B باشند، زیرا ۴، ۵ و ۶ نمی‌توانند با هم عضو A باشند (۵×۲=۶+۴). فرض کنید: $۴ \in B$، در این صورت نتیجه می‌شود: $۲ \notin B$ (زیرا در غیر این صورت $۲,۳,۴ \in B$، $۲+۴ = ۲\times۳$). لـذا: $۲ \in A$ و از آنجا: $۸ \notin A$ (زیرا در غیر این صورت: $۲,۵,۸ \in A$، $۸+۲ = ۲\times۵$). و نیز: $۸ \in B$ و از آنجا: $۶ \notin B$ (زیرا در غیر این صورت $۴,۶,۸ \in B$، $۴+۸ = ۲\times۶$). در نتیجه: $۶ \in A$ و در ضمن: $۹ \notin B$ (زیرا در غیر این صورت $۷,۸,۹ \in B$، $۷+۹ = ۲\times۸$). پس داریم: $۹ \in A$.

حال اگر $۱ \in A$ باشد، آن‌گاه: $۱,۵,۹ \in A$، $۹+۱ = ۲\times۵$ و اگر $۱ \in B$ باشد، آن‌گاه: $۱,۴,۷ \in B$، $۱+۷ = ۲\times۴$. یعنی در هر حال یکی از دو زیرمجموعهٔ A یا B دارای یک سه‌تایی به صورت فوق هستند. در حالت دیگر هم، با شرط $۶ \in B$ به همین نتیجه می‌رسیم.

۳. فرض کنیم عددهای صحیح x و y در برابری فوق صدق کنند. در این صورت اگر $x > ۰$، با توجه به اتحادهای $(x^۳+۱)^۲ = x^۶+۲x^۳+۱$ و $(x^۳+۲)^۲ = x^۶+۴x^۳+۴$ داریم:

$$(x^۳+۱)^۲ < y^۴ = x^۶+۳x^۳+۱ < (x^۳+۲)^۲$$

$$\Rightarrow x^۳+۱ < y^۲ < x^۳+۲ \Rightarrow y^۲ \notin Z \Rightarrow y \notin Z$$

همچنین، اگر $x \leq -۲$ باشد، آن‌گاه: $x^۳+۳ < ۰$ و در نتیجه:

$$x^۶+۴x^۳+۴ < x^۶+۳x^۳+۱$$

$$\Rightarrow (x^۳+۲)^۲ < y^۴ < (x^۳+۱)^۲$$

$$\Rightarrow |x^۳+۲| < y^۲ < |x^۳+۱|$$

$$\Rightarrow -(x^۳+۲) < y^۲ < -(x^۳+۱)$$

و باز هم $y^۲ \notin Z$ و در نتیجه: $y \notin Z$.

پس فقط به ازای $-۲ < x \leq ۰$ ممکن است معادله جواب داشته باشد. به ازای $x = -۱$ نتیجه می‌شود: $y^۴ = -۱$ که جوابی ندارد و به ازای $x = ۰$ نتیجه می‌شود: $y = \pm۱$. بنابراین معادله فقط دو دسته جواب دارد: $(۰,۱)$ و $(۰,-۱)$.

۴. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، با قرار دادن $x = ۰$ و $x = ۱$ در نابرابری فوق نتیجه می‌شود:

$$x = ۰ \Rightarrow f(۰) - [f(۰)]^۲ \geq \frac{۱}{۴} \Rightarrow [f(۰)]^۲ - f(۰) + \frac{۱}{۴} \leq ۰$$

$$\Rightarrow (f(۰) - \frac{۱}{۲})^۲ \leq ۰ \Rightarrow f(۰) - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow f(۰) = \frac{۱}{۲}$$

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) - [f(۱)]^۲ \geq \frac{۱}{۴} \Rightarrow (f(۱))^۲ - f(۱) + \frac{۱}{۴} \leq ۰$$

$$\Rightarrow (f(۱) - \frac{۱}{۲})^۲ \leq ۰ \Rightarrow f(۱) - \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow f(۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(۰) = f(۱) = \frac{۱}{۲}$$

پس f یک‌به‌یک نخواهد بود و لذا چنین تابعی وجود ندارد.

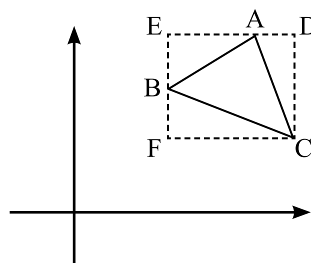
۵. یک قضیهٔ شــناخته شــده در ترکیبیات می‌گوید که اگر پنــج نقطهٔ شــبکه‌ای (نقطهٔ با مختصات صحیح) داشــته باشــیم، وســط پاره‌خط و اصل بین دو تا از این نقاط، یک نقطهٔ شبکه‌ای خواهد بود. اثبات به کمک اصل لانهٔ کبوتری صورت می‌گیرد. مختصات هر نقطهٔ شبکه‌ای از نظر زوج و فرد بودن چهار حالت دارد: (فرد و فرد)، (زوج و فرد)، (فرد و زوج) و (زوج و زوج).

پــس وقتــی پنــج نقطه داشــته باشــیم، لااقــل دوتای آن‌هــا از نظــر زوج و فرد بودن مختصاتی شــبیه هم دارنــد. یعنی مجموع طول‌های آن‌ها و مجموع عرض‌های آن‌ها عددی زوج اســت و در نتیجه وســط این دو نقطه، مختصاتی صحیح دارد، زیرا: $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$ و $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$ لذا در پنج ضلعی فوق وسط یکی از اضلاع یا اقطار نقطه‌ای با مختصات صحیح چون M است.

همچنین قضیه‌ای دیگــر می‌گوید که مساحت هر مثلثی که سه رأس آن سه نقطهٔ شــبکه‌ای باشــند، مساوی $\frac{m}{۲}$ است که: $m \in N$.



زیرا مطابق شکل زیر داریم:



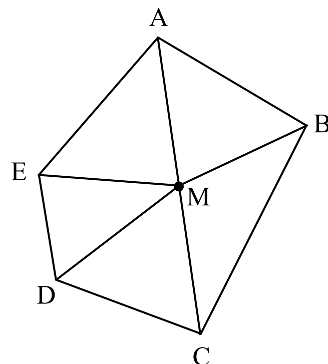
(CF، CD، DE و EF را موازی محورها رسم کرده‌ایم.)

$$S_{ABC}=S_{DCFE}-S_{ACD}-S_{BFC}-S_{ABE}$$
$$=DE.DC-\frac{AD.CD}{2}-\frac{BF.FC}{2}-\frac{AE.BE}{2}$$
$$=\frac{2DE.DC-AD.CD-BF.FC-AE.BE}{2}=\frac{m}{2}$$

ولی بدیهی است که $m\in Z$ (چرا؟) و در نتیجه درستی این قضیه هم ثابت می‌شود.

حال به مسئلهٔ اصلی برمی‌گردیم: اگر M وسط یکی از قطرهای پنج ضلعی ABCDE باشد، پس M درون پنج ضلعی است و در نتیجه:

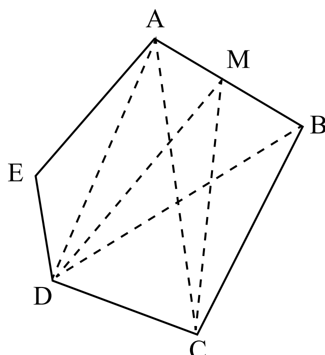
$$S_{ABCDE}=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{MCD}+S_{MDE}+S_{AME}$$



ولی رئوس همهٔ این پنج مثلث نقاطی با مختصات صحیح‌اند، پس مساحت‌های آن‌ها به صورت $\frac{m}{2}$ و لااقل مساوی $\frac{1}{2}$ است و در نتیجه: $S_{ABCDE}\ge 5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

اما اگر M وسط یکی از اضلاع (مثلاً AB) باشد، از M به دو سر یکی از اضلاع پنج ضلعی که موازی AB نباشد (مثلاً CD) وصل می‌کنیم. A و B را نیز به C و D وصل می‌کنیم.

مثلث‌های ADC، MDC و BDC در قاعدهٔ CD مشترک‌اند و چون: $AB\nparallel CD$، پس مساحت‌های هیچ دوتای آن‌ها با هم برابر نیست و به صورت صعودی مثلاً به ترتیب زیر قابل مرتب کردن هستند:



$$S_{ACD}>S_{MCD}>S_{BCD}$$

و چون هر سه مساحت به صورت $\frac{m}{2}$ هستند، پس:

$$S_{BCD}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow S_{MCD}\ge\frac{2}{2},S_{ACD}\ge\frac{3}{2}$$

و بنابراین داریم:

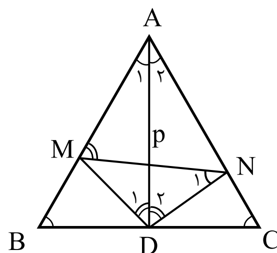
$$S_{ABCDE}=S_{ACD}+S_{AED}+S_{ABC}\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

---

۶. مطابق شکل داریم: $\hat{D}_1=\hat{B}$ و $\hat{D}_2=\hat{C}$ و در نتیجه:

$$\hat{D}_1+\hat{D}_2=\hat{B}+\hat{C}=180-\hat{A}\Rightarrow\hat{A}+M\hat{D}N=180^\circ$$

لذا چهارضلعی AMDN محاطی است و از آنجا:



$$\hat{M}=\hat{D}_2,\hat{A}_1=\hat{A}_2\Rightarrow\Delta AMP\sim\Delta ADN$$
$$\Rightarrow\frac{DN}{MP}=\frac{AD}{AM}=\frac{AN}{AP}\Rightarrow AM.AN=AP.AD(1)$$

همچنین داریم:

$$\hat{D}_2=\hat{C},\hat{A}_2=\hat{A}_2\Rightarrow\Delta ADN\sim\Delta ADC$$
$$\Rightarrow\frac{AN}{AD}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD^2=AN.AC$$
$$\hat{D}_1=\hat{B},\hat{A}_1=\hat{A}_1\Rightarrow\Delta ADM\sim\Delta ADB$$
$$\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow AD^2=AM.AB$$
$$\Rightarrow AD^4=AM.AN.AB.AC(2)$$

و با جای‌گذاری از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$AD^4=AP.AD.AB.AC\Rightarrow AD^3=AP.AB.AC$$

گزارش

پیام یونسی‌پور

یک ساعت در نمایشگاه کمک‌آموزشی میلاد طاها

اشاره

وقتی دبیر ریاضی پای تخته ایستاده و برایت فرمول‌های گوناگون را نوشته است، حتماً از خودت پرسیده‌ای: «خب که چی؟ به چه درد زندگی‌ام می‌خورد؟!» مثلاً هیچ وقت تا امروز متوجه نشده‌ای چرا باید مخرج مشترک گرفت. هیچ‌وقت در زندگی روزمره برایت پیش نیامده که از نمودارهای سینوسی استفاده کنی. بارها از خودت پرسیده‌ای که چرا باید الگوریتم‌ها را آموخت. بعد شاید سعی کرده‌ای به ریاضیات به چشم یک سرگرمی و یا حتی یک درس حفظ کردنی نگاه کنی. اما شاید اگر در کلاس درس آقای نوروزی نشسته بودی، اصلاً چنین نظری نداشتی؛ معلم ریاضیات دوره‌های راهنمایی و دبیرستان تهران که حالا در آستانهٔ بازنشستگی، ۳۰ سال خدمت متفاوتش به دانش‌آموزان ایرانی را در یک نمایشگاه به نمایش گذاشته است.

دبیری که ریاضی را دوباره معنی کرد!

واقعیت و ریاضیات

اینجا «میدان بهارستان» است. نام بهارستان، هر دانش‌آموزی را یاد درس تاریخ می‌اندازد. اما «کوچهٔ جورکش»، با آن تابلوی بزرگ ورود ممنوع که سر خیابان نصب شده است، می‌تواند شما را کمی در ریاضیات غرق کند. مدرسهٔ «میلاد طاها» در میانه‌های کوچه قرار دارد؛ مدرسه‌ای که بیشتر شبیه به یک موزهٔ تاریخی است تا یک دبیرستان پسرانه. دم در ورودی، چند دانشجوی رشته‌های مکانیک و ریاضیات و حتی فلسفه را می‌بینیم. می‌گویند برای دیدن نمایشگاه آقای نوروزی به اینجا آمده‌اند. خودشان را از شاگردان قدیمی این دبیر باسابقه و خوش نام معرفی می‌کنند. در دبیرستان را خود آقای نوروزی برای ما باز می‌کند و با چهره‌ای خندان خوشامد می‌گوید. با او به سمت نمایشگاه که در دو کلاس دایر شده است حرکت می‌کنیم. اول از همه می‌خواهیم ببینیم این نمایشگاه که می‌گویند محصول ۳۰ سال تدریس این دبیر ریاضی بوده، از چه امکاناتی بهره برده است. خود آقای نوروزی می‌گوید: «من از سال ۱۳۶۱ تدریس را شروع کردم. آن زمان معلم ریاضی دورهٔ راهنمایی بودم. امکانات زیادی نداشتیم و تنها وسیله‌ای که برای تدریس وجود داشت، یک تختهٔ سیاه بود و چند تکه گچ سفید. همان زمان احساس می‌کردم که بچه‌ها به خوبی درس‌ها را متوجه نمی‌شوند...»

از آقای نوروزی می‌پرسم که دلیل متوجه نشدن بچه‌ها چه بود؟ کمبود استعداد یا مشکل نظام آموزشی؟ آقای نوروزی می‌گوید: «من فکر می‌کنم هیچ‌کدام! بچه‌ها بین ریاضیات و واقعیت، یک فضای خالی احساس می‌کردند. یعنی بین این دو محدوده هیچ پل ارتباطی محکمی وجود نداشت. برای همین خودم سعی کردم با حداقل امکانات، برای بچه‌های کلاس ابزارهای کمک‌آموزشی درست کنم؛ وسایلی که به آن‌ها نشان می‌داد، ریاضیات چه کاربردی دارد...»

دیدار دوباره با فیثاغورث

روش تدریس این دبیر ریاضی آن‌قدر وسوسه‌برانگیز است که حتی می‌تواند یک گزارشگر را هم برای دوباره آموختن ریاضیات تشنه کند. وارد اولین اتاق نمایشگاه می‌شویم. از آقای نوروزی می‌خواهم که یک نمونه از کارکرد وسایل کمک‌آموزشی‌اش را نشان دهد. او هم از من می‌پرسد که: «می‌خواهی قضیهٔ فیثاغورث را دوباره ببینی؟» بعد تخته‌ای را که روی آن سه مثلث با شیشه و پلاستیک و چسب قرار داده بود، نشان می‌دهد. آقای نوروزی می‌گوید: «شما با حرکت دادن این تخته می‌بینید که آب از رأس یک منشور به منشور دیگر حرکت می‌کند تا فضا و حجم براساس قانون فیثاغورث درست تنظیم شود...»

از همین ابزار دو مدل ساخته است؛ اولی را در دههٔ ۶۰ با آب و دومی را در دههٔ ۷۰ با ساچمه. از همه جالب‌تر، اولین ساختهٔ دستی آقای نوروزی است؛ یک دسته چوب که به شکلی زیبا و منظم برش خورده‌اند و انگار نجاری ماهر هفته‌ها برای طراحی آن‌ها وقت گذاشته است. خودش



لذت ریاضی‌ورزیدن
آقای نوروزی و شاگردانش سرشار از نشاط، انگیزه و انرژی

می‌گوید این دسته چوب‌ها را به کمک همسرش درست کرده است. آن‌ها جدول ضرب «نپر» را نشان می‌دهند.

جدول ضربی که دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی همواره روی تختهٔ کلاس دیده‌اند و شاید به سادگی قدرت حل کردنش را نداشته‌اند، توسط این دبیر ریاضی در کلاس درس به دست بچه‌ها سپرده می‌شد.

روی میزها پر از کارهای دستی و هنرهایی است که سال‌های سال برای درست شدن آن‌ها زحمت کشیده شده است از پایهٔ اول دورهٔ راهنمایی تا سال آخر دبیرستان. هرچه فرمول ریاضی در کتاب‌ها هست، هرچه در مورد مثلثات، دیفرانسیل و انتگرال آموزش داده می‌شود، اینجا روی میزهای کارگاه کمک‌آموزشی آقای نوروزی به صورت عملی بیان می‌شوند. از او می‌پرسم آیا در تمام این سال‌ها از جایی بودجه‌ای هم به عنوان کمک مالی دریافت کرده یا همهٔ این ابزارها را با هزینهٔ شخصی خود ساخته است. آقای نوروزی می‌گوید: «نه! از لحاظ مالی که هیچ‌کس به من کمکی نکرد. البته همسرم و دانش‌آموزانم همیشه در ساخت این‌ها به من کمک کرده‌اند، ولی همهٔ این ابزارها را با هزینهٔ شخصی‌ام درست کرده‌ام. تازگی‌ها مدیر محترم همین مدرسه میلاد طاها لطف کردند و بخشی از کارگاه زیرزمینی را به من دادند تا در آن کار کنم. اما قبل از این، همهٔ کارهایم را در خانه می‌کردم.»

آقای نوروزی برای این‌که بچه‌های کلاسش بهتر با ریاضی انس بگیرند، برای آن‌ها بجز در طول کلاس، روزانه بین هفت تا هشت ساعت هم وقت می‌گذاشته و در خانه وسایل کمک‌آموزشی‌شان را می‌ساخته است. او حالا خوشحال است که توانسته محصول یک عمر تلاش خود را به همراه گروهی از دانش‌آموزان مشتاق در این نمایشگاه جمع کند.

پل ارتباطی در اتاق کناری

در طول نمایشگاه، دانش‌آموزان آقای نوروزی به او در راهنمایی بازدیدکنندگان کمک می‌کنند. او ما را به سمت دانش‌آموزانش می‌برد تا آن‌ها هم در مورد ابزارآلات به ما اطلاعات بدهند. اولین نفر، **ایمان مفرح** است؛ شاگرد اول کلاس‌های آقای نوروزی. ایمان وسایل کمک‌آموزشی دوره‌های راهنمایی را در دست می‌گیرد. او جدول انطباق را به خوبی توضیح می‌دهد و این موضوع را که روی دایره، زوایای مقابل به هم با هم برابر هستند، به ساده‌ترین شکل ممکن نشان می‌دهد. **امید داوری**، دومین شاگرد آقای نوروزی است که نقش خود او را بازی می‌کند. جالب‌ترین وسیلهٔ کمک‌آموزشی بین تمامی وسایلی که به ما نشان می‌دهد، یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه‌بعدی است. در کمتر از پنج ثانیه می‌توانید از روی حرکات دست او با ابزارهای آقای نوروزی متوجه شوید که چرا و چگونه اضلاع مربع و لوزی با هم برابرند. امید در مورد «قضیهٔ حمار»، هم به صورت عملی و هم به صورت فلسفی، توضیح می‌دهد. می‌گوید به این دلیل نامش را قضیهٔ حمار گذاشته‌اند که خرها همیشه کوتاه‌ترین راه را برای رسیدن به مقصد انتخاب می‌کنند. به همین دلیل نام این قضیه، حمار گذاشته شده است.

از آقای نوروزی می‌پرسم که آیا این دانش‌آموزان فقط با ابزارها به بازدیدکنندگان توضیح می‌دهند یا به آن‌ها ساختن این ابزارها را هم آموزش داده‌اید. او ما را کنار میز دیگری که دانش‌آموزی به نام **شهاب فرخ‌نژاد** ایستاده است، می‌برد. می‌گوید: «این یکی از دانش‌آموزان نمونهٔ من است. او خودش از روی دست من مگنت‌ها را طراحی کرده و ساخته است. حالا خودش هم به شما در مورد مگنت‌ها توضیح می‌دهد...»

آقای حاجی سیدتقیا، مدیریت دبیرستان میلاد طاها





فرخ‌نژاد چند دقیقه‌ای به صورت عملی، روابط سینوسی، زاویــهٔ مســطحهٔ فرجــه، هم‌نهشــتی مثلث‌هــا و... را برای بازدیدکنندگان توضیح می‌دهد.

از آقای نوروزی می‌پرســم برای این‌که به‌روز باشید چه می‌کنید. می‌گوید: «من رابطهٔ خیلی خوبی با اینترنت دارم. همان‌قدر که به ریاضیات علاقه‌مند هستم، به هنر هم علاقه دارم. برای همین همیشــه در اینترنت بــه دنبال چیزهای جدیــدی در مــورد علاقه‌مندی‌هایم می‌گــردم. بین هنر و ریاضی پل زده‌ام که شما می‌توانید این پل را در اتاق بعدی ببینید...»

من رابطهٔ خیلی خوبی با اینترنت دارم. همان‌قدر که به ریاضیات علاقه‌مند هستم، به هنر هم علاقه دارم. برای همین همیشه در اینترنت به دنبال چیزهای جدیدی در مورد علاقه‌مندی‌هایم می‌گردم

در اتاق بعدی، ابزارهای کمک‌آموزشــی دورهٔ دبیرستان و همین‌طــور بخــش ویژه‌ای در مورد هنــر ریاضیات وجود داشــت؛ بخشــی که همهٔ نگاه‌ها را به خــود جلب می‌کرد. آقای نوروزی می‌گوید: «من سال‌هاســت که به هرچه نگاه می‌کنم، به دنبال ساختن ابزاری برای دانش‌آموزانم هستم. مثلاً چند ســال پیش داشتم یک فیلم چینی نگاه می‌کردم. در بخــش خیلی کوتاهی از این فیلم، معلم چینی مدرســه داشت مساحت چهار ضلعی را به مثلث تبدیل می‌کرد. این صحنــه را که دیدم بــا خودم گفتم که مــن از روی تئوری ایــن معلم، همین الان ابزار جدیدی می‌ســازم و همین کار را بــه صورت عملــی برای بچه‌ها تکــرار می‌کنم. یک هفته بعد، همین وســیله را ساختم و به مدرســه بردم... همیشه دنبــال یک ابــزار جدید می‌گــردم. مثلاً چنــد روز پیش با یکی از همکاران داشــتیم نوشــیدنی می‌خوردیــم، نگاهم به قوطی نوشــیدنی دوســتم افتاد. بلافاصلــه گفتم بعد از این‌که نوشــیدنی‌ات را خــوردی، قوطی‌اش را بــه من بده؛ لازمش دارم. همان شــب با همان قوطی باز یک وسیلهٔ تازه ساختم!»

از آقای نوروزی در مورد هزینه‌هایی که طی این سال‌ها متحمل شــده و البته مشکلاتی که در این راه داشته است، می‌پرسم. ایشان می‌گوید: «این کار عشق من بود. خوشحالم کــه خانواده‌ام هم کنارم بود و مرا کمک کرد. کســی به من یک ریال هم کمک مالی نکرده است؛ اما هیچ‌وقت هم برای درست‌کردن این ابزارآلات لنگ نماندم!»

ریاضیات را حفظ نکنید

در بخش هنر و ریاضی، می‌توان کاردستی‌های مخصوص آقای نوروزی را دید؛ کاردستی‌هایی که در نوع خود بی‌نظیر و مثال‌زدنی هستند. آقای نوروزی در مورد این کاردستی‌ها هم توضیحات جالبی می‌دهد: «ما ســعی کرده‌ایم به بچه‌ها نشــان بدهیم کــه می‌توانند بــا چند کاغذ رنگــی و بدون اســتفاده از چسب، برای صرفه‌جویی در هزینه‌های خانواده، برای زمانی که می‌خواهند به کسی هدیه بدهند، جعبه‌های رنگی درســت کنند. این را به کمــک علوم ریاضی، مثلثات و همین‌طــور هنر اجرایی کرده‌ایم. الان شــما می‌بینید که بچه‌های ما چه کاردستی‌های زیبایی درست کرده‌اند و اینجا از آن‌ها استفاده کرده‌ایم...»

نمایشــگاه را با همهٔ زیبایی‌هایش ترک می‌کنیم. آقای نوروزی می‌گوید که می‌خواهد از امسال به بعد هر دو یا سه سال یک‌بار، تجربیات و ساخته‌هایش را طی تمام سال‌های اخیر در چنین نمایشــگاه کمک‌آموزشی به نمایش بگذارد. بهترین توصیه برای دانش‌آموزانی که فکر می‌کنند ریاضیات در زندگی کاربرد اجرایی ندارد و یا ریاضی را به چشــم یک درس حفظ‌کردنی نگاه می‌کنند این است که هر وقت باز این نمایشگاه‌ها دایر شد، سری به آن بزنند. دیدنی‌ها بسیار است.

این نمایشگاه امسال هم طبق روال سال‌های گذشته، در هفتهٔ گرامیداشت مقام والای معلم در اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۹۲ در محل دبیرستان برقرار است.

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: چند بازی و تردستی جالب و سرگرم‌کننده برای ایام نوروز

۱. ساعت جادویی!

یک ساعت عقربه‌ای دیواری را رو به دوستانتان بگیرید. از یکی از آن‌ها بخواهید یکی از اعداد روی آن را (از ۱ تا ۱۲) در ذهن خود در نظر بگیرد. سپس از او بخواهید که با ضربه‌هایی که شما با انگشتتان روی صفحهٔ ساعت می‌زنید، عددهای پس از آن شماره را یکی‌یکی (با هر ضربه یک عدد) در ذهنش بشمارد و بالا برود (مثلاً اگر عدد ۶ را انتخاب کرده است، با ضربهٔ نخست شما در ذهنش بگوید ۷، با ضربهٔ دوم ۸ و...) و هر وقت به شمارهٔ ۲۰ رسید، دستور توقف ضربه‌زدن را به شما بدهد (مثلاً دستش را به بالا ببرد یا حرکتی کند که شما دیگر ضربه نزنید). باور نکردنی است! ولی ضربهٔ آخر شما درست روی همان شماره‌ای است که او در ذهنش انتخاب کرده بود!

* **چگونگی اجرای تردستی:** شما هفت ضربهٔ نخست خود را کاملاً تصادفی و دلخواه می‌زنید و برای آن‌که کارتان طبیعی جلوه کند و برای ایجاد هیجان، می‌توانید این ضربه‌ها را پراکنده روی صفحه و یا حتی پشت صفحه بزنید. ولی از ضربهٔ هشتم به بعد خود را هدفمند می‌زنید و سعی کنید بدون آن‌که آن‌ها متوجه شوند، این کار را انجام دهید. ضربهٔ هشتم باید روی عدد ۱۲ فرود آید و ضربهٔ نهم روی عدد ۱۱ و به همین ترتیب ضربات بعدی در جهت خلاف حرکت عقربه‌ها و از ۱۲ به طرف ۶ زده شوند. به این ترتیب وقتی دوست شما دستور توقف می‌دهد (و در ذهن خود به عدد ۲۰ می‌رسد)، انگشت اشارهٔ شما درست روی همان عددی است که او در ذهن داشته است. این کار را امتحان و تمرین کنید. می‌بینید که این حقّه به خوبی کار می‌کند! به منطق ریاضی نهفته در این تردستی بیندیشید. این خود یک مسئلهٔ ریاضی خوب است. اگر نتوانستید پاسخ را بیابید، به انتهای همین بخش مراجعه کنید.



۲. پیشگویی حاصل تفریق

از گروهی از دوستان خود بخواهید که هر کدام یک عدد پنج رقمی که رقم‌های آن یکسان نباشند، روی یک کاغذ بنویسند. سپس از آن‌ها بخواهید که مقلوب آن عدد (مقلوب عدد، عددی است که از جابه‌جا و وارونه‌کردن ارقام آن عدد حاصل می‌شود. مثلاً مقلوب ۱۴۵، عدد ۵۴۱ است) را هم بنویسند و از بین خود عدد و مقلوب آن، عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کنند و حاصل را که آن هم یک عدد پنج رقمی است، بیابند. سپس یکی از رقم‌های این حاصل تفریق را مشخص کنند و دور آن را کادر بکشند. مثلاً نوشتهٔ یکی از دوستان شما می‌تواند چنین باشد:

−	۵۴۳۱۱
	۱۱۳۴۵
	۴[۲]۹۶۶

اکنون از تک‌تک آن‌ها بخواهید که به نوبت چهاررقمی را که دور آن‌ها کادر نکشیده‌اند، به شما بگویند (مثلاً این نمونه، عددهای ۶ و ۶ و ۹ و ۴ را می‌گوید). سپس شما پس از کمی مکث (همراه با حرکات نمایشی!) عددی را که دور آن کادر کشیده شده است، به او می‌گویید!

* **روش اجرای تردستی:** شما چهار رقم گفته شده را با هم جمع می‌کنید. مثلاً در مورد این نمونه می‌شود: ۲۵=۶+۶+۹+۴. سپس نخستین عدد مضرب ۹ بزرگ‌تر از این مجموع را پیدا می‌کنید: ۲۷=۹×۳ و آن را از این مجموع کم می‌کنید: ۲=۲۵-۲۷ بله به همین سادگی! فقط یادتان باشد که اگر مجموع عددها مضرب ۹ شود (مثلاً ۱۸ یا ۲۷)، در این صورت مسئله دو جواب دارد: ۰ یا ۹ و ممکن است جواب را در دو مرحله بدهید که البته این را هم می‌توانید با کمی نمایش رفع و رجوع کنید!

منطق ریاضی نهفته در این تردستی را در انتهای این بخش می‌توانید ببینید، ولی سعی کنید خودتان آن را کشف کنید.

سرگرمی

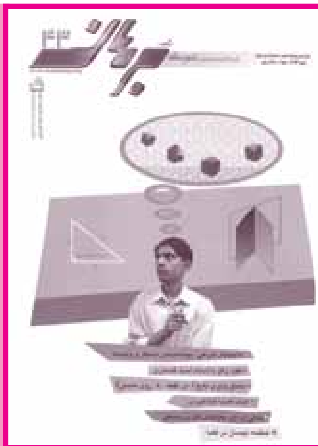
از ریاضیات می‌توانید برای تردستی، شعبده‌بازی و سرگرم‌کردن دوستانتان در ایام فراغت استفاده کنید! باور نمی‌کنید؟ به این نمونه‌های جالب دقت کنید. با کمی تمرین می‌توانید آن‌ها را بیاموزید و با استفاده از آن‌ها نمایش جالبی از ریاضیات شاد و تفریحی ارائه دهید.

ادامه در صفحه ۲۹

غلامرضا یاسی‌پور



تاریخچهٔ مجلات ریاضی ایران



کلیدواژه‌ها:

در تورق شماره‌های مجلهٔ ریاضی «رشد برهان متوسطه» به شمارهٔ ۴۳ رسیده‌ایم. در این شماره در مقالهٔ **«ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی»** از استاد **شهریاری** این نکته را می‌آموزیم که: «ریاضیات کاربردی بر فعالیت عملی تکیه دارد و از آن نیرو می‌گیرد، در حالی‌که ریاضیات نظری خودگردان است و با سازوکار درونی و انگیزهٔ درونی خود پیشرفت می‌کند.»

در این شماره بحثی در حل معادله‌های فکری و منطقی از **وایلی** به ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور** آمده که در انتهای آن این نکتهٔ پرمغز را می‌خوانیم: «ممکن است معما در محتوا تازه و جدید باشد، اما در صورت نمی‌تواند، زیرا طرح معمایی که از لحاظ صورت کاملاً تازه باشد، تقریباً غیرقابل تصور است. به‌طور کلی معمایی را فکری ـ منطقی می‌گوییم که با کمترین اطلاعات لازم و تنها توسط استدلال منطقی قابل حل باشد.»

در این شماره گفت‌وگویی آمده با استاد **احمد قندهاری**، یکی از اعضای هیئت تحریریهٔ برهان، با عنوان **«ذات ریاضی صداقت است»**. در گفت‌وگو این سخنان نغز را از استاد می‌شنویم:

«اصولاً سر کلاس فقط درس نمی‌دهم، بلکه زندگی می‌کنم. خودم هم معمولاً با مطالعهٔ ادبیات و شعر، خستگی ریاضی را درمی‌کنم. اعتقاد دارم که ریاضی پلی است که یک طرفش محاسبات است و یک طرفش هنر. در مجموع، هوش بچه‌های یک کلاس از هوش معلم بالاتر است.»

مجله پر از مطالب متنوع است. برای مثال مقالهٔ **«اصل لانهٔ کبوتری»** از دکتر **محمدعلی فریبرزی عراقی**، **«اعداد فیبوناتچی»** از **غلامرضا یاسی‌پور**، **«در حاشیهٔ هندسهٔ تحلیلی»** از **میرشهرام صدر**، **«احتمال شرطی»** از **حمیدرضا امیری**، **«راه‌حل‌های کوتاه برای مسائل شناخته شدهٔ ریاضی»** از **هوشنگ شرقی**.

از این شماره می‌گذریم و قدم به شمارهٔ ۴۴ می‌گذاریم که در زمستان ۱۳۸۳ انتشار یافته است. در این شماره مقاله‌های از «تاریخ بیاموزیم»، «احتمال شرطی»، «گفت‌وگو با استاد احمد قندهاری»، «معادله‌های مثلثاتی»، «اعداد فیبوناتچی» و... همچنان خواندنی و جذاب‌اند. به آوردن چند نکته از این مقالات بسنده و آن‌ها را مشت نمونه خروار فرض می‌کنیم:

- **دالامبر** در مقالهٔ **«پیدایش و تکامل دانش»**، به ترجمهٔ استاد شهریاری نوشته است: «من به هیچ‌وجه قصد ندارم استفاده از اصل موضوع‌ها را به هیچ شرطی محکوم کنم. تنها می‌خواهم نشان دهم این اصل موضوع‌ها به کجا منجر می‌شوند.»
- استاد شهریاری از قول یکی از بچه‌ها نقل کرده‌اند که به ایشان گفت: «شما معلم‌ها آخر سال به ما نمره نمی‌دهید، ولی ما شاگردان همان جلسهٔ اول به شما نمره می‌دهیم» (از مقالهٔ گفت‌وگو با استاد).
- هیچ مطلبی را نفهمیده جلو نروید. هیچ قانونی وجود ندارد تا بدون فهم مطالب قبلی بتوان مطالب تازه را یاد گرفت (استاد پرویز شهریاری).

● چون بــه مشــکلات و نیازمندی‌های مردم در مورد علم حســاب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خلاصه شده است (مقالهٔ مجموعهٔ اعداد گویا، مهدی رحمانی).

در اینجا تنها به پاره‌ای از نکات جالب شمارهٔ ۴۵ برهان اشاره می‌کنیم.

چه برای ریاضیات سنتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شــدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازهٔ کافی آمادهٔ دقیق شدن نبودند)، به بحرانی منجر شــد کــه در برخورد با بی‌نهایت به‌وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود (استاد شهریاری).

«نظریهٔ اعداد» شامل موضوع‌هایی در ریاضیات اســت که توانسته‌اند توجه بشر را برای هزاران ســال به خود جلب کنند. در این شــاخه از ریاضیات، به مســئله‌ها، قضیه‌هــا و برهان‌هایــی برمی‌خوریم که بیش از دو هزار ســال قدمت دارند. برای مثــال، حدود ســال ۳۰۰ قبــل از میلاد **مســیح(ع)**، **اقلیدس** برهانی مقدماتی و ساده برای اثبات بی‌نهایت بودن اعداد اول ارائه داد. مسئله‌هایی نیز طرح شده‌اند که برای چند سال عدهٔ کثیری از علاقه‌مندان و ریاضی‌دانان را به خود مشــغول داشته و باعــث پیدایــش شــاخه‌های جدید و نظریه‌های بدیع شده‌اند.

امروزه نظریهٔ اعداد آن‌چنان وسعت یافتــه که تقریبــاً در تمام شــاخه‌های ریاضی رخنه کرده و حتی توانســته در علوم غیرریاضی همچــون رایانه، کاربرد بسیار داشــته باشــد. همچنین در این شــاخه از ریاضیات، مسئله‌های لاینحل بسیاری وجود دارند که تا به امروز انسان به حل آن نزدیک هم نشــده است. یکی از مسئله‌هایی که حدود ۳۵۰ سال دوام آورد، قضیهٔ بــزرگ **فرما** بود که بالاخره در ســال ۱۹۹۴ میلادی توســط **اندرو وایلز** در بیــش از ۲۰۰ صفحه به اثبات رســید و اثری بسیار عظیم در ریاضیات قرن بیســتم گذاشت. اما از این موفقیت بســیاری ناخرســند شــدند، زیرا قضیهٔ بزرگ فرما که ســال‌های سال انگیزه‌ای بــرای ارائهٔ نظریه‌هــای جدید ریاضیات بود، از میان رفت (ترجمهٔ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی).

جــــرج کــــانــــتــــور در ســـال ۱۸۹۵ در آغــاز اثــرش بــه نـــام «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre»، ایــن تعریف را آورده است:

«منظورمان از مجموعه **set** هر گردایهٔ M از اشیای معین، متمایز m از برداشت یا تصورمان (که عنصرهــا M elements نامیده می‌شوند) به صورت یک کل است.

به این ترتیب، مثال‌های مجموعه‌ها عبارت‌انــد از: Z، مجموعــهٔ جمیع اعداد درســت کــه در این‌جــا اعــداد صحیح (integres) نامیده می‌شــوند؛ Q، R و C، به ترتیب، مجموعه‌های جمیع اعداد گویا (rational numbers)، جمیع اعداد حقیقی (real numbers) و جمیــع اعداد مختلط (complex numbers)، M مجموعــه‌ای شــامل جمیع قمرهای مریخ و حتی H، مجموعه جمیع اختاپوس‌های دوپایی که اول اردیبهشــت گذشــته از آبادان دیدن کرده‌اند» (از نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور).

در مقالــهٔ «قضیهٔ **رول** و قضیهٔ مقدار میانگین» از **میرشهرام صدر** در شرح حال رول چنین می‌خوانیم:

میشــل رول (۱۷۱۹-۱۶۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی بیشــتر ریاضیات را خودآمــوز فراگرفته بــود. کار او در اصل حســابداری بود، ولی هــرگاه وقتی پیدا می‌کرد روی جبر و معادلات دیوفانتی نیز کار می‌کرد.

ژاک اوزانام (۱۷۱۷-۱۶۴۰) یکی از ریاضی‌دانان فرانسوی معاصر با رول بود که مسائل مهمی را در زمینهٔ ریاضیات طرح کرده بود. بعد از این‌که رول راه‌حل دقیقی را برای یکی از مســائل ریاضیات تفریحی اوزانــام ارائه کرد، دولت وقت از تحقیقات ریاضی او حمایت کرد و به همین سبب در سال ۱۶۹۰ رول کتاب آموزشی «جبر» را انتشار داد. این کتاب شامل مباحث تازه‌ای دربارهٔ دستگاه اعداد حقیقی و روش‌هایی برای یافتن ریشــه‌های معادلات بود. رول سپس در سال ۱۶۹۱ قضیهٔ مشهور خود را منتشر کرد. صورت قضیهٔ او که به قضیهٔ رول مشهور شده، این است که: «بین هر دو صفر یک تابع چند جمله‌ای، نقطه‌ای وجود دارد که مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر است.»

در مقالهٔ **«نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ»** از **مرتضی بیات** و **مهدی حسنی**، با بعضی از ملاحظات تاریخی درباب اعداد گویا و گنگ آشنا می‌شویم.

اعداد گویا و گنگ ســابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ‌بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن، به فیثاغورســیان منســوب است. **تئــودوروس** (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، اســتاد **افلاطــون** در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرد و گنگ‌بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیرمجذور کامل را تا ۱۷ به اثبات رساند. یونانیــان، به جای عدد مجــرد، عمدتاً به کمیّات هندسی نظر داشتند. کارهای آن‌ها در زمینــهٔ اعداد گنــگ در کتاب «اصول هندسه»، از اقلیدس، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمیات گنگ، به تدریج منجر به مفهوم عدد شــد و مبحث اعداد گنگ، در کتاب‌های «حســاب نظری» قرن ۱۵ میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشــهورترین اعــداد ریاضی، نســبت محیط دایره به قطر آن است که از ایام بســیار قدیم مورد توجه بوده است. ایــن عدد از زمان اویلر به بعد، به نام «π» خوانده می‌شــود. عدد مشهور دیگر، عدد «e» اســت و ســابقه‌اش ظاهراً به پس از کشف لگاریتم می‌رسد. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی کســی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آنکه **لامبرت** در سال ۱۷۶۱ گنگ‌بودن آن‌ها را ثابت کرد. گنگ‌بودن e^2 در ســال ۱۸۴۰ به وسیلهٔ **لیوویل** به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همهٔ قوای طبیعی π، e و کثیرالجمله‌های صحیح برحســب e یا π بــا ضرایب گویا، اعداد گنگ هستند. گنگ‌بودن اعداد 2^e، π^e و $\pi^{\sqrt{2}}$ عدد اویلر،

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right)$$

هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $2^{\sqrt{2}}$ و e^{π} گنگ‌اند.

چه برای ریاضیات سنتی و چه برای ریاضیات نظری عصر جدید، وارد شدن مفهوم‌های ریاضیات نظری اولیه (که هنوز به اندازهٔ کافی آمادهٔ دقیق شدن نبودند)، به بحرانی منجر شد که در برخورد با بی‌نهایت به‌وجود آمده و پرده‌های عادت‌ها و رسم‌ها را دریده بود
(استاد شهریاری)

نامساوی‌ها

خواص نامساوی‌ها

آموزشی

احمد قندهاری

کلیدواژه‌ها: نامساوی‌ها، خواص نامساوی‌ها

۱. به طرفین یک نامساوی می‌توان عددی اضافه کرد یا از آن عددی کم کرد:

$$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$$

۲. طرفین نامساوی را می‌توان در عدد مثبتی ضرب یا بر عدد مثبتی تقسیم کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am > bm \\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \end{cases}$$

۳. اگر طرفین یک نامساوی را در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\begin{cases} a > b \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ak < bk \\ \dfrac{a}{k} < \dfrac{b}{k} \end{cases}$$

۴. طرفین یک نامساوی را می‌توان به توان عدد فرد رساند:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a^3 > b^3 \\ a^5 > b^5 \\ a^7 > b^7 \end{cases} \text{ یا } a^{2n-1} > b^{2n-1} \qquad n \in N$$

۵. از طرفین یک نامساوی می‌توان ریشهٔ فرد گرفت:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[5]{a} > \sqrt[5]{b} \\ \sqrt[7]{a} > \sqrt[7]{b} \end{cases} \text{ یا } \sqrt[2n-1]{a} > \sqrt[2n-1]{b} \qquad n \in N$$

۶. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می‌توان آن را به توان عدد زوج رساند:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 > b^2 \\ a^4 > b^4 \\ a^6 > b^6 \end{cases} \text{ یا } a^{2n} > b^{2n} \qquad n \in N$$

۷. اگر از طرفین یک نامساوی ریشهٔ زوج بگیریم، باید آن‌ها را در قدرمطلق قرار دهیم:

$$\begin{cases} a^2 > b^2 \\ a^4 > b^4 \text{ یا } a^{2n} > b^{2n} \\ a^6 > b^6 \end{cases} \Rightarrow |a| > |b| \qquad n \in N$$

۸. اگر طرفین نامساوی مثبت باشند، می‌توان از دو طرف ریشهٔ زوج گرفت:

$$a > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} > \sqrt{b} \\ \sqrt[4]{a} > \sqrt[4]{b} \end{cases} \text{ یا } \sqrt[2n]{a} > \sqrt[2n]{b} \qquad n \in N$$

۹. اگر طرفین نامساوی هم علامت باشند، چنانچه آن‌ها را معکوس کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. چنانچه طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، اگر آن‌ها را معکوس کنیم جهت تغییر نمی‌کند:

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ 0 > a > b \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a > 0,\ b < 0,\ a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۱۰. دو نامساوی هم جهت را فقط و فقط می‌توان نظیر به‌نظیر با هم جمع کرد:

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

۱۱. اگر طرفین دو نامساوی هم جهت مثبت باشد، می‌توان آن‌ها را نظیر به نظیر درهم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

نکات نامساوی‌ها

۱. اگر $0 < a < 1$، آن‌گاه اگر a را به توان اعداد بزرگ‌تر از یک برسانیم، کوچک‌تر می‌شود. چنانچه از آن ریشه بگیریم بزرگ‌تر می‌شود.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 \ldots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} \ldots \end{cases}$$

مثال:

اگر $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin x < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > \sin^2 x > \sin^3 x \ldots \\ \sin x < \sqrt{\sin x} < \sqrt[3]{\sin x} \ldots \end{cases}$$

۲. هر عدد مثبت به اضافهٔ عکس آن بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

$$\boxed{a>۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲}$$

اثبات:

فرض می‌کنیم نامساوی $a>۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a>۰$ ضرب می‌کنیم:

$$a^۲+۱\geq ۲a\Rightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰\Rightarrow (a-۱)^۲\geq ۰$$

چون نامساوی $(a-۱)^۲\geq ۰$ همواره درست است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۳. هر عدد منفی به اضافهٔ عکس آن کوچک‌تر یا مساوی ۲- است.

$$\boxed{a<۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲}$$

اثبات:

فرض می‌کنیم نامساوی $a<۰\Rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲$ همواره درست باشد. دو طرف نامساوی را در $a<۰$ ضرب می‌کنیم:

$$a^۲+۱\geq -۲a\Rightarrow a^۲+۲a+۱\geq ۱\Rightarrow (a+۱)^۲\geq ۰$$

چون نامساوی $(a+۱)^۲\geq ۰$ همواره درست است، پس فرض ما هم درست بوده است.

۴. اگر a و b دو عدد هم علامت باشند داریم:

$$\boxed{(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\geq ۴}$$

اثبات:

$$(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})=۱+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+۱=۲+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$$

چون a و b هم علامت‌اند، پس $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ عکس یکدیگر و نامنفی‌اند. بنا به نکتهٔ (۲): $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$. پس: $۲+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geq ۴$.

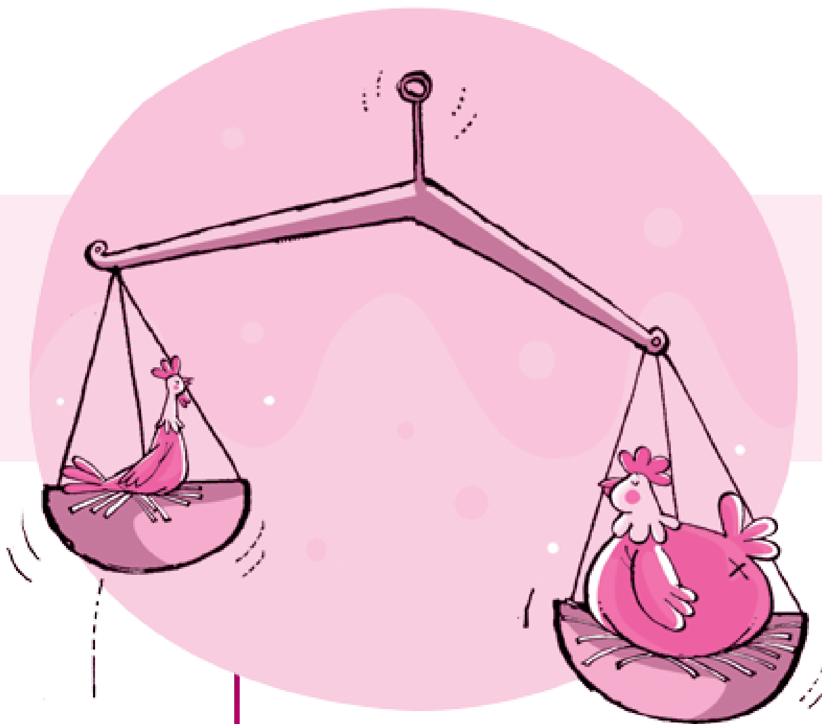
در نتیجه: $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\geq ۴$.

۵. اگر a و b مختلف‌العلامه باشند، داریم:

$$\boxed{(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\leq ۰}$$

اثبات:

$$(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})=۱+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+۱=۲+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})$$



چون a و b مختلف‌العلامه‌اند، پس: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -۲$. بنابراین:

$$۲+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\leq ۰\Rightarrow (a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\leq ۰$$

۶. اگر $a,b\neq ۰$، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{(a^۲+b^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲})\geq ۴}$$

اثبات:

$$(a^۲+b^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲})=۱+\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}+۱=۲+(\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲})$$

$\frac{a^۲}{b^۲}$ و $\frac{b^۲}{a^۲}$ مثبت و عکس یکدیگرند، پس: $\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}\geq ۲$. بنابراین:

$$۲+(\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲})\geq ۴\Rightarrow (a^۲+b^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲})\geq ۴$$

۷. اگر: $a,b,c\neq ۰$، داریم:

$$\boxed{(a^۲+b^۲+c^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲})\geq ۹}$$

اثبات:

$$(a^۲+b^۲+c^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲})$$

$$=۱+\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{a^۲}{c^۲}+\frac{b^۲}{a^۲}+۱+\frac{b^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{b^۲}+۱$$

$$=۳+(\frac{a^۲}{b^۲}+\frac{b^۲}{a^۲})+(\frac{a^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{a^۲})+(\frac{b^۲}{c^۲}+\frac{c^۲}{b^۲})$$



هر یک از سه پرانتز بالا بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. پس جمع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۶ می‌شود. در نتیجه:

$$3+(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})+(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2})+(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2})\ge 9$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\ge 9$$

۸. همواره داریم:

$$\boxed{a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac}$$

اثبات:

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}(a-b)^2\ge 0\\(b-c)^2\ge 0\\(c-a)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2-2ab\ge 0\\b^2+c^2-2bc\ge 0\\c^2+a^2-2ac\ge 0\end{cases}$$

سه نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\ge 0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac>0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$

۹. اگر: $a,b,c>0$، آنگاه همواره داریم:

$$\boxed{(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc}$$

اثبات:

$$\begin{cases}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0\\(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\ge 0\\(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\\b+c-2\sqrt{bc}\ge 0\\c+a-2\sqrt{ac}\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b\ge 2\sqrt{ab}\\b+c\ge 2\sqrt{bc}\\c+a\ge 2\sqrt{ac}\end{cases}$$

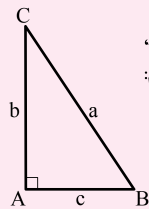
این سه نامساوی هم‌جهت مثبت را نظیر به نظیر درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

۱۰. همواره داریم: $\boxed{a^2\pm ab+b^2\ge 0}$ زیرا: $(a^2+b^2)+(a\pm b)^2\ge 0$ در نتیجه: $2a^2\pm 2ab+2b^2\ge 0$ که همواره برقرار است.

مسئلهٔ ۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $A=90^\circ$ به وتر a و اضلاع b و c همواره داریم: $a^3>b^3+c^3$.



حل: دو طرف را در $b^2>0$ ضرب می‌کنیم.
دو طرف را در $c^2>0$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab^2>b^3\\ac^2>c^3\end{cases}$$

اکنون دو نامساوی را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم:

$$ab^2+ac^2>b^3+c^3\Rightarrow a(\underbrace{b^2+c^2}_{a^2})\ge b^3+c^3$$

$$\Rightarrow a(a^2)>b^3+c^3\Rightarrow a^3>b^3+c^3$$

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید: $(\frac{a+b}{2})^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

اثبات: فرض می‌کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد، پس:

$$\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\le 2a^2+2b^2$$

$$\Rightarrow 0<a^2+b^2-2ab\Rightarrow 0\le(a-b)^2$$

نامساوی $(a-b)^2\ge 0$ همواره درست است، پس نامساوی بالا هم همواره درست است.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید: $\frac{a^3+b^3}{2}\ge(\frac{a+b}{2})^3$، $a,b>0$.

اثبات: فرض می‌کنیم نامساوی بالا همواره درست باشد. آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{(a+b)^3}{8}\Rightarrow 4(a^3+b^3)\ge(a+b)^3$$

$$\Rightarrow 4a^3+4b^3\ge a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow 3a^3+3b^3\ge 3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)\ge ab(a+b)$$

(a+b مثبت است.)

$$\Rightarrow a^2-ab+b^2\ge ab$$

$$\Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0\Rightarrow(a-b)^2\ge 0$$

این نامساوی همواره درست است، پس نامساوی مسئله همواره درست است.

مسئلهٔ ۴. اولاً نشان دهید: اگر $a,b>0$، آن‌گاه $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.
ثانیاً اگر $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ مثبت و $x_1.x_2.x_3...x_n=1$، ثابت کنید: $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)...(1+x_n)\ge 2^n$.

اثبات: اولاً داریم:

$$a,b>0:(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$$

$$\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

ثانیاً، با توجه به نابرابری اولاً، می‌توان نوشت:

$$1+x_1\ge 2\sqrt{x_1},1+x_2\ge 2\sqrt{x_2},...,1+x_n\ge 2\sqrt{x_n}$$

$$\Rightarrow(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\ge 2^n\sqrt{\underbrace{x_1x_2...x_n}_{1}}$$

$$\Rightarrow(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\ge 2^n$$



ادامه از صفحه ۲۳

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه سوم: چند بازی و تردستی جالب و سرگرم‌کننده برای ایام نوروز

۳. باور نکردنی است!

پشت به جمعی از دوستان خود بنشینید. (قبلاً از آن‌ها معذرت‌خواهی کنید!) سپس از یکی از آن‌ها بخواهید که سه عدد تاس را با هم در حضور جمع پرتاب کند و عددهای رو شده را ببینند. آن‌گاه از او بخواهید که ابتدا عددهای روی دو تاس اول و دوم را با هم جمع کند (تاس‌ها را شماره‌گذاری کند تا عملیات گفته شده را درست انجام دهد) و پنج برابر حاصل جمع را با عدد تاس سوم جمع کند. بعد حاصل جمع اخیر را در ۵ ضرب کند و حاصل را در جایی بنویسد. سپس مجموع عددهای روی دو تاس اول و دوم را ۲۵ برابر کند و در جایی دیگر یادداشت کند. سرانجام ۴۵۰ برابر عدد روی تاس اول را با این دو عدد که قبلاً به‌دست آورده است، جمع کند و نتیجه را به شما بگوید.

شما پس از کمی مکث و حرکت‌های نمایشی که چاشنی کارتان هستند، درکمال تعجب حاضران، عددهای روی سه تاس را می‌گویید! باور نکردنی است، ولی واقعیت دارد!

* **چگونگی اجرای تردستی:** کافی است عدد حاصل را بر پنج تقسیم کنید. یک عدد سه رقمی به‌دست می‌آید که سه رقم آن همان عددهای روی سه تاس هستند!

منطق ریاضی این تردستی هم جالب است. اگر آن را نیافتید به انتهای این بخش مراجعه کنید.

فرهنگ ریاضی!

در اینجا می‌خواهیم مفهوم بعضی از اصطلاحات رایج در کتاب‌های ریاضی را شرح دهیم!

۱. می‌توان ثابت کرد که ...

یعنی اثبات این موضوع از چهار ساعت تا حداکثر یک سال طول می‌کشد و ممکن است به حدود پنج بند کاغذ یادداشت و ۱۰۰ عدد قلم نیاز باشد. اگر شما فقط دانشجوی دورهٔ کارشناسی هستید، نیازی به تلاش و یا به زحمت انداختن خودتان ندارید، چون اثبات برایتان غیرممکن است!



۲. می‌توان نشان داد که ...

معمولاً این اصطلاح وقتی به‌کار می‌رود که معلم بخواهد از یک ساعت کار روی تخته اجتناب کند! حالت دیگر آن است که معلم خودش هم از اثبات موضوع چیزی نفهمیده‌باشد!



۳. روشن است که ...

معمولاً وقتی استفاده می‌شود که معلم قبلاً لااقل ۱۰۰ بار مطلب را اثبات کرده باشد!

۴. به آسانی به‌دست می‌آید که ...

یعنی معلم می‌تواند چیزی را ثابت کند که حتی دانش‌آموزان هم درستی آن را می‌دانند!

۵. بدیهی است که ...

این اصطلاح در مورد اثبات حکمی به کار می‌رود که فقط برای نویسندهٔ کتاب اثبات آن ممکن است و بس!

۶. اثبات این موضوع خارج از محدودهٔ بحث ماست

این اصطلاح فریبی بیش نیست! بدانید که وقتی استفاده می‌شود، خواننده اثبات موضوع را در هیچ کتاب دیگری هم نمی‌تواند پیدا کند!

۷. اثبات به خواننده (دانش‌آموز) واگذار می‌شود.

نویسنده گمان می‌کند که ما هیچ کار بهتری از نشستن بر سر کتاب او و فکر کردن به آن نداریم!

ابراهیم ریحانی*
فهیمه کلاهدوز**

ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی



چکیده

محیط اجتماعی و فرهنگی جامعه می‌تواند بر روند آموزش و یادگیری افراد آن مؤثر واقع شود. آموزش ریاضیات نیز از این قاعده مستثنا نیست. به‌طور کلی، ارائهٔ مفاهیم ریاضی و روش آموزش و یادگیری آن‌ها در دوره‌های گوناگون تحصیلی بـه عوامـل متفاوتی از جمله عوامل فرهنگی و اجتماعی غالب بر جامعهٔ موردنظـر (برای مثال، جامعهٔ معلمان یا جامعهٔ دانش‌آموزان) بستگی دارد. در آموزش ریاضیات، فرایندهای استدلال و اثبات از جایگاه ویژه‌ای برخوردار هستند. انجام این فرایندها در کلاس درس نیز به عوامل متعددی از جمله درک و فهم معلمان و دانش‌آموزان از اثبات، دورهٔ تحصیلی، سن دانش‌آموزان، توانایی‌های ریاضی آنان و عوامل دیگر وابسته است. توجه داشته باشید که این عوامل خود می‌توانند بر ماهیت استدلال و اثبات در آموزش ریاضی و شکل ارائهٔ آن‌ها در فرایند آموزش تأثیرگذار باشند. هدف این مطالعه، بررسی نظرات و دیدگاه‌های محققان و آموزشگران ریاضی در ارتباط با ماهیت فرهنگی و اجتماعی اثبات در ریاضیات بوده است.

کلیدواژه‌ها: ماهیت فرهنگی اثبات، ماهیت اجتماعی اثبات، اثبات در آموزش ریاضی

مقدمه

بسیاری از نظریه‌پردازان از نقطه‌نظر آموزشـی و معرفت‌شناسـی درصـدد پاسخ‌گویی به این پرسـش بوده‌اند که: «ماهیت اثبات ریاضی چیست؟» به‌طور کلی در شـاخه‌های متفاوت ریاضی و با توجه به جوامع موردنظر می‌توان تعاریفی با شرایط و ملاک‌های متفاوت برای اثبات ارائه کرد.

هـارل و سـاودر[1] (۲۰۰۷) بیـان می‌کنند که در پاسـخ به این سؤال باید چنـد عامل مهم را در نظـر گرفت. اول اینکه سـاخت دانش جدید در خلأ رخ نمی‌دهد، بلکه از طریـق دانش موجود

شـکل می‌گیرد. آنچه که یک شـخص در حال حاضر می‌داند، اسـاس آنچه را که در آینده خواهد دانسـت، تشـکیل می‌دهد. دوم اینکه شخص باید درستی مفهوم اثبات را آن‌گونه که در طول تاریخ ریاضیات فهمیده شده و با آن کار شده است، در نظر بگیرد. سوم اینکه به دلیل وابسـته بودن مفهوم اثبات به شرایط و ملاک‌های جامعهٔ موردنظر، شخص باید ماهیت اجتماعی اثبات را بشناسـد (در واقـع آنچه که به عنوان یک اسـتدلال متقاعدکننده توسط او ارائه می‌شود، باید توسط دیگران نیز پذیرفته شود).

لـدی[2] (۲۰۰۱) یکی از سـاده‌ترین و پرکاربردتریـن تعاریف اثبـات را ارائه می‌دهـد. او بیـان مـی‌دارد کـه اثبات یـک اسـتدلال معقـول و منطقـی از حقایـق «قابـل قبـول»[3] اسـت [Varghese, 2007]. با وجود این، چنین تعریفی موضوع را پیچیده‌تر می‌کند. برای مثـال، حقایقی که برای یک ریاضی‌دان قابل قبول است، ممکن است برای یک فیزیک‌دان قابل قبول نباشد [پیشین]. به‌طور کلی اثبات در زمینه‌های گوناگون برای افراد مختلف، معانی متفاوتی دارد. داروساز ممکن است با استفاده از آزمایش روی چند نفر، خواص داروی موردنظر را برای درمان یک بیماری به اثبات برساند. بـرای آمـاردان، اثبـات می‌تواند با یک احتمال معین اتفاق بیفتد. برای دانشمند تجربی، اثبات چیزی است که بتوان آن را آزمود. اما ریاضی‌دان با این شـواهد و مدارک قانع نمی‌شود [تال، ۱۳۸۵].

ریاضی‌دانـان معتقدند کـه اثبات ریاضـی دارای شـرایط و ملاک‌هـای دقیق‌تری اسـت. آن‌ها بر این باورند که اسـتدلال از طریق مشـاهده نمی‌تواند ثابت کند، زیرا چشـم‌ها می‌توانند ما را منحرف کننـد. اندازه‌گیـری نمی‌تواند ثابت کند، زیرا اطمینان و اعتبار حاصل از نتیجه‌گیری به دقت ابزار اندازه‌گیری بسـتگی دارد و آزمایش نیز به‌طور قطع ثابـت نمی‌کند، زیـرا نتایـج حاصل از آزمایش می‌تواند احتمالی باشد و پایدار نیست [جانسون[4]، ۲۰۰۷، نقل شده در Varghese, 2007].

البتـه در برخـی مـوارد، بیـن ریاضی‌دانـان نیز نظـرات و دیدگاه‌های متفاوتی در مورد نقـش و اهداف اثبات و آنچه که یک اثبات را می‌سـازد، وجود دارد [Healy & Hoyles, 2000]. هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند که معنای اثبات و نقش آن و هر آنچه که اثبات را می‌سازد و همچنیـن ملاک‌های تأیید و پذیرش اثبات از شـخصی به شـخص دیگر و از جامعه‌ای به جامعهٔ دیگر متفاوت است.

ایگل‌ویتس و **استویل** (۱۳۷۰) معتقدند، برخلاف استدلال‌هایی که در بحث‌های روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرند، هر مرحلـه از اثبات ریاضی بایـد از لحاظ منطقی درست باشد و همین ملاک است که اثبات‌های ریاضی را مشکل می‌کند؛ زیرا هر شـخصی به سـادگی نمی‌تواند مجموعه‌ای از گزاره‌های معقول را بسازد. هارل (۲۰۰۸) نیز بیان می‌دارد که اثبات ریاضی استدلالی ویژه و خاص است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد درستی و صحت یک گزاره ارائه می‌دهد. به‌طور کلی می‌توان گفت که «اثبـات» یک فعالیت ریاضی است که بررسـی ماهیت آن، به عوامل زیادی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، تاریخـی، معرفت‌شـناختی و اجتماعی بستگی دارد.

ماهیت فرهنگـی و اجتماعی اثبات در آموزش ریاضی

در اغلب موارد، پذیرش یک استدلال منطقی به عنوان یک اثبات هر چند هم که معتبر باشـد، به تجربـه و دقت فرد اثبات کننده و مخاطب او بستگی دارد. در واقـع پذیـرش یک اثبـات و تعیین اعتبار آن، فرایندی اجتماعی (گروهی) و وابسته به ملاک‌های مورد پذیرش و قابل قبول افراد جامعهٔ موردنظر است [Harel & Sowder, 2007; Mueller, 2007].

رامـان[5] (۲۰۰۳) نیز معتقد اسـت که فرایند اثبات، شـامل «استدلال‌های شخصی»[6] و «اسـتدلال‌های عمومی»[7] اسـت. از نظـر او اسـتدلال شـخصی، اسـتدلالی اسـت که موجـب درک و فهم فرد می‌شـود و اسـتدلال عمومی، استدلالی اسـت که با دقت کافی برای یک جامعهٔ خـاص در زمینهٔ ریاضیات، ارائـه می‌شـود [Dee Vanspronsen, 2008]. بسـیاری از محققـان اثبات را به عنوان فراینـدی با ماهیت اجتماعی معرفی می‌کنند [Weber, 2003; Harel & Sowder, 2007; Brodie, 2010; Heinze, 2010].

مانیـن (۱۹۷۷) معتقد اسـت که یـک اثبات فقط پس از پذیرفته‌شـدن در اجتماع به عنوان یـک اثبات، اثبات به‌شمار می‌رود [Clements & Ellerton, 1996].

بالاچف (۱۹۸۷) اثبات را توضیحی تعریـف می‌کند که توسـط یک جامعهٔ معین و در یک زمان مشـخص پذیرفته می‌شود [Weber, 2003].

در جامعهٔ آموزشـی نیز هنجارها و قوانین اجتماعـی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضـی دانش‌آموزان اثر می‌گذارد. این هنجارها شـامل موارد و الگوهایی هسـتند که توسـط معلم و دانش‌آمـوزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند.

کـب و **یـاکل** (۱۹۹۶) اصطـلاح «ریاضیـات اجتماعی»[8] را بـرای بیان تأثیر محیط و شـرایط آموزش از قبیل کتاب‌هـای درسـی، عقایـد و عملکرد معلمـان، و بازخـورد آن‌هـا از رویکرد دانش‌آموزان، مورد استفاده قرار می‌دهند و معتقدنـد که عوامل اجتماعی در کنار عوامل شـناختی نقـش بزرگـی را در یادگیری اثبات توسط دانش‌آموزان ایفا می‌کنند [پیشین].



هارل و ساودر (۲۰۰۷) معتقدند، فرایند اثبات فعالیتی اجتماعی (جمعی) است که می‌تواند در همهٔ برنامه‌های درسی ریاضیات، از دورهٔ پیش‌دبستانی به تمام دوره‌های تحصیلی نفوذ کند. آن‌ها بیان می‌دارند که اثبات هر گزارهٔ ریاضی، علاوه بر اینکه فرد اثبات‌کننده را در مورد صحت و درستی گزاره و فرایند اثبات متقاعد می‌کند، باید از نظر دقت و اعتبار مورد پذیرش و تأیید جامعهٔ موردنظر نیز باشد. لذا اغلب دانش‌آموزان در تعیین اینکه چه موقع یک اثبات کامل و تمام شده است، مشکل دارند. بسیاری از محققان در زمینهٔ آموزش ریاضی دلایل مهمی را برای تجدیدنظر در ضرورت دقت زیاد در یک اثبات بیان کرده‌اند. تأکید آن‌ها بر این است که برای ارائهٔ اثبات باید به مخاطبین و جامعهٔ مورد نظر توجه داشت [Stylianides & Stylianides, 2008]. برای مثال، اگر یک دانش‌آموز کلاس دوم ابتدایی بخواهد برای هم‌کلاسی‌هایش ثابت کند که حاصل جمع دو عدد، بزرگ‌تر یا مساوی با عدد بزرگ‌تر است، به احتمال زیاد باید گروهی از دانش‌آموزان را متقاعد کند که هنوز با کسرها و اعداد منفی آشنا نیستند.



لدی[9] (۲۰۰۱) معتقد است، آنچه که به عنوان اثبات برای دانش‌آموزان کلاس پنجم مطرح و مورد قبول واقع شده، ممکن است به عنوان یک اثبات ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب نباشد [Varghese, 2007].

بیشاب (۱۹۹۸) با ذکر مثالی بیان می‌کند اگرچه بیان این مطلب که جمع زوایای یک مثلث ۱۸۰ درجه است، به منطقهٔ جغرافیایی بستگی ندارد، ولی باز هم یک موضوع فرهنگی ـ اجتماعی است. او همچنین می‌پرسد: «چرا ۱۸۰ درجه و نه ۲۰۰ درجه؟» در واقع او معتقد است که اثبات بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعهٔ موردنظر دارد [Clements & Ellerton, 1996].

ویلدر[10] (۱۹۸۱) معتقد است، همواره باید به این نکته توجه شود که آنچه اثبات را می‌سازد، از فرهنگی به فرهنگ دیگر و همچنین از سنی به سن دیگر متفاوت است. او و برخی از محققان بر این باورند که ریاضیات صرفاً مجموعه‌ای از حقایق مطلق نیست، بلکه حقایق می‌توانند براساس زمینه، مفهوم و کاربرد موردنظر تغییر کنند [Bayazit, 2009].

دت‌لفسن[11] (۲۰۰۵) بر این باور است که فرایند اثبات صرفاً جنبهٔ منطقی ندارد و موضوعی فرهنگی و اجتماعی به‌شمار می‌رود. در واقع او معتقد است که فرایند اثبات در یک بافت اجتماعی و فرهنگی تکامل می‌یابد و مخاطبان خاص خود را دارد. علاوه بر این، پذیرش اعتبار یک اثبات توسط ریاضی‌دانان، این مطلب را می‌رساند که تأیید و تصدیق اثبات، فرایندی اجتماعی است و معیارهای مورد پذیرش اثبات در یک جامعهٔ ریاضی با گذشت زمان و دانشی که آن‌ها به‌دست می‌آورند، تغییر می‌کند [پیشین].

ویلدر معتقد است، هنگامی که یک اثبات ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌توان فرضیه‌ها و عقاید پنهانی منطبق با فرهنگ ریاضی عصر خود را در آن اثبات پیدا کرد. بهترین مثال‌های شناخته شده در این مورد، مثال‌های خوب و ایده‌آل از اثبات‌های دقیق در هندسه هستند که قبلاً تنها بر اصول **اقلیدس** منطبق بودند، در حالی که هم‌اکنون با توجه به مباحثی همچون هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ نتاری و غیره، این نتیجه حاصل می‌شود که ممکن است برخی از اثبات‌های هندسی با استفاده از اصول هندسهٔ اقلیدسی نامعتبر باشند.

عامل زبان نیز به عنوان یکی از عوامل فرهنگی جامعه در نظر گرفته می‌شود و تأثیر آن روی یادگیری مورد تأیید قرار گرفته است. برای مثال، ساختارهای زبانی که در زبان عامیانه از آن‌ها استفاده می‌شود، می‌توانند از ساختار زبانی که در زمینه‌های رسمی به‌خصوص در ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند، متفاوت باشند. برخی از تحقیقات نشان می‌دهند که معنای عامیانهٔ مفاهیم ریاضی (مثلاً حد و پیوستگی)، می‌تواند بر درک و فهم دانش‌آموزان و یادگیری این مفاهیم در آموزش رسمی اثر بگذارد.

در زمینهٔ اثبات نیز این سؤال مطرح است که: «آیا فهم دانش‌آموزان از اثبات، **متقاعد شدن**[12] است یا **اعتبار**[13] **اثبات**؟» برخی تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان بیشتر به «اثبات‌های متقاعدکننده» تمایل دارند تا «اثبات‌های معتبر» [Healy & Hoyles, 2000; Chin & Lin, 2009].

در تحقیق هیلی و هویلز (۲۰۰۰) معلوم شد که اغلب دانش‌آموزان اثبات‌های تجربی و روایت‌گونه را نزدیک به رویکرد خود می‌دانند، در صورتی که اثبات‌های رسمی (صوری) را برای دریافت نمرهٔ خوب از معلمشان انتخاب می‌کنند.

اینگلیس و رماس[14] (۲۰۱۱) معتقدند که گاهی دانش‌آموز نمی‌تواند بین «متقاعد شدن» و «اعتبار اثبات» تمایز قائل شود. همچنین، آنچه برای یک دانش‌آموز اثبات به‌شمار می‌آید، بستگی به محیط، جامعه و شخص اثبات‌کننده دارد. آن‌ها در مطالعهٔ خود به این نتیجه رسیدند که فهم دانش‌آموزان از کلمهٔ «اثبات»[15] نسبت به واژهٔ «ثابت‌کردن»[16] رسمی‌تر است. برخی از یادگیرندگان در مواجهه با واژهٔ «ثابت‌کردن» در سؤال مورد نظر، ارزیابی یک اثبات را براساس «متقاعد شدن» در مورد درستی اثبات انجام می‌دهند؛ در صورتی که اغلب آن‌ها در مواجهه با واژهٔ «اثبات»، براساس «اعتبار» اثبات ارائه شده، آن را مورد ارزیابی قرار می‌دهند. به‌طور کلی اینگلیس و رماس به این نتیجه می‌رسند

که رویکـرد برخـی از یادگیرندگان در مواجهه با واژه‌های متفاوت اثبات (اسـم و فعل)، متفاوت است. آن‌ها معتقدند که تأثیر مفاهیم روزانه بر مفاهیم رسـمی مورد استفاده توسط دانش‌آموزان باید در سه مرحله بررسی شود که عبارت‌اند از:

۱. معنای کلمه یا مفهوم موردنظر در زبان عامیانه و نحوهٔ اسـتفاده از آن مشخص شود؛

۲. بررسـی شـود که ایـن مفاهیم در درس ریاضـی چگونه توسـط دانش‌آموزان فهمیده می‌شوند؛

۳. بایـد رابطهٔ بین معانـی مفاهیم موردنظـر در دو مورد بالا بررسـی شود.

آن‌ها براساس یافته‌های تحقیق خود تأکیـد می‌کنند که باید به دانش‌آموزان کمک کنیم تا مفاهیم رسمی و زبان فنی ریاضیات را در بحث‌های کلاسی‌شـان، درست مورد استفاده قرار دهند و بتوانند بین این مفاهیم و مفاهیم مورد استفاده در زبان عامیانه تمایز قائل شـوند. علاوه بر این، آموزشـگرانی کـه روی ماهیت اجتماعـی و فرهنگـی اثبـات تأکیـد می‌کنند، معتقدند کـه معلمان باید در کلاس درس محیطـی فراهم آورند که دانش‌آمـوزان با یکدیگـر در مورد آنچه که یک توجیـه ریاضی مـورد قبول را می‌سازد، بحث و گفت‌وگو داشته باشند [Weber, 2005].

نتیجه‌گیری

به‌طور کلی اثبات ریاضی فرایندی اسـت که بررسـی ماهیت آن، به عوامل متفاوتی از جمله عوامل شناختی، ریاضی، فرهنگی و اجتماعی بستگی دارد. در جامعهٔ آموزشـی نیز هنجارها و قوانین اجتماعـی و فرهنگی در کلاس درس بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در فرایند اثبات اثر می‌گذارند. این هنجارها می‌توانند شامل موارد و الگوهایی باشند که توسط معلم و دانش‌آموزان به عنوان یک توضیح و یا توجیه قابل قبول مطرح می‌شوند. در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، معلم باید بداند که فرایند اثبات در جریان ساخته‌شـدن با ارائهٔ آن به صورت یک محصول تمام شـده که متکی بر دقت اسـت، تفاوت دارد. همچنیـن، معلمان به منظور انتخاب روش تدریس مناسب به‌ویژه در ارتباط با فرایند اثبات، باید همواره به رشد شناختی دانش‌آموزان، سبک‌های یادگیری آن‌ها و عوامل تأثیرگذار بر یادگیری و باور دانش‌آموزان توجه داشـته باشند و براسـاس آن، بین توانایی آن‌ها و ارائهٔ مفاهیم موردنظر، هماهنگی و تناسب برقرار کنند. علاوه بر این، معلم می‌تواند در کلاس درس، شرایطی را فراهم سازد که دانش‌آموزان بتوانند در یک فضای پویا نظرات خود را بیان و استدلال‌های یکدیگر را نقد و بررسی کنند؛ به گونه‌ای که با محدودیت برخی از استدلال‌ها آشنا شوند و به دنبال روش‌های منطقی برای تأیید و اثبات ادعای خود باشند. در نهایت نیز این بحث و بررسی، و نقد و توجیه باید با هدایت معلم به سمت اثبات‌های معتبر سوق یابد.

پی‌نوشت

* استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
** کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی و دبیر ریاضی شهرستان دهاقان

1. Harel & Sowder
2. Leddy
3. acceptable
4. Johnson
5. Raman
6. private arguments
7. public argument
8. socio mathematical
9. Leddy
10. Wilder
11. Detlefsen
12. conviction
13. validity
14. Inglis & Ramos
15. proof
16. prove

منابع

۱. ایگل ویتس، بوریس و استویل، جودیث (۱۳۷۰). *مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی*. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه (نشر اثر اصلی ۱۹۷۳). تهران.

۲. تال، دیوید (۱۳۸۵). «ماهیت اثبات ریاضی». ترجمهٔ عرفان صفر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۸۳.

3. Bayazit, N. (2009). Prospective mathematics teachers? use of mathematical definitions in doing proof. Unpuplished doctoral dissertation, Florida state university. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

4. Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, Retrieved May 10, 2011 from http://www.springer.com.

5. Chin, E.T. & Lin, F-L. (2009). A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK, *Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, No. 2, pp.52-67.

6. Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (1996). *Mathematics education research: Past, present and future.* Unesco.

7. Dee Vanspronesn, Hillary (2008). Proof processes of novice mathematics proof writers, Unpuplished doctoral dissertation, university of Montana, USA. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

8. Detlefsen, Michael (2005). *Proof and knowledge mathematics.* London and New York: Routledge.

9. Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education.* 40, 487-500.

10. Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

11. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in *Mathematics Education,* 31(4), 396-428.

12. Heinze, Aiso (2010). Mathematicians' Individual Criteria for Accepting Theorems and Proofs: An Empirical Approach. In Hanna, Gila, Niels Jahnke, Hans & Pulte, Helmut (Ed.), *Explantion and Proof in Mathematics* (chap. 8, pp. 101-111). New York: Springer Science.

13. Inglis, Matthew & Pablo Mejia-Ramos (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *Journal of Mathematical Behavior,* 30, 19-29.

14. Mueller, Mary (2007). A study of the development of reasoning in sixth grade students, Unpuplished doctoral dissertation, the state university of new Jersey, United States. Retrieved from ProQuest Digital Dissertations.

15. Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning,* 10, 103-133.

16. Varghese, Thomas, (2007). *Students teachers conception of mathematical proof.* Unpuplished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada.

17. Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. MAA Online: Research Sampler, Cited from http://www.maa.org./t_and_l/sampler/rs_8.html,in 27.7.2010.

18. Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 351-360.

حمیدرضا امیری

بخش دوم

پیشامدهای تصادفی و احتمال در فضاهای نمونهٔ گسسته و پیوسته

پیشامدهای مستقل و وابسته

تعریف: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را مستقل از هم می‌نامیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع هر یک روی وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. (A رخ بدهد یا رخ ندهد، B بتواند رخ بدهد.)

تذکر مهم: اگر A و B در دو فضای نمونه‌ای متفاوت مانند S_1 و S_2 تعریف شده باشند، همواره مستقل هستند و واضح است که رخداد یا عدم رخداد هر یک هیچ تأثیری بر رخداد دیگری ندارد. مثلاً انداختن یک تاس و یک سکه با فضاهای نمونه‌ای $S_1 = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ و $S_2 = \{H, T\}$ دو پیشامد مستقل از هم هستند.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S مستقل باشند آن است که:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

(این قضیه با استفاده از فرمول احتمال شرطی به اثبات می‌رسد.)

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مستقل یا وابسته بودن پیشامدهای داده شده را بررسی کنید:

I) ریختن ۲ تاس با هم یا یک تاس ۲ بار = S

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید = A

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۹ باشد = B

حل: عدم رخداد A در بعضی از حالت‌ها مانع رخداد B می‌شود. مثلاً اگر تاس اول ۱ یا ۲ بیاید، امکان اینکه مجموع دو تاس ۹ باشد، وجود ندارد. پس دو پیشامد وابسته هستند. حال از طریق قضیه این نتیجه را تأیید می‌کنیم:

$(A \cap B) = \{(۵, ۴)\}$ و $n(A) = ۶$ و $n(B) = ۴$

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

و $P(B)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}\neq\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۹}$

P(A) = P(A)

II) ریختن دو تاس با هم یا یک تاس، دو بار = S

پیشامد آنکه تاس اول ۵ بیاید = A

پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد = B

حل: A رخ بدهد یا رخ ندهد، همواره B می‌تواند رخ بدهد. پس دو پیشامد مستقل هستند و از طریق قضیه داریم:

$n(S)=۳۶$ و $n(A)=۶$ و $n(B)=۶$ و $n(A\cap B)=۱$

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

و $P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}=P(A)\times P(B)$

تعریف: ۳ پیشامدهای A، B و C از فضای نمونه‌ای S را مستقل از یکدیگر می‌نامیم هرگاه: اولاً دوبه‌دو مستقل باشند، ثانیاً داشته باشیم:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$$

تذکر: ممکن است سه پیشامد A، B و C از فضای نمونه‌ای S طوری تعریف شوند که شرط دوم را داشته باشند، ولی دوبه‌دو مستقل نباشند (در واقع شرط دوم شرط اول را نتیجه نمی‌دهد).

مثال: فرض کنیم: $S=\{۱,۲,...,۷,۸\}$، $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $B=\{۴,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۴,۸,۷,۶\}$. در این صورت داریم:

$P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ و $P(B)=\frac{۱}{۲}$ و $P(C)=\frac{۱}{۲}$

شرط دوم برقرار است:

$$P(A\cap B\cap C)=P(\{۴\})=\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$

$$(A\cap B)=\{۴\}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۸}\neq P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$(A\cap C)=\{۴\}\rightarrow P(A\cap C)=\frac{۱}{۸}\neq P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۴}$$

$$(B\cap C)=\{۴,۶,۷\}$$

$$\rightarrow P(B\cap C)=\frac{۳}{۸}\neq P(B)\times P(C)=\frac{۱}{۴}$$

تذکر: تعریف فوق برای n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n از فضای نمونه‌ای S قابل تعمیم است. یعنی اگر پیشامدهای $A_۱$ تا A_n دوبه‌دو مستقل باشند و داشته باشیم: $P(\bigcap_{i=۱}^{n}A_i)=\prod_{i=۱}^{n}P(A_i)$، در این صورت این پیشامدها مستقل از یکدیگرند.

تذکر: دو پیشامد A و B از فضای S می‌توانند:

I) سازگار و مستقل باشند.

II) سازگار و وابسته باشند.

III) ناسازگار $((A\cap B)=\varnothing)$ و مستقل باشند که در این‌صورت: $P(A)=۰$ یا $P(B)=۰$.

IV) ناسازگار و وابسته باشند.

تذکر: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این‌صورت A' و B' مستقل‌اند، A' و B مستقل‌اند و A و B' نیز مستقل‌اند.

نکتهٔ مهم: اگر $S=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، همواره داریم:

$$۱)\ \forall ۱\leq i\leq n;\ ۰\leq P(\{a_i\})\leq ۱$$

$$۲)\ \sum_{i=۱}^{n}P(\{a_i\})=۱$$

یا $P(\{a_۱\})+P(\{a_۲\})+...+P(\{a_n\})=۱$

(برای راحتی در نگارش از این به بعد به جای $P(\{a_i\})$ می‌نویسیم: $(P(a_i)$).

تعریف: اگر $S=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ و در این فضای نمونه‌ای داشته باشیم: $P(a_۱)=P(a_۲)=...=P(a_n)=\frac{۱}{n}$، در این صورت فضای S را فضای نمونه‌ای **هم‌شانس** و در غیر این‌صورت آن را فضای **غیرهم‌شانس** می‌نامیم. (اگر در یک فضای نمونه‌ای حداقل ۲ برامد ساده، احتمال نابرابر داشته باشند، آن فضا **غیرهم‌شانس** است.)

مثال: یک تاس طوری ساخته شده که احتمال وقوع هر وجه آن متناسب است با دو برابرعدد حک شده روی همان وجه. اگر این تاس را بیندازیم چه‌قدر احتمال دارد عدد حاصل فرد باشد؟

حل: طبق فرض داریم:

$P(1)=2x$ و $P(2)=4x$ و $P(3)=6x$

و $P(4)=8x$ و $P(5)=10x$ و $P(6)=12x$

$$\sum_{i=1}^{6}P(i)=1\rightarrow 2x+4x+...+12x=1\rightarrow x=\frac{1}{42}$$

$$P(\{1,3,5\})=P(1)+P(3)+P(5)$$
$$=\frac{2}{42}+\frac{6}{42}+\frac{10}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$

پیشامدهای مربوط به تولد

به دنیا آمدن و تولد اشخاص پیشامدهایی مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. برای مثال، احتمال آنکه دو نفر در روز شنبه به دنیا آمده باشند برابر است با:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{49}$$

مثال: در یک تیم ۵ نفری، چه‌قدر احتمال دارد:

الف) هر پنج نفر روز شنبه به‌دنیا آمده باشند؟

ب) هر پنج نفر در یک روز از هفته به‌دنیا آمده باشند؟

ج) روز تولد هر پنج نفر متمایز باشد (تولد در یکی از روزهای هفته).

د) حداقل ۲ نفر در یک روز از ایام هفته متولد شده باشند؟

حل:

الف) $P(A)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{7^5}$

ب) $P(B)=7\times\frac{1}{7^5}=\frac{1}{7^4}$

ج) $P(C)=\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{360}{7^4}$

د) $P(D)=1-\frac{360}{7^4}$

تذکر: احتمال آنکه n نفر $(n\leq 365)$ همگی در یک روز از سال متولد شده باشند برابر است با: $\frac{365}{365^n}$ یا: $\frac{1}{365^{n-1}}$

و احتمال آنکه روز تولد هیچ دو نفری در سال یکی نباشد، از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{P(365,n)}{365^n}$$

یا:

$$P(A)=\frac{365\times 364\times...\times(365-(n-1))}{365^n}$$

مثال: در جمعی k نفره حداقل مقدار برای k کدام است تا احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند، بیشتر از $\frac{1}{3}$ باشد؟

حل: اگر A را پیشامد مورد نظر فرض کنیم، متمم A یا A' آن است که روز تولد هر k نفر متمایز باشد.

$$P(A)>\frac{1}{3}\rightarrow 1-P(A')>\frac{1}{3}$$
$$\rightarrow P(A')<1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\rightarrow\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}\times...\times\frac{8-k}{7}<\frac{2}{3}$$
$$\rightarrow k_{min}=3$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر سه مهره آبی باشند.

(تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان سه مهره را از بین ۱۰ مهره انتخاب کرد: $n(S)=\binom{10}{3}=120$)

$$P(A)=\frac{\binom{4}{3}}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

II) هر سه مهره هم‌رنگ باشند (یا هر سه قرمز یا هر سه آبی یا هر سه سبز).

$$P(A)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{120}=\frac{1+4+1}{120}=\frac{1}{20}$$

III) هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشند (۱ مهره قرمز، ۱ مهره آبی و ۱ مهره سبز).

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{120}=\frac{3}{10}$$

IV) حداقل ۱ مهره سبز باشد.

پیشامد آنکه هیچ مهره‌ای سبز نباشد = A'

$$\rightarrow n(A')=\binom{7}{3}=35$$

$$P(A')=\frac{35}{120}\rightarrow P(A)=1-P(A')=1-\frac{35}{120}=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$$

V) حداکثر ۲ مهره آبی باشد.

پیشامد آنکه هر سه مهره آبی باشند = A'

$$\rightarrow P(A')=\frac{\binom{4}{3}}{120}=\frac{4}{120}\rightarrow P(A)=1-\frac{4}{120}=\frac{29}{30}$$

VI) فقط ۲ مهره قرمز باشد (دو مهره قرمز و ۱ مهره

غیرقرمز).

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{۱۲۰}=\frac{۲۱}{۱۲۰}=\frac{۷}{۴۰}$$

VII) هیچ مهره‌ای سبز نباشد.

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۳}}{۱۲۰}=\frac{۳۵}{۱۲۰}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

مثال: دو تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر دو تاس زوج باشند.

$n(S)=۶^۲$

و $A=\{۲,۴,۶\}\times\{۲,۴,۶\}\rightarrow n(A)=۳\times۳=۹$

$$\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

II) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند.

$n(S)=۶^۲$ و $A=\{۳,۴,۵,۶\}\times\{۳,۴,۵,۶\}$

$$\rightarrow n(A)=۴\times۴=۱۶\rightarrow P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

III) تاس اول ۲ بیاید.

$A=\{(۲,۱),(۲,۲),...(۲,۶)\}\rightarrow n(A)=۶$

و $P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

IV) هر دو با هم اول نباشند.

هر دو اول باشند $A'=\{۲,۳,۵\}\times\{۲,۳,۵\}$

$\rightarrow n(A')=۳\times۳=۹$ و $P(A')=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

و $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

V) هیچ‌کدام از دو تاس مضرب ۳ نباشند.

$A=\{۱,۲,۴,۵\}\times\{۱,۲,۴,۵\}\rightarrow n(A)=۴\times۴=۱۶$

$$\rightarrow P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

VI) مجموع دو تاس بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

$A=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\}\rightarrow n(A)=۴$

و $P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$

VII) حاصل‌ضرب دو تاس بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد.

حاصل ضرب دو تاس ۱۰ یا ۲۰ یا ۳۰ باشد = A

$\rightarrow A=\{(۲,۵),(۵,۲),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۵),(۵,۶)\}$

$$n(A)=۶\rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

مثال: ۳ تاس را با هم می‌ریزیم. مطلوب است احتمال آنکه:

I) هر سه بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

$n(S)=۶\times۶\times۶=۲۱۶$

$A=\{۳,۶\}\times\{۳,۶\}\times\{۳,۶\}\rightarrow n(A)=۲^۳=۸$

$$\rightarrow P(A)=\frac{۸}{۶^۳}=\frac{۸}{۲۱۶}=\frac{۱}{۲۷}$$

II) مجموع سه تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

پیشامد آنکه مجموع ۳ تاس کوچک‌تر یا مساوی ۵ باشد = A'

$A'=\{(۱,۱,۱),(۲,۱,۱),(۱,۲,۱),(۱,۱,۲),(۲,۲,۱),(۲,۱,۲),$
$(۱,۲,۲),(۳,۱,۱),(۱,۳,۱),(۱,۱,۳)\}$

$\rightarrow n(A')=۱۰$

و $P(A')=\frac{۱۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۱۰۸}\rightarrow P(A)=۱-\frac{۵}{۱۰۸}=\frac{۱۰۳}{۱۰۸}$

III) سه عدد رو شده یک دنبالهٔ هندسی صعودی با قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

$$A=\{\underbrace{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),...,(۶,۶,۶)}_{\text{قدرنسبت ۱}},\quad\underbrace{(۱,۲,۴)}_{\text{قدرنسبت ۲}}\}$$

$\rightarrow n(A)=۷$ و $P(A)=\frac{۷}{۲۱۶}$

V) سه عدد رو شده بتوانند یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت صحیح تشکیل بدهند.

توجه داریم که اگر قدرنسبت، $d=۰$ باشد، هر سه عدد با هم برابر هستند که ۶ حالت امکان دارد. همچنین اگر $d=۱$، اعداد ۱، ۲ و ۳ یا ۲، ۳ و ۴ یا ۳، ۴ و ۵ یا ۴، ۵ و ۶ می‌توانند تشکیل دنبالهٔ عددی یا حسابی بدهند که در هر حالت دارای ۶=!۳ جایگشت هستند. اگر $d=۲$ باشد، اعداد ۱، ۳ و ۵ تشکیل دنبالهٔ عددی می‌دهند که ۶=!۳ جایگشت دارند و نیز اعداد ۲، ۴ و ۶ که آن‌ها نیز ۶=!۳ جایگشت دارند. اگر هم $d\geq۳$ فرض شود، اعداد نمی‌توانند دنبالهٔ عددی تشکیل بدهند. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$n(A)=۴\times۶+۶+۶=۳۶\rightarrow P(A)=\frac{۳۶}{۲۱۶}=\frac{۱}{۶}$$

مثال: در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز وجود دارد. ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار می‌گذاریم. سپس مهرهٔ دیگری از جعبه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهرهٔ دوم آبی باشد؟

نکتهٔ مهم و عجیب: اگر در جعبه‌ای n مهره از رنگ‌های متفاوت وجود داشــته باشــد و ۱ مهره یا ۲ مهره ... یا $(n-1)$ مهره بــه تصادف از جعبه خارج کرده و بــدون نگاه کردن به رنگشان آن‌ها را کنار بگذاریم و سپس مهرهٔ دیگری به تصادف خارج کنیم، در این صورت احتمال آنکه مهرهٔ برداشته شده در مرحلهٔ دوم از رنگ خاصی از رنگ‌های موجود در جعبه باشد، با احتمال آنکه ابتدا مهره‌ای از جعبه خارج کنیم که از همان رنگ باشد، برابر است.

در مثــال فوق، احتمال آنکه مهره‌ای از جعبه خارج کنیم و رنگ آن آبی باشــد برابر است با تقسیم تعداد مهره‌های آبی بر تعــداد کل مهره‌های جعبه؛ یعنی: $P(\text{آبی}) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$. اگر بخواهیم از این نکته استفاده نکنیم، برای مهرهٔ خارج شده باید دو حالت در نظر بگیریم: یکی اینکه مهرهٔ اولی آبی نباشــد و دومی آبی باشــد، و حالت دیگر اینکه مهرهٔ اولی آبی باشــد و دومی نیز آبی باشد. جمع این دو احتمال باید همان $\frac{۲}{۵}$ شود:

$$P(\text{مهرهٔ دوم آبی}) = \underbrace{\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}}_{\text{اولی غیرآبی و دومی آبی}} + \underbrace{\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}}_{\text{اولی آبی و دومی آبی}} =$$

$$= \frac{۲۴}{۹۰} + \frac{۱۲}{۹۰} = \frac{۳۶}{۹۰} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

مثــال: در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهــرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ ســفید وجود دارد. ۳ مهره از این جعبه به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد:

I) اولی سفید، دومی آبی و سومی قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{۳}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۲۰}$$

II) مهرهٔ اول آبی و مهرهٔ دوم قرمز باشد؟

$$P(A) = \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۸}{۸} = \frac{۲}{۱۵}$$

(توجه دارید که مهرهٔ سوم تأثیری بر مهره‌های اول و دوم ندارد و هر مهره‌ای باشد، مطلوب است.)

III) مهرهٔ اول آبی و مهرهٔ سوم سفید باشد؟

روش اول: برای مهرهٔ دوم که روی سومی تأثیرگذار است، دو حالت در نظر می‌گیریم: دومی یا سفید بوده یا سفید نبوده است:

$$P(A) = \left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}\right) + \left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right) = \frac{۲}{۱۵}$$

روش دوم: چون روی مهرهٔ دوم قیدی گذاشــته نشــده است، می‌توانیم پس از برداشت مهرهٔ اول یک مهره به تصادف برداریم و بدون نگاه کردن به رنگش، آن را کنار بگذاریم که در این صورت طبق نکتهٔ قبل برای مهرهٔ سوم فضای نمونه تغییری نکرده اســت. در واقع مهرهٔ سوم را می‌توان در حکم مهرهٔ دوم فرض کرد و در این‌صورت خواهیم داشت:

$$P(A) = \left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\right) = \frac{۱۲}{۹۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

IV) مهرهٔ دوم قرمز و مهرهٔ سوم سفید باشد.

چون روی مهرهٔ اول قید گذاشــته نشــده است، پس یک مهــره برمی‌داریم و بــدون نگاه کردن به رنگــش، آن را کنار می‌گذاریم که در این صورت مهره‌های دوم و سوم در حکم اول و دوم به‌حساب می‌آیند و داریم:

$$P(A) = P(\text{اولی قرمز و دومی سفید}) = \frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۱۰}$$

اگر بخواهیم مسئله را به روش معمول حل کنیم، باید برای مهرهٔ اول سه حالت در نظر بگیریم:

$$P(A) = \underbrace{\left(\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۲}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)}_{\text{اولی قرمز}} + \underbrace{\left(\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)}_{\text{اولی آبی}} + \underbrace{\left(\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}\times\frac{۲}{۸}\right)}_{\text{اولی سفید}} = \frac{۱}{۱۰}$$

تمرین

۱. ســکهٔ ســالمی را ده‌بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آنکه:

الف) دقیقاً پنج بار رو بیاید.

ب) دقیقاً شش بار رو بیاید.

ج) حداقل شش بار رو بیاید.

۲. چهــار دانش‌آموز کلاس دوم و هفت دانش‌آموز کلاس ســوم داوطلب بازی در تیم والیبال مدرسه شده‌اند، در صورتی که بازی در تیم برای ۶ نفر از آن‌ها امکان دارد. مطلوب است تعیین احتمال آنکه حداقل ۳ نفر از کلاس سوم باشند.

۳. در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سفید وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آنکه:

الف) هر سه مهره همرنگ باشند.

ب) فقط دو مهره همرنگ باشند.

ج) لااقل دو مهره همرنگ باشند.

مصطفی دیداری
کارشناس ارشد ریاضی

بسط دو جمله‌ای و ویژگی‌های آن



چکیده

در این مقاله در پی آن هستیم که بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و مثلث خیام ـ پاسکال را معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را بیان کنیم.

کلیدواژه‌ها: بسط دو جمله‌ای، مثلث خیام ـ پاسکال، غیاث‌الدین جمشید کاشانی

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

....

هر عبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، «دو جمله‌ای جمشید کاشانی» و بسط آن را به صورت چند جمله‌ای از a و b، «بسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی» می‌نامیم.

این چند جمله‌ای $n+1$ جمله دارد و هر جملهٔ آن به صورت مضربی است از: $a^k b^{n-k}$ (یا $a^{n-k}b^k$). معمولاً جمله‌ها برحسب توان‌های نزولی a مرتب می‌شوند. مجموع توان‌های a و b در هر جمله نیز برابر با n است.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی به شکل‌های زیر مرتب کرد. به این مثلث، «مثلث خیام ـ پاسکال» گفته می‌شود.

(الف)

سطر صفرم	$(a+b)^0$	۱
سطر یکم	$(a+b)^1$	۱ ۱
سطر دوم	$(a+b)^2$	۱ ۲ ۱
سطر سوم	$(a+b)^3$	۱ ۳ ۳ ۱
سطر چهارم	$(a+b)^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
سطر پنجم	$(a+b)^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
سطر ششم	$(a+b)^6$	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
	....	

(ب)

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

دو ستون کناری مثلث همواره عدد یک و هر درایه از جمع دو درایهٔ سطر قبل به صورتی که در شکل‌ها نشان داده شده است، به‌دست می‌آید.

مثال ۱. حاصل بسط‌های زیر را با استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال به‌دست آورید.

الف) $(۲a+b)^۵$ ب) $(x+\frac{۱}{x})^۴$

ج) $(x^۲+۱)^۶$ د) $(x-۱)^۵$

جواب: با توجه به سطرهای پنجم، چهارم و ششم مثلث داریم:

الف) $(۲a+b)^۵=(۲a)^۵+۵(۲a)^۴(b)+۱۰(۲a)^۳b^۲$
$+۱۰(۲a)^۲b^۳+۵(۲a)b^۴+b^۵=۳۲a^۵+۸۰a^۴b$
$+۸۰a^۳b^۲+۴۰a^۲b^۳+۱۰ab^۴+b^۵$

ب) $(x+\frac{۱}{x})^۴=x^۴+۴x^۳(\frac{۱}{x})+۶x^۲(\frac{۱}{x})^۲+۴x(\frac{۱}{x})^۳$
$+(\frac{۱}{x})^۴=x^۴+۴x^۲+۶+\frac{۴}{x^۲}+\frac{۱}{x^۴}$

ج) $(x^۲+۱)^۶=(x^۲)^۶+۶(x^۲)^۵+۱۵(x^۲)^۴+۲۰(x^۲)^۳$
$+۱۵(x^۲)^۲+۶(x^۲)+۱=x^{۱۲}+۶x^{۱۰}+۱۵x^۸$
$+۲۰x^۶+۱۵x^۴+۶x^۲+۱$

د) $(x-۱)^۵=(x+(-۱))^۵=x^۵+۵x^۴(-۱)+۱۰x^۳(-۱)^۲$
$+۱۰x^۲(-۱)^۳+۵x(-۱)^۴+(-۱)^۵=x^۵-۵x^۴+۱۰x^۳$
$-۱۰x^۲+۵x-۱$

در تمامی مثال‌ها به تعداد جملات و رابطهٔ آن با توان، در قسمت ب به جملهٔ فاقد x و چگونگی به‌دست آمدن آن، در مثال ج به توان x و در مثال آخر به علامت جمله‌ها دقت کنید

مثال ۲. تعداد جمله‌های حاصل عبارت $(x+۱)^{۱۲}+(x-۲)^{۱۸}$ را (پس از ساده‌کردن) به‌دست آورید.

همان‌گونه که قبلاً بیان کردیم، $(a+b)^n$ دارای $n+۱$ جمله است. بنابراین بسط اول دارای ۱۳ جمله و بسط دوم دارای ۱۹ جمله خواهد بود. با یک قضاوت سریع ممکن است گفته شود حاصل دارای ۳۲ جمله خواهد بود. اما تمامی جمله‌های بسط $(x+۱)^{۱۲}$ دارای جمله‌های متشابه در بسط $(x-۱۲)^{۱۸}$ هستند. بنابراین با آن‌ها ساده خواهند شد. یعنی بسط فوق دقیقاً دارای ۱۹ جمله خواهد بود.

بررسی ویژگی‌های مثلث خیام ـ پاسکال

۱. عددهای هر سطر نسبت به جملهٔ وسط (اگر n زوج باشد) یا دو جملهٔ وسط (اگر n فرد باشد) تقارن دارند.

۲. مجموع اعداد در سطر nام برابر است با ۲^n. در واقع مجموع ضریب‌های بسط $(a+b)^n$ برابر است با ۲^n. دلیل این مطلب آن است که برای به‌دست آوردن مجموع ضریب‌های هر چند جمله‌ای کافی است به جای متغیرها عدد یک را قرار دهیم. با همین استدلال می‌توان گفت اگر اعداد هر سطر را به‌طور متناوب کم و زیاد کنیم، حاصل برابر با صفر خواهد بود؛ چون: $۰=(۱-۱)^n$.

مثال ۳. مجموع ضریب‌های عددی هر بسط را به‌دست آورید.

الف) $(۲a+۳b)^۴$ ب) $(۲x-y+۳z)^۴$

جواب:

الف) $(۲a+۳b)^۴ \xrightarrow[b=۱]{a=۱}$ مجموع ضرایب $=۵^۴$

ب) $(۲x-y+۳z)^۴ \xrightarrow{x=y=z=۱}$ مجموع ضرایب $=۴^۴$

مثال ۴. مجموع ضریب‌های جمله‌های فاقد y را در بسط $(۳x-y-z)^۸$ به‌دست آورید.

جواب: کافی است به جای x و z عدد یک و به جای y عدد صفر را قرار دهیم: $(۳-۰-۱)^۸=۲^۸=۲۵۶$

۳. اگر در هر سطر جمله‌ها را یک در میان با یکدیگر جمع کنیم، حاصل یکسان خواهد بود. برای نمونه در سطر ششم داریم:

$۱+۱۵+۱۵+۱=۶+۲۰+۶$

به عبارت دیگر، در بسط $(a+b)^n$، مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها فرد است با مجموع ضرایب جمله‌هایی که توان a در آن‌ها زوج است، برابر خواهد بود.

۴. اگر آرایهٔ مثلثی را به صورت شکل الف در نظر بگیریم، مجموع اعداد هر ستون برابر است با عددی که در سطر و ستون بعدی قرار دارد؛ برای نمونه: $۱۰=۶+۳+۱$ یا $۱۵=۱+۲+۳+۴+۵$.

۵. همان‌گونه که در ابتدای کتاب حسابان ملاحظه کردید، مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$ به‌دست می‌آید که a، جملهٔ اول و q قدرنسبت است. بنابراین: $۱+۲+۲^۲+...+۲^{n-۱}=۲^n-۱$.

با توجه به مطلب اخیر، مجموع اعداد هر سطر یک واحد از مجموع اعداد سطرهای قبلی بیشتر خواهد بود.

۶. عدد به‌دست آمده از کنار هم قراردادن اعداد سطر nام برابر است با ۱۱^n؛ برای نمونه:

$۱۱^۰=۱$ ‏ ۱

$۱۱^۱=۱۱$ ‏ ۱ ۱

$۱۱^۲=۱۲۱$ ‏ ۱ ۲ ۱

$۱۱^۳=۱۳۳۱$ ‏ ۱ ۳ ۳ ۱

$۱۱^۴=۱۴۶۴۱$ ‏ ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

$۱۱^۵=۱۶۱۰۵۱$ ‏ ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

برای توجیه عدد به‌دست آمده در سطر پنجم به شکل زیر دقت کنید:

۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
۱	۶	۱	۰	۵	۱

۷. در کتاب هندسهٔ ۲ با مثلث‌های سرپینسکی آشنا شدید. اعداد زوج در مثلث را رنگ‌آمیزی و با این مثلث‌ها مقایسه کنید.

بسط دو جمله‌ای و ترکیب‌ها

در کتاب ریاضی سال دوم دبیرستان مشاهده کردید که تعداد انتخاب‌های k شیء از n شیء متمایز از رابطهٔ $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$ به‌دست می‌آید. در حالت خاص داشتیم: $\binom{n}{۰}=۱$، $\binom{n}{۱}=۱$، $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$.

با اینکه با استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال می‌توان ضرایب بسط دوجمله‌ای را به‌دست آورد، اما این روش دارای یک ایراد اساسی است. برای به‌دست آوردن هر سطر باید سطر قبلی (و در نتیجه تمامی سطرهای قبلی) را به‌طور کامل به‌دست آورده باشیم. در نتیجه این روش به‌دست آوردن ضریب‌ها، برای nهای بزرگ به محاسباتی پرحوصله نیاز دارد.

به اتحادهای زیر توجه کنید:

$$(a+b)^۱=\binom{۱}{۰}a+\binom{۱}{۱}b$$

$$(a+b)^۲=\binom{۲}{۰}a^۲+\binom{۲}{۱}ab+\binom{۲}{۲}b^۲$$

$$(a+b)^۳=\binom{۳}{۰}a^۳+\binom{۳}{۱}a^۲b+\binom{۳}{۲}ab^۲+\binom{۳}{۳}b^۳$$

$$(a+b)^۴=\binom{۴}{۰}a^۴+\binom{۴}{۱}a^۳b+\binom{۴}{۲}a^۲b^۲+\binom{۴}{۳}ab^۳+\binom{۴}{۴}b^۴$$

می‌توان ثابت کرد که در هر بسط ضریب جملهٔ $a^{n-k}b^k$ برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین:

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\dots+\binom{n}{n-۱}ab^{n-۱}+\binom{n}{n}b^n$$

مثال ۵. ضریب جملهٔ هفتم را در بسط $(۲x+y)^۹$ به‌دست آورید.

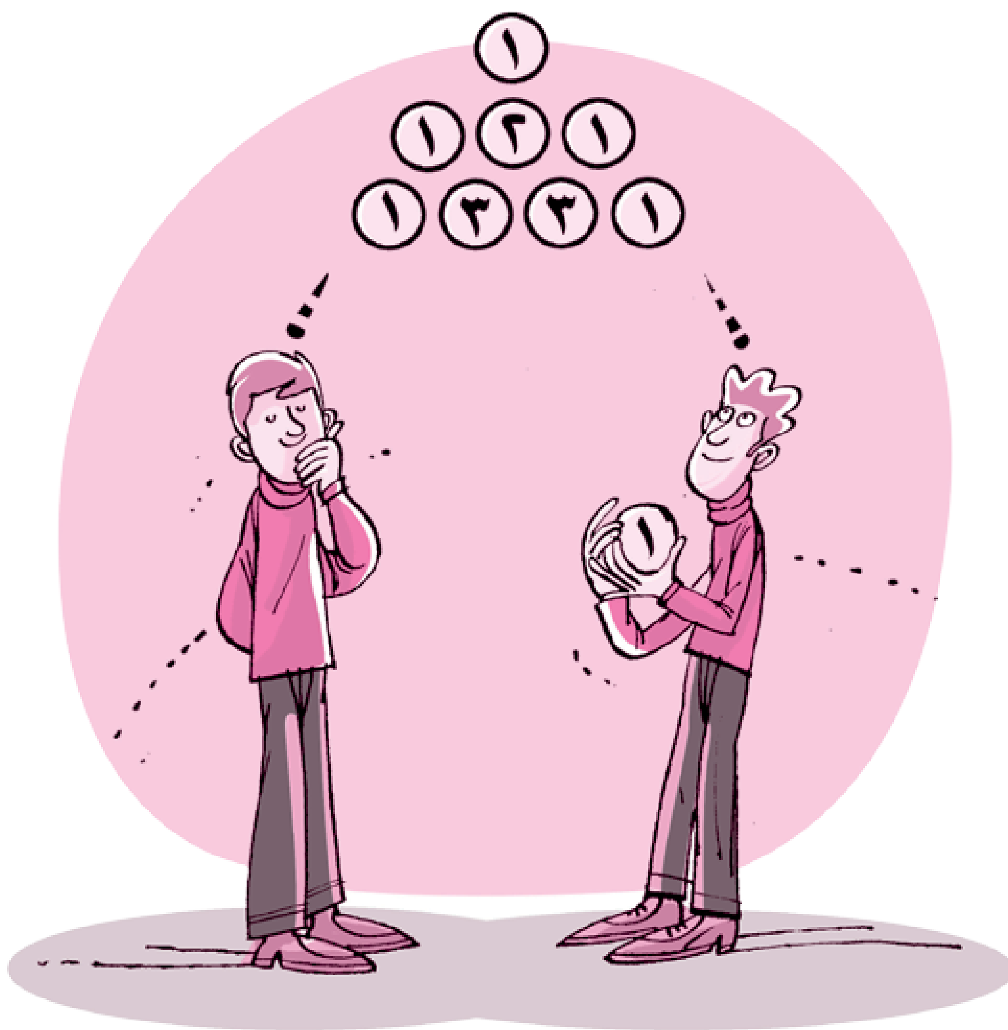
جواب: دقت کنید ضریب جملهٔ $(k+۱)$ام (جملهٔ دارای $a^{n-k}b^k$) برابر است با: $\binom{n}{k}$. بنابراین جملهٔ هفتم برابر است با: $\binom{۹}{۶}(۲x)^{۹-۶}(y)^۶$. در نتیجه ضریب جملهٔ هفتم برابر است با: $۸\binom{۹}{۶}$.

مثال ۶. ضریب جملهٔ ششم را در بسط $(۳x-y)^{۱۲}$ به‌دست آورید.

جواب: جملهٔ ششم به صورت $\binom{۱۲}{۵}(۳x)^۷(-y)^۵$ است. بنابراین ضریب آن عدد $-۳^۷\binom{۱۲}{۵}$ خواهد بود.

مثال ۷. ضریب $x^۳$ را در بسط $x(۱-x)^۵+x^۲(۲x+۱)^۸$ به‌دست آورید.

جواب: در جملهٔ شامل $(۱-x)^۵$ ضریب $x^۲$ و در جملهٔ دارای $(۲x+۱)^۸$ ضریب x را به‌دست می‌آوریم. این ضرایب به ترتیب $\binom{۵}{۲}$ و $۲\binom{۸}{۱}$ هستند. بنابراین ضریب $x^۳$ برابر است با: $۲\binom{۸}{۱}+\binom{۵}{۲}=۱۶+۱۰=۲۶$.



مثال ۸. ضریب جملهٔ هفتم، با ضریب کدام جملهٔ دیگر در بسط $(x+y)^{۳۸}$ برابر است؟

جواب: به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر ضریب جمله‌های q و p در بسط $(a+b)^n$ برابر باشند، داریم: $p+q=n+۲$. بنابراین: $۷+q=۴۰$ و لذا: $q=۳۳$. بنابراین ضریب جملهٔ هفتم با ضریب جملهٔ سی‌وسوم برابر است.

مثال ۹. ضریب جملهٔ وسط را در بسط $(a-۳b)^{۲۰}$ به‌دست آورید.

جواب: در بسط $(a+b)^n$ اگر n زوج باشد، تعداد جملات فرد و $(\frac{n}{۲}+۱)$امین جمله، جملهٔ وسط خواهد بود.
بنابراین جملهٔ یازدهم، جملهٔ وسط خواهد بود. جملهٔ یازدهم برابر است با: $\binom{۲۰}{۱۰}a^{۱۰}(-۳b)^{۱۰}$ و بنابراین ضریب آن $\binom{۲۰}{۱۰}\times ۳^{۱۰}$ خواهد بود.

مثال ۱۰. بزرگ‌ترین ضریب عددی را در بسط $(a+b)^{۱۵}$ به‌دست آورید.

جواب: با توجه به تقارن مثلث خیام ـ پاسکال و یک استدلال بازگشتی برای نامساوی $\binom{n}{k}\leq\binom{n}{k+۱}$ که $k\leq[\frac{n}{۲}]$، می‌توان گفت ضریب جملهٔ وسط (یا دو جملهٔ وسط) از سایر جملات بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین کافی است ضریب جملهٔ هشتم یا نهم را به‌دست آورید. لذا جواب $\binom{۱۵}{۸}$ خواهد بود.

* **سؤال:** بزرگ‌ترین جملهٔ بسط $(۱+\sqrt{۲})^{۵۰}$ چیست؟
(مخصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند)

مثال ۱۱. جملهٔ فاقد x را در بسط $(x+\frac{۱}{x})^{۱۲}$ به‌دست آورید.

جواب: با توجه به فرمول بسط دو جمله‌ای، تمامی جمله‌ها به شکل $\binom{۱۲}{k}x^{۱۲-k}(\frac{۱}{x})^k$ هستند. بنابراین باید $۱۲-k=k$ و لذا $k=۶$ باشد. در نتیجه پاسخ $\binom{۱۲}{۶}$ خواهد بود.

در حالت کلی، اگر n زوج باشد ضریب جمله فاقد x در بسط $(x+\frac{۱}{x})^n$ برابر است با: $\binom{n}{\frac{n}{۲}}$.

(اگر n فرد باشد چه‌طور؟)

مثال ۱۲. تعداد جمله‌های گویا در بسط دو جمله‌ای $(۱+\sqrt[۳]{۲})^{۲۰}$ را به‌دست آورید.

جواب: جمله‌های بسط فوق به صورت $\binom{۲۰}{k}(\sqrt[۳]{۲})^k$ هستند که در آن‌ها $۰\le k\le ۲۰$ و صحیح است.

بنابراین باید $(\sqrt[۳]{۲})^k=۲^{\frac{k}{۳}}$ گویا و لذا $\frac{k}{۳}$ عددی صحیح باشد. در نتیجه k باید متعلق به مجموعهٔ مضارب عدد ۳ باشد و داشته باشیم: $k=۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸$. یعنی بسط دارای شش جملهٔ گویا (جمله‌های چهارم، هفتم و...) خواهد بود.

مثال ۱۳. چند جملهٔ گویا در بسط $(\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۵})^{۱۰۰}$ وجود دارد؟

جواب: همانند مسئلهٔ قبلی، جمله‌ها به صورت $\binom{۱۰۰}{k}(\sqrt{۲})^{۱۰۰-k}(\sqrt[۳]{۵})^k$ هستند. بنابراین $\frac{۱۰۰-k}{۲}$ و $\frac{k}{۳}$ باید صحیح باشند. در نتیجه k باید متعلق به مجموعهٔ مضرب‌های عدد ۶ از مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,۱۰۰\}$ باشد. لذا به تعداد $۱۶=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]$ عدد گویا وجود دارد.

بار دیگر ویژگی‌های مثلث خیام ـ پاسکال را مرور کنید.

ویژگی اول رابطهٔ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ خواهد بود. ویژگی دوم چیزی نیست جز رابطهٔ معروف $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+...+\binom{n}{n}=۲^n$ و $\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}-...+(-۱)^n\binom{n}{n}=۰$. همچنین، با توجه به ویژگی سوم داریم:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+...=\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}+\binom{n}{۵}+...$$

شما نیز می‌توانید با بررسی مثلث ـ خیام پاسکال اتحادهای ترکیبیاتی دیگری کشف کنید!

سؤال: به‌دست آوردن ضرایب با استفاده از فرمول ترکیب نیز برای مقادیر تا حدی بزرگ، وقت‌گیر است. آیا روشی وجود دارد که بتوان ضرایب را آسان‌تر محاسبه کرد؟

حل: خوش‌بختانه پاسخ این سؤال مثبت است:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^۲+\frac{n(n-۱)}{۲}.\frac{n-۲}{۳}a^{n-۳}b^۳+...$$

بنابراین برای به‌دست آوردن $(a+b)^n$ می‌توان از این قاعده نیز استفاده کرد: «روشن است که جملهٔ اول بسط همواره به صورت a^n خواهد بود. از اینجا به بعد برای به‌دست آوردن ضریب هر جمله، ضریب جملهٔ قبلی را در توان a ضرب و حاصل را بر تعداد جمله‌هایی که تا قبل از آن نوشته شده‌اند، تقسیم‌می کنیم.»

بررسی چند مثال خاص

مثال ۱۱. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $۵^n-۴n-۱$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

جواب: راه اثبات این مسئله استفاده از استقرا است، اما راه‌حل دوم در اینجا مدنظر ماست:

$$(۴+۱)^n=۴^n+\binom{n}{۱}۴^{n-۱}+\binom{n}{۲}۴^{n-۲}+...+۴\binom{n}{n-۱}+۱$$

$$\Rightarrow ۵^n-۴n-۱=۴^n+\binom{n}{۱}۴^{n-۱}+...+۱۶\binom{n}{n-۲}=۱۶k$$

مثال ۱۲ (تمرین کتاب درسی). اگر $(۲+\sqrt{۳})^n=۳۶۲+b\sqrt{۳}$ باشد، b را به‌دست آورید.

جواب: با اندکی تأمل داریم: $(۲-\sqrt{۳})^n=۳۶۲-b\sqrt{۳}$ (چرا؟). بنابراین با ضرب دو رابطه خواهیم داشت:

$$۱^n=۳۶۲^۲-۳b^۲\rightarrow b^۲=\frac{۳۶۲^۲-۱}{۳}\Rightarrow b=\sqrt{\frac{۳۶۲^۲-۱}{۳}}$$

مثال ۱۳. مجموع ضرایب جمله‌های فرد را در بسط $(۲a+۱)^{۱۳}$ به‌دست آورید.

جواب: باید عملی انجام دهیم تا جمله‌های زوج از بین بروند. بنابراین بسط $(۲a+۱)^{۱۳}$ را با $(۲a-۱)^{۱۳}$ جمع می‌کنیم. حال کافی است $a=۱$ قرار دهیم و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم (چرا؟):

$$\text{مجموع ضرایب جمله‌های فرد}=(۲a+۱)^{۱۳}+(۲a-۱)^{۱۳}\xrightarrow{a=۱}\frac{۳^{۱۳}+۱}{۲}$$





۱. ثابت کنید اگر x، y و z چنان در نظر گرفته شوند که: $\sin x+\sin y+\sin z\ge ۲$، آن‌گاه: $\cos x+\cos y+\cos z\le\sqrt{۵}$.

حل: از فرض مسئله نتیجه می‌شود: $x,y,z\in[۰,\pi]$ (زیرا در غیر این صورت مجموعشان کمتر از ۲ می‌شود). اگر یکی از سه کمان x، y و z متعلق به بازهٔ $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ باشد، مجموع کسینوس‌های آن‌ها از $\sqrt{۴}$ (و در نتیجه از $\sqrt{۵}$) کمتر یا مساوی می‌شود. (چرا؟) بنابراین می‌توان فرض کرد: $x,y,z\in[۰,\frac{\pi}{۲}]$.

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sin x$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نمودار این تابع (و یا مشتق دوم آن) روشن است که تقعر این منحنی در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ همواره رو به پایین است. پس طبق «نامساوی ین سن» (به یادداشت پی‌نویس رجوع کنید) خواهیم داشت:

$$\sin(\frac{x+y+z}{۳})\ge\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{۳}\ge\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin^۲(\frac{x+y+z}{۳})\ge\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۱-\sin^۲(\frac{x+y+z}{۳})\le\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \cos^۲(\frac{x+y+z}{۳})\le\frac{۵}{۹}\Rightarrow \cos(\frac{x+y+z}{۳})\le\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

حال با توجه به همان قضیه (نامساوی ین‌سن) دربارهٔ تابع $f(x)=\cos x$ (با تقعر رو به پایین) داریم:

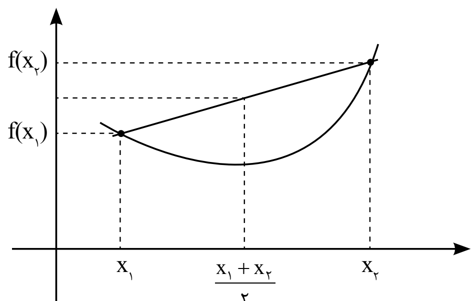
$$\cos(\frac{x+y+z}{۳})\ge\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{۳},$$

$$\cos(\frac{x+y+z}{۳})\le\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{۳}\le\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\Rightarrow \cos x+\cos y+\cos z\le\sqrt{۵}$$

پی‌نویس: نامساوی ین‌سن: اگر f تابعی باشد که در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده و در این بازه دارای تقعر رو به بالا باشد (یعنی در این بازه، هر خط مماس بر منحنی تابع، زیرمنحنی باشد و در این صورت برای هر x متعلق به این بازه: $f''(x)>۰$)، آن‌گاه برای هر $x_۱,x_۲\in[a,b]$ داریم: $f(\frac{x_۱+x_۲}{۲})\le\frac{f(x_۱)+f(x_۲)}{۲}$.



و براساس تعمیم این قضیه برای هر $x_۱,x_۲,...,x_n\in[a,b]$ داریم:

$$f(\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n})\le\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+...+f(x_n)}{n}$$

و اگر f دارای تقعر رو به پایین باشد داریم:

$$f(\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n})\ge\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+...+f(x_n)}{n}$$

برای اطلاع بیشتر دربارهٔ نامساوی ین‌سن و نتایج آن به کتاب «المپیاد ریاضی در مجارستان»، مرکز نشر دانشگاهی، جلد دوم، صفحات ۷۸-۷۲ مراجعه کنید.

۲. ثابت کنید هرگاه اندازه‌های زوایای یک n ضلعی محدب، جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه یا یکی از زوایا مقدار ثابتی دارد و یا همهٔ زوایا را می‌توان به صورت

تعدادی جفت دسته‌بندی کرد، به‌طوری که مجموع همهٔ جفت‌ها مقدار ثابتی باشد. از آنجا نتیجه بگیرید که هرگاه اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، چهارضلعی محاطی است. آیا عکس این موضوع هم درست است؟

حل: اگر تعداد اضلاع (و زاویه‌های) n ضلعی، عددی فرد باشد، $n = 2k+1$ و در نتیجه می‌توان زوایا را به صورت زیر مشخص کرد:

$$\alpha - kd, \dots, \alpha - 2d, \alpha - d, \alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots, \alpha + kd$$

و مجموع زوایا برابر است با: $n\alpha$ که با توجه به دستور مجموع زوایای داخلی n ضلعی نتیجه می‌شود: $n\alpha = (n-2)180^\circ$ و $\alpha = \frac{(n-2)180}{n}$. پس α مقدار ثابتی دارد.

اما اگر n زوج باشد، آن‌گاه زوایا را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots, \alpha + (n-1)d$$

و مجموع زاویهٔ اول و nام، با مجموع زوایای دوم و $(n-1)$ ام و... برابر است و مساوی $2\alpha + (n-1)d$ خواهد بود. با توجه به دستور مجموع زوایای داخلی n ضلعی و نیز مجموع جملات دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d] = (n-2)180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha + (n-1)d = \frac{(n-2)360^\circ}{n}$$

و این مقداری ثابت است. بنابراین همهٔ زوایا را می‌توان به دسته‌های دوتایی تقسیم کرد، به‌گونه‌ای که مجموع هر دسته مقداری ثابت باشد. حال اگر تعداد زوایا، چهار زاویه باشد و مجموع اولی و چهارمی، با مجموع دومی و سومی برابر باشد، یعنی:

$$\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$$

با توجه به مجموع همهٔ زوایا (360°) نتیجه می‌شود:

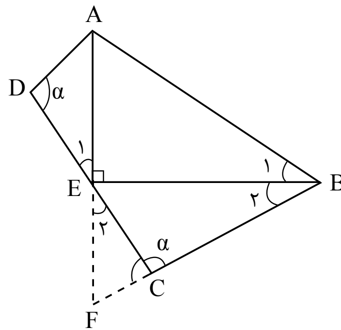
$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 = 180^\circ$$

در نتیجه چهارضلعی محاطی است. بدیهی است که عکس مطلب درست نیست، زیرا برابری $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$ نتیجه نمی‌دهد که α_1، α_2، α_3 و α_4 جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند.

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم: $\hat{D} = \hat{C}$، نیمساز زاویهٔ B، CD را در نقطهٔ E قطع کرده است و داریم: $BE \perp AE$. ثابت کنید:

$$AB = BC + AD$$

حل: مطابق شکل، BE نیمساز $\hat{B}$ $(\hat{B}_1 = \hat{B}_2)$ است و داریم: $BE \perp AE$. امتدادهای AE و BC نیز یکدیگر را در F قطع کرده‌اند و مطابق فرض مسئله: $\hat{D} = \hat{C} = \alpha$



در مثلث ABF، نیمساز $\hat{B}$ ارتفاع هم هست، لذا این مثلث «متساوی‌الساقین» است: $AB = BF$ و $AE = EF$.

در نتیجه: $AB = BC + CF \quad (*)$

حال در مثلث‌های ADE و CEF قضیهٔ سینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$\Delta ADE: \frac{AD}{\sin E_1} = \frac{AE}{\sin \alpha}, \Delta CEF: \frac{CF}{\sin E_2} = \frac{EF}{\sin(\pi - \alpha)}$$

و چون $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ و $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ بنابراین: $\frac{AD}{AE} = \frac{CF}{EF}$. با توجه به برابری AE و EF نتیجه می‌شود: $AD = CF$ و با جای‌گذاری در تساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$AB = BC + AD$$

۴. قطار مسافری تهران ـ مشهد، تهران را رأس ساعت x و y دقیقه ترک کرد و رأس ساعت y و z دقیقه وارد مشهد شد. این مسافرت z ساعت و x دقیقه طول کشید. همهٔ مقادیر ممکن برای x، y و z را به دست آورید.

حل: با توجه به صحیح بودن مقادیر x، y و z، اگر مبدأ زمان را صفر در نظر بگیریم، این مسافرت از ساعت x و y دقیقه، یعنی $60x + y$ دقیقه پس از مبدأ شروع شده و $60y + z$ دقیقه پس از مبدأ پایان یافته است. پس مدت مسافرت، $(60y + z - 60x - y)$ دقیقه بوده که معادل $60z + x$ است. بنابراین:

$$60y + z - 60x - y = 60z + x \Rightarrow 59y - 59z = 61x$$

$$\Rightarrow 59(y - z) = 61x$$

با توجه به اول بودن ۶۱ و ۵۹ نتیجه می‌شود که: $59 | x$ و $61 | y - z$.

و چون: $0 \le y$ و $z < 60$، پس: $y - z = 0$ و در نتیجه: $y = z$ و از آنجا: $x = 0$.

پس این مسافرت رأس ساعت y و y دقیقهٔ بامداد شروع شده، رأس ساعت y و y دقیقه پایان یافته و y ساعت به طول انجامیده است و: $y = 1, 2, \dots, 12$. البته با توجه به مسافت بین تهران و مشهد، احتمالاً فقط پاسخ‌های $y = 10, 11, 12$ می‌توانند قابل قبول باشند!



پاسخ معماهای ایستگاه اندیشهٔ همین شماره

پاسخ معماهای سال نو

۱. ۳۲ سال بعد: $2^4 \times 89 = 1424$

۲. یک سال بعد!: $1393 = 7 \times 199$

۳. فرض می‌کنیم این اعدد m+۱ و m+۲، ... و m+n باشند. در این صورت داریم:

$$m+1+m+2+\dots+m+n=1392$$
$$\Rightarrow mn+\frac{n(n+1)}{2}=1392 \Rightarrow 2mn+n(n+1)=2784$$
$$\Rightarrow n(2m+n+1)=2^5\times 87 \Rightarrow n=32, 2m+33=87$$
$$\Rightarrow m=27 \Rightarrow 28+29+30+\dots+59=1392$$

۴. تعداد صفرهای سمت راست n! از دستور $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\dots$ به‌دست می‌آید:

$$\left[\frac{1392}{5}\right]+\left[\frac{1392}{25}\right]+\left[\frac{1392}{125}\right]+\left[\frac{1392}{625}\right]$$
$$=278+55+11+2=346$$

یعنی ۳۴۶ رقم صفر در سمت راست عدد !۱۳۹۲ وجود دارد.

۵. برای پیدا کردن رقم سمت راست عدد کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را بر ۱۰ به‌دست آوریم:

$$1392^{1392}\overset{10}{\equiv}2^{1392}\overset{10}{\equiv}(2^5)^{278}\times 2^2\overset{10}{\equiv}2^{278}\times 2^2=2^{280}$$
$$2^{280}\overset{10}{\equiv}(2^5)^{56}\overset{10}{\equiv}2^{56}\overset{10}{\equiv}(2^5)^{11}\times 2\overset{10}{\equiv}2^{12}\overset{10}{\equiv}(2^5)^2\times 2\overset{10}{\equiv}8$$

یعنی رقم سمت راست آن مساوی ۸ است.

۶. می‌دانیم که: $1392<5040=7!$. بنابراین عددهای متوالی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ حداقل عددهای طبیعی متوالی‌اند که حاصل‌ضرب آن‌ها از ۱۳۹۲ بیشتر و مجموع آن‌ها مساوی ۲۷ است.

۷. اگر جملهٔ nام این دنباله مساوی ۱۳۹۲ باشد، داریم:

$$n^2-3n=1392 \Rightarrow n^2-3n-1392$$
$$\Rightarrow \Delta=9-4(-1392)=5577$$

و چون Δ مربع کامل نیست، پس این معادله ریشهٔ گویا (طبیعی) ندارد و در نتیجه



چنین جمله‌ای وجود ندارد.

توضیح در مورد سرگرمی‌های ایستگاه سوم

۱. وقتی شما ضربهٔ هشتم را روی ۱۲، ضربهٔ نهم را روی ۱۱، ضربهٔ دهم را روی ۱۰ و... می‌زنید، پس ضربهٔ k ام خود را روی عدد ۲۰-k می‌زنید. اگر عددی که دوست شما در ذهن خود تصور کرده است، x باشد، با اولین ضربهٔ شما، عدد x+۱ و با دومین ضربهٔ شما x+۲ و... و با (۲۰-x) اُمین ضربهٔ شما به عدد ۲۰ می‌رسد و دستور توقف می‌دهد. در اینجا طبق آنچه دیدیم، انگشت شما روی عدد $20-k=20-(20-x)=x$ است!

۲. از این قضیه که اثبات آن را به شما واگذار می‌کنیم (!) استفاده می‌شود: حاصل تفاضل هر عدد پنج رقمی (و در حالت کلی هر عدد n رقمی) و مقلوب آن، همواره مضرب ۹ است. بنابراین مجموع ارقام آن نیز مضرب ۹ است.

۳. اگر عددهای روی سه تاس به ترتیب a، b و c باشند، آنچه که دوست شما انجام می‌دهد محاسبهٔ زیر است:

$$5(5(a+b)+c)+25(a+b)+450a$$
$$=25a+25b+5c+25a+25b+450a$$
$$=500a+50b+5c=5(100a+10b+c)=5\overline{abc}$$

و با توجه به ارزش مکانی ارقام، اگر این عدد را بر ۵ تقسیم کنیم، ارقام آن همان a، b و c هستند.

پاسخ جدول واژه‌های «ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی» شمارهٔ ۷۶:

واژهٔ نهایی جدول **دکتر احمد بیرشک** بود. زنده‌یاد، استاد احمد بیرشک، از استادان بنام معاصر کشورمان بود که زندگی‌نامهٔ مختصر وی را در صفحهٔ دوم جلد این شمارهٔ مجله می‌توانید ملاحظه کنید.

ا	ط	ن	ی	ر	ی	ز	ی	ر	د
ل	ب	س	د	ا	ز	ه	ب	ج	م
د	ر	ن	چ	ع	ی	و	ل	و	م
ی	ی	ا	س	ک	ط	س	ن	م	ن
ب	د	ی	ع	ی	ب	ا	ر	ا	ف
ظ	ن	ی	م	ی	ن	ب	ر	ی	ر
ف	ج	ی	ر	ی	ح	ا	ح	خ	د
ا	خ	و	ا	ر	ز	م	ی	ر	و
ح	ن	ظ	ا	م	ی	ا	ک	م	س
ی	ی	ک	و	ش	ی	ا	ر	ع	ی

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و...



همکار گرامی، آقای محمدمهدی کاوه یزدی از شهرستان یزد

با سپاس فراوان از مقالهٔ ارسالی‌تان تحت عنوان «تعمیم تقسیم مصنوعی و...» منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

همکار عزیز آقای قاسم حسین قنبری از دانشگاه فرهنگیان سمنان

با تشکر فراوان از همکاری صمیمانه شما با مجلهٔ برهان که به چاپ مقاله‌تان در شمارهٔ ۷۶ انجامید، مقالهٔ دیگر شما به نام «این مسئله‌ها واقعی هستند یا روزمره؟» دریافت شد. اگرچه نقد کتاب‌های درسی از اهداف مجلهٔ ما نیست، با این حال تلاش خواهیم کرد به نوعی از مطلب ارسالی‌تان استفاده کنیم. ارتباط خوب و سازنده‌تان را با ما قطع نکنید.

خانم مریم شفیعی از آموزش‌وپرورش ناحیهٔ یک شهرری

با سپاس فراوان از کار خوب شما که با مشارکت دانش‌آموزان «پژوهش‌سرای دانش‌آموزی محمدبن زکریای رازی» انجام گرفته بود، مقاله‌تان را در یکی از شماره‌های آینده به چاپ می‌رسانیم. اما توصیه می‌شود که تلاش کنید خود دانش‌آموزان را نیز به نوشتن مقاله و مطلب و ارسال آن برای ما تشویق کنید. به آنان اطمینان بدهید که برهان از این موضوع استقبال خواهد کرد.

همکار گرامی آقای فرزاد حمزه‌پور از شهرستان بانه

لطف شما همکار گرامی پیش از این هم شامل حال دوستانتان در مجله شده است. سپاس از شما به‌خاطر ارسال مقالهٔ «ترکیبیات». ان‌شاءالله بتوانیم در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده کنیم. باز هم با ما در تماس باشید.

همکار گرامی خانم سیده صدیقهٔ علوی از شهرستان ساری

با تشکر از مقالهٔ ارسالی‌تان با عنوان «ریاضی، دانشی زیبا، شیرین و دوست‌داشتنی». با امید به آنکه مورد استفاده قرار گیرد، انتظار داریم مقالات تحلیلی بیشتری از شما دریافت کنیم.

همکار عزیز، آقای اقبال رضا حیدری از شهرستان شاهرود

مقالهٔ «ریاضیات دانش کامل» را دریافت کردیم. پیشنهاد می‌کنیم که به سمت نگارش مقاله برای دانش‌آموزان بروید و به مشکلات آنان بیشتر توجه کنید. منتظر مطالب دیگرتان هستیم.

از دوستان و همکاران عزیزی که در میزگرد مجلهٔ برهان در حاشیهٔ کنفرانس آموزش ریاضی سمنان حضور به‌هم رساندند و اعضای هیئت تحریریه را مورد محبت خود قرار دادند، سپاس‌گزاریم. در پایان به دلیل کمبود جا، فقط به ذکر اسامی‌تان قناعت می‌کنیم و امیدواریم که باز هم به مجلهٔ خودتان توجه و التفات کنید.

خانم‌ها و آقایان: طیبه ابراهیمی، فاطمه میرداماد، فهیمه تقوی، سمانه بهادری، فهیمه کلاهدوز، اعظم صالحی، سوسن پناهنده، هما ترحمی، آزاده حیدری، راضیه باب‌الحوائجی، شمسی آراسته، فاطمه کرمی، صدیقه علوی، مریم رشتچی، رباب افشاری، حمیده عبداللهی، سینا نعمتی، سیدحسین عبداللهی، غلامرضا طحانیان، سعید فلاح تفتی، چنگیز تیموریان، اقبال رضا حیدری، کوروش جعفریان، سیدعلی‌اکبر طهماسبی، محمود حجتی، حمید خاکشور، علی مؤمن‌زاده، علی زمندی، البرز فراهانی، محمدرضا بهرامی.



مسائل مسابقه‌ای رشد

آموزشی

۱. همـــهٔ اعداد حقیقی p را بیابید که به ازای آن‌ها، معادلهٔ $x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x - 3p^3 = 0$ ســه ریشهٔ حقیقی داشته باشد که طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.

۲. فرض کنید m و n اعدادی طبیعی باشند و داشته باشیم: $(m,n) + [m,n] = m + n$. ثابت کنید یکی از دو عدد m و n بر دیگری بخش‌پذیر است.

۳. در چهارضلعی محدب ABCD می‌دانیم: $C\hat{A}B = 40^\circ$، $C\hat{A}D = 30^\circ$، $D\hat{B}A = 75^\circ$ و $D\hat{B}C = 25^\circ$. مطلوب است تعیین اندازهٔ زاویهٔ BDC.

۴. در سرزمینی همهٔ انسان‌ها یکی از دو نوع A یا B هستند. آن‌ها که از نوع A هستند، هنگام بیداری کاملاً دقیق و هنگام خواب کاملاً نادقیق هستند. یعنی هرچه هنگام بیداری باور کنند، درست و هرچه در خواب باور کنند، نادرست است. اما آن‌ها که از نوع B هستند، درست برعکس‌اند. یعنی هرچه در بیداری باور می‌کنند، نادرست و هرچه در خواب باور کنند، درست است. ثابت کنید در این سرزمین:

الف) هرگاه در یک زمان معین، شخصی باور داشته باشد که بیدار است، آن‌گاه او از نوع A است.

ب) اگر در یک زمان معین، شخصی گمان کند که از نوع A است، آن‌گاه او باید در آن زمان بیدار باشد!

